الباب السادس
فضاءات القياس
Metric Spaces

واحد من أهم الطرق والأكثر استخداما في تعريف توبولوجي على مجموعة هو تعريف التوبولوجي بدلالة قياس على مجموعة. التوبولوجيات المعطاة بهذه الطريقة تكون في القلب من التحليل الحقيقي. فضاءات القياس هي مصدر غني يزودنا بوفرة من الأمثلة في التوبولوجي. في هذا الباب سوف نقدم توبولوجي القياس وندرس العديد من خواصه.

٦-١ القياس على مجموعة Metric on a set

تعريف ٦-١. القياس metric على مجموعة غير خالية X هو دالة

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

تحقق الخواص التالية لكل $x , y , z \in X$

(١) $d(x , y) \geq 0$ و $d(x , y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

(٢) $d(x , y) = d(y , x)$.

(٣) متباينة المثلث، $d(x , y) + d(y , z) \geq d(x , z)$.

إذا كان d قياس على المجموعة X، فإن العدد $d(x , y)$ يسمى **المسافة** distance بين x و y بالنسبة للقياس d. نفرض $\varepsilon > 0$ ونعتبر المجموعة

$$B_d(x , \varepsilon) = \{y : d(x , y) < \varepsilon\}$$

من كل النقاط y التي مسافتها من x أقل من ε. هذه المجموعة تسمى **كرة مفتوحة** open ball نصف قطرها ε ومركزها x. أحيانا نحذف القياس d من رمز الكرة المفتوحة ونكتب للتبسيط $B(x , \varepsilon)$ إذا لم يكن هنالك أي لبس أو غموض.

مثال ٦-٢. الدالة $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصورة

$$d(x , y) = |x - y| \quad \text{لكل} \quad x , y \in \mathbb{R}$$

تكون قياس على $\mathbb{R}$، حيث أن

(١) $|x - y| \geq 0$ و $|x - y| = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

(٢) $|x-y|=|y-x|$.

(٣) $|a-c|\le|a-b|+|b-c|$ ، (هـذا ينـتج مـن العلاقـة $|x+y|\le|x|+|y|$).

هذا القياس يسمى **القياس الإقليدي** Euclidean metric على $\mathbb{R}$.

واضح أن الكرات المفتوحة هنا هي الفترات المفتوحة

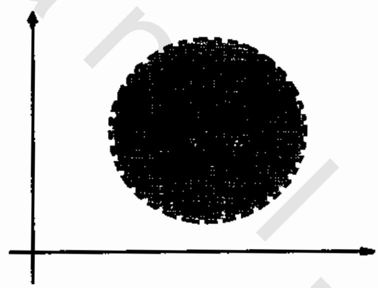
$$B(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$$

مثال ٦-٣. الدالة $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصورة

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

تكون قياس على $\mathbb{R}^2$ يسمى القياس الإقليدي على $\mathbb{R}^2$.

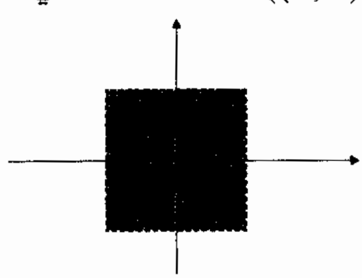
الكرة المفتوحة هنا هي القرص المفتوح في $\mathbb{R}^2$ الذي مركزه x ونصف قطره ε



مثال ٦-٤. على $\mathbb{R}^2$ يمكن أيضا تعريف القياس d^* المعرف بالصورة

$$d^*((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$$

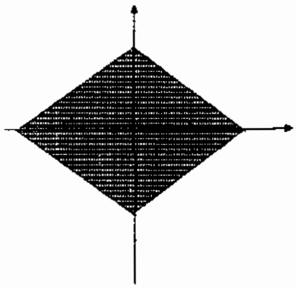
الكرة المفتوحة $B((0,0),1)$ تكون كما في الشكل



مثال ٦-٥. أيضا يمكن تعريف القياس d_1 على $\mathbb{R}^2$ بالصورة

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

الكرة المفتوحة $B((0,0),1)$ تكون كما في الشكل



مثال ٦-٦. نفرض أن X مجموعة غير خالية. الدالة $d : X \times X \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصورة

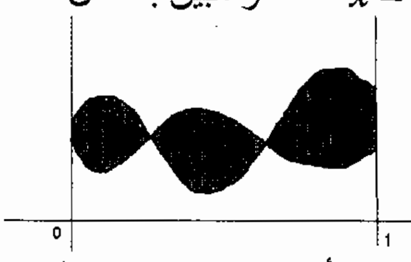
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = y \\ 1, & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

تكون قياس على X يسمى **القياس المتقطع** discrete metric أو **القياس التافه** trivial metric.

مثال ٦-٧. نفرض أن $C[0,1]$ ترمز إلى مجموعة كل الدوال المتصلة ذات القيم الحقيقية المعرفة على الفترة المغلقة $[0,1]$. نعرف قياس على $C[0,1]$ كما يلي

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

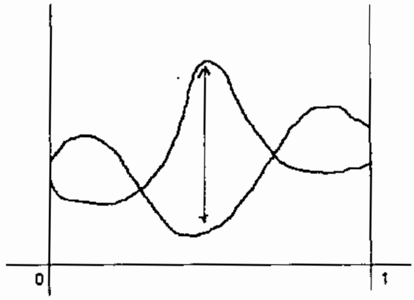
هنا $d(f,g)$ ببساطة هي مساحة المنطقة المحصورة بين الدالتين f و g من $x = 0$ إلى $x = 1$ كما هو مبين بالشكل



مثال ٦-٨. أيضا نفرض أن $C[0,1]$ ترمز إلى مجموعة كل الدوال المتصلة ذات القيم الحقيقية المعرفة على الفترة المغلقة $[0,1]$. يمكن تعريف قياس آخر على $C[0,1]$ كما يلي

$$d^*(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

هذا القياس ببساطة هو أكبر مسافة رأسية بين الدالتين f و g من $x=0$ إلى $x=1$ كما هو مبين بالشكل



٦-٢ توبولوجي القياس Metric topology

تعريف ٦-٩. نفرض أن d قياس على المجموعة غير الخالية X. مجموعة كل الكرات المفتوحة $B_d(x,\varepsilon)$ لكل $x\in X$ و $\varepsilon>0$ تكون أساس لتوبولوجي على X يسمى **توبولوجي القياس** metric topology المولد بـ d.

الشرط الأول من شروط الأساس بديهي، حيث أن $x\in B(x,\varepsilon)$ لأي $\varepsilon>0$. قبل التأكد من الشرط الثاني نعتبر التمهيدية التالية.

تمهيدية ٦-١٠. نفرض أن d قياس على المجموعة غير الخالية X، $x\in X$ و $\varepsilon>0$. لكل $y\in B(x,\varepsilon)$ يوجد $\delta>0$ بحيث يكون $B(y,\delta)\subset B(x,\varepsilon)$.

البرهان: نفرض أن $y\in B(x,\varepsilon)$. نعرف δ على أنها العدد الموجب $\varepsilon-d(x,y)$. إذن $B(y,\delta)\subset B(x,\varepsilon)$، حيث إذا كان $z\in B(y,\delta)$ ، فإن $d(y,z)<\varepsilon-d(x,y)$ ، والتي منها نستنتج أن

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)<\varepsilon$$

الآن نتحقق من الشرط الثاني من شروط الأساس. نفرض B_1 و B_2 عنصري أساس و $y\in B_1\cap B_2$. إذن، من التمهيدية، يمكن اختيار عددين موجبين δ_1 و δ_2 بحيث $B(y,\delta_1)\subset B_1$ و

$B(y,\delta_2)\subset B_2$. بفرض أن δ هي أصغر العددين δ_1 و δ_2 نستنتج أن $B(y,\delta)\subset B_1\cap B_2$.

باستخدام ما قد أثبتناه بالفعل يمكننا إعادة تعريف توبولوجي القياس كما يلي:

المجموعة U تكون مفتوحة في توبولوجي القياس المولد بـ d إذا وفقط إذا كان لكل $y\in U$ يوجد $\delta>0$ بحيث يكون $B_d(y,\delta)\subset U$.

واضح أن هذا الشرط يؤدي إلى أن U تكون مفتوحة. ومن جهة أخرى، إذا كانت U مفتوحة فإنها تحتوي عنصر أساس $B=B_d(x,\varepsilon)$ يحتوي y و B بدورها تحتوي عنصر أساس $B_d(y,\delta)$ مركزه y.

مثال ٦-١١. نعتبر القياس الاقليدي على $\mathbb{R}$ المعطى في مثال ٦-٢ التوبولوجي المولد بهذا القياس هو التوبولوجي الاقليدي (التوبولوجي المعتاد) حيث أن الكرات المفتوحة هنا هي الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$.

مثال ٦-١٢. نعتبر القياس المتقطع المعطى في مثال ٦-٦ التوبولوجي المولد بهذا القياس هو التوبولوجي المتقطع، حيث أن عنصر الأساس $B(x,1)$، على سبيل المثال، هو المجموعة المنفردة $\{x\}$.

مثال ٦-١٣. يمكن إثبات أن القياسات d ، d^* و d_1 في الأمثلة٦-٣، ٦-٤،٦-٥ تولد نفس التوبولوجي على $\mathbb{R}^2$ ، وهو التوبولوجي الإقليدي.

تعريف ٦-١٤. نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. X يسمى **قابل للقياس** metrizable إذا كان يوجد قياس d على X يولد التوبولوجي τ على X. **فضاء القياس** metric space هو فضاء قابل للقياس مع القياس المعين الذي يعطي التوبولوجي τ.

العديد من الفضاءات المهمة في الرياضيات تكون قابلة للقياس، ولكن بعضها ليس كذلك. **قابلية القياس** metrizability هي سمة دائما يكون من المفضل أن يمتلكها الفضاء، حيث وجود القياس يعطي أداة قيمة لبرهان النظريات حول هذا الفضاء.

مع أن مسألة قابلية القياس هي مسألة هامة في التوبولوجي، دراسة فضاءات القياس تكون أقرب للتحليل منها للتوبولوجي. قابلية القياس

لفضاء تعتمد فقط على التوبولوجي المعرف على الفضاء تحت الدراسة، ولكن الخواص التي يمتلكها قياس معين على X على وجه العموم ليست كذلك.

القياسات المتكافئة

تعريف ٦-١٥. القياسان d و d^* على المجموعة X يقال أنهما **متكافئان** equivalent إذا كانا يولدان نفس التوبولوجي على X. أي إذا كان تجمع الكرات المفتوحة للقياس d وتجمع الكرات المفتوحة للقياس d^* تكون أساسين لنفس التوبولوجي على X.

مثال ٦-١٦. القياسات d ، d^* و d_1 على $\mathbb{R}^2$ في الأمثلة ٦-٣، ٦-٤، ٦-٥ تكون متكافئة لأنها تولد نفس التوبولوجي على $\mathbb{R}^2$ وهو التوبولوجي الإقليدي.

مثال ٦-١٧. نعتبر القياس d على المجموعة غير الخالية X المعرف كما يلي

$$d(x,y)=\begin{cases}2 & \text{if } a\neq b\\ 0 & \text{if } a=b\end{cases}$$

لاحظ أن $B_d(x,1)=\{x\}$ ، لذلك المجموعات المنفردة في X تكون مفتوحة ومن ثم d يولد التوبولوجي المتقطع على X. تبعا لذلك d يكافئ القياس المتقطع (التافه) على X.

فضاءات القياس متساوية القياس

تعريف ٦-١٨. فضاء القياس (X,d) يكون **متساوي القياس** isometric مع فضاء القياس (Y,e) إذا وجدت دالة تناظر أحادي $f:X\to Y$ تحافظ على المسافة، أي لكل $p,q\in X$ يكون

$$d(p,q)=e(f(p),f(q))$$

لاحظ أن علاقة "(X,d) يكون متساوي القياس مع (Y,e)" تكون علاقة تكافؤ على تجمع كل فضاءات القياس. علاوة على ذلك:

نظرية ٦-١٩. إذا كان فضاء القياس (X,d) متساوي القياس مع فضاء القياس (Y,e) فإن (X,d) يكون أيضا متشاكل توبولوجيا مع (Y,e).

المثال التالي يوضح أن عكس النظرية السابقة ليس صحيحا.

مثال ٦-٢٠. نفرض أن d هو القياس المتقطع على المجموعة X وأن e هو القياس على المجموعة Y المعرف كما يلي

$$e(x,y)=\begin{cases}2 & \text{if } a\neq b\\ 0 & \text{if } a=b\end{cases}$$

نفرض أن X و Y لهما نفس العدد الكاردينالي أكبر من 1. إذن (X,d) و (Y,e) غير متساويا القياس حيث أن المسافات بين النقاط في الفضائين تكون غير متساوية. ومع ذلك كلا القياسين d و e يولدان نفس التوبولوجي (التوبولوجي المتقطع)، والفضائين المتقطعين بنفس العدد الكاردينالي يكون متشاكلان توبولوجيا. لذلك (X,d) و (Y,e) يكونا متشاكلان توبولوجيا.

عند دراسة الاتصال في فضاءات القياس، نكون قريبين جدا من مفهوم الاتصال في حساب التفاضل.

نظرية ٦-٢١. نعتبر $f:X\to Y$ حيث Xو Y فضاءان توبولوجيان قابلان للقياس بقياسين d_X و d_Y ، على الترتيب. إذن إتصال f يكافئ المتطلب أنه لكل $x\in X$ و $\varepsilon>0$ ، يوجد $\delta>0$ بحيث

$$d_X(x,y)<\delta \Rightarrow d_y(f(x),f(y))<\varepsilon$$

البرهان: نفرض أن f دالة متصلة. نفرض x و ε كما هو في الفرض، نعتبر المجموعة $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ والتي تكون مفتوحة في X وتحتوي النقطة x. إذا هي تحتوي كرة- δ ، $B(x,\delta)$ مركزها x. إذا كانت $y\in B(x,\delta)$ فإن $f(y)\in B(f(x),\varepsilon)$ ، وهو المطلوب. من جهة أخرى، نفرض أن الشرط $\varepsilon-\delta$ محقق. نفرض V مجموعة مفتوحة في Y، سوف نبين أن $f^{-1}(V)$ تكون

مفتوحة في X. نفرض x نقطة في $f^{-1}(V)$. حيث أن $f(x)\in V$، توجد كرة $B(f(x),\varepsilon)$ مركزها $f(x)$ محتواة في V. من الشرط $\varepsilon-\delta$، يوجد كرة $B(x,\delta)$ مركزها x بحيث $f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$. إذن $B(x,\delta)$ يكون جوار لـ x محتوى في $f^{-1}(V)$، ومن ثم $f^{-1}(V)$ تكون مفتوحة، كما هو مطلوب.

تمهيدية ٦-٢٢. (تمهيدية المتتابعة) نفرض أن X فضاءا توبولوجيا و $A\subset X$. إذا وجدت متتابعة من نقاط A تتقارب إلى x فإن $x\in\overline{A}$؛ العكس يكون صحيحا إذا كان X قابل للقياس.

البرهان: نفرض أن $x_n\to x$، حيث $x_n\in A$. إذن كل مجموعة مفتوحة U تحتوي x تحتوي نقطة من A، لذلك $x\in\overline{A}$. في الاتجاه العكسي، نفرض أن X فضاء قابل للقياس و $x\in\overline{A}$. نفرض d قياس للتوبولوجي على X. لكل عدد صحيح موجب n، نأخذ الجوار $B_d(x,\frac{1}{n})$ للنقطة x بنصف قطر $\frac{1}{n}$، ونختار x_n نقطه في تقاطعها مع A. سوف نوضح أن المتتابعة x_n تتقارب إلى x. أي مجموعة مفتوحة U تحتوي x تحتوي كرة مفتوحة $B_d(x,\varepsilon)$ مركزها x، باختيار N بحيث $1/N<\varepsilon$، فإن U تحتوي x_i لكل $i\geq N$.

نظرية ٦-٢٣. نفرض أن X فضاء قابل للقياس و Y فضاء توبولوجي. الدالة $f:X\to Y$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كان لكل متتابعة تقاربية $x_n\to x$ في X، المتتابعة $f(x_n)$ تتقارب إلى $f(x)$ في Y.

البرهان: نفرض أن f دالة متصلة ونفرض (x_n) متتابعة من نقاط X تتقارب إلى x. سوف نبين أن المتتابعة $(f(x_n))$ تتقارب إلى $f(x)$. نفرض أن V مجموعة مفتوحة تحتوي $f(x)$. إذن $f^{-1}(V)$ تكون مجموعة مفتوحة تحتوي x، ومن ثم يوجد N بحيث $x_n\in f^{-1}(V)$ لكل $n\geq N$. لذلك $f(x_n)\in V$ لكل $n\geq N$.

لإثبات العكس، نفرض أن شرط تقارب المتتابعة محقق. نفرض أن A مجموعة جزئية من X، سوف نبين أن $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. إذا كان $x \in \overline{A}$ فإنه توجد متتابعة (x_n) من نقاط A تتقارب إلى x (من التمهيدية السابقة). من الفرض، المتتابعة $(f(x_n))$ تتقارب إلى $f(x)$، من التمهيدية السابقة، $f(x) \in \overline{f(A)}$. لذلك $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ كما هو مطلوب.

لاحظ أنه في برهان تمهيدية ٦-٢٢ ونظرية ٦-٢٣، لم نستخدم الفرض بأن X قابل للقياس كاملا، ولكن فقط كل ما نحتاجه هو تجمع قابل للعد $B_d(x,\frac{1}{n})$ من الكرات حول x. سوف نتعرض لهذا المفهوم في باب مسلمات قابلية العد.

الآن نعتبر طرق إضافية لتكوين دوال متصلة. نحتاج إلى التمهيدية التالية:

تمهيدية ٦-٢٤. عمليات الجمع والطرح والضرب تكون دوال متصلة من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ وعملية القسمة تكون دالة متصلة من $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ إلى $\mathbb{R}$.

نظرية ٦-٢٥. إذا كان X فضاء توبولوجي وكان $f, g : X \to \mathbb{R}$ دالتان متصلتان، فإن $f+g$ ، $f-g$ ، و $f \cdot g$ تكون متصلة. إذا كان $g(x) \neq 0$ لكل $x \in X$ ، فإن f/g تكون متصلة.

البرهان: الدالة $h : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ المعرف بالصورة

$$h(x) = (f(x), g(x))$$

تكون متصلة، من نظرية ٤-١٣، الدالة $f+g$ تساوي تحصيل h وعملية الجمع

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

لذلك $f+g$ تكون متصلة. مناقشة مماثلة تطبق على $f-g$ ، $f \cdot g$ ، و f/g.

أخيرا نصل إلى مفهوم التقارب النظامي.

تعريف ٦-٢٦. نفرض $f_n : X \to Y$ متتابعة من الدوال من المجموعة X إلى فضاء القياس Y. نفرض d هو القياس على Y. نقول أن المتتابعة (f_n) **تتقارب نظاميا** converges uniformly إلى الدالة $f : X \to Y$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد صحيح N بحيث يكون

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

لكل $n > N$ و لكل $x \in X$.

نظامية التقارب يعتمد ليس فقط على التوبولوجي على Y ولكن أيضا على قياسها. حول نظامية تقارب المتتابعات لدينا النظرية التالية:

نظرية ٦-٢٧ (نظرية نظامية النهاية). نفرض أن $f_n : X \to Y$ متتابعة من الدوال المتصلة من الفضاء التوبولوجي X إلى فضاء القياس Y. إذا كانت (f_n) تتقارب نظاميا إلى f ، فإن f تكون متصلة.

البرهان: نفرض V مجموعة مفتوحة في Y ، نفرض x_0 نقطة في $f^{-1}(V)$. نرغب في إيجاد مجموعة U مفتوحة في X تحتوي النقطة x_0 بحيث $f(U) \subset V$.

نفرض $y_0 = f(x_0)$. أولا نختار ε بحيث أن كرة-ε $B(y_0, \varepsilon)$ تكون محتواة في V. باستخدام التقارب النظامي، نختار N بحيث لكل $n \geq N$ وكل $x \in X$،

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$$

باستخدام اتصال f_N ، نختار مجموعة مفتوحة U تحتوي x_0 بحيث f_N تحمل U إلى كرة-$\varepsilon/3$ في Y مركزها $f_N(x_0)$.

سوف نوضح أن f تحمل U إلى $B(y_0, \varepsilon)$ ومن ثم إلى V، كما هو مطلوب. لأجل ذلك لاحظ أنه إذا كان $x \in U$ ، فإن

$$d(f(x), f_N(x)) < \varepsilon/3 \qquad \text{باختيار } N$$

$$d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon/3 \qquad \text{باختيار } U$$

$$d(f_N(x_0), f(x_0)) < \varepsilon/3 \qquad \text{باختيار } N$$

بالجمع واستخدام متباينة المثلث ، نجد أن $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$، كما هو مطلوب.

المسافة بين مجموعتين وقطر المجموعة

تعريف ٦-٢٨. نفرض أن d قياس على المجموعة غير الخالية X. **المسافة** distance $d(x, A)$ بين النقطة $x \in X$ والمجموعة الجزئية غير الخالية $A \subset X$ تعرف كما يلي

$$d(x, A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

أي هي أكبر حد أدنى للمسافات بين x ونقاط A.

المسافة $d(A,B)$ بين المجموعتين الجزئيتين غير الخاليتين $A, B \subset X$ تعرف كما يلي

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

أي هي أكبر حد أدنى للمسافات بين نقاط A و B.

قطر diameter المجموعة الجزئية غير الخالية $A \subset X$، $d(A)$، يعرف كما يلي

$$d(A) = \sup\{d(a,a') : a, a' \in A\}$$

أي هو أصغر حد أعلى للمسافات بين نقاط A.

إذا كان قطر المجموعة منتهي، $d(A) < \infty$، فإن المجموعة تسمى **محددة** bounded. أما إذا كان القطر لا نهائي، $d(A) = \infty$ ، فإن المجموعة تكون غير محددة unbounded.

خاصية التحديد لمجموعة ليست خاصية توبولوجية، حيث أنها تعتمد على قياس خاص d المستخدم على X. على سبيل المثال، إذا كان X فضاء قياس بقياس d، فإنه يوجد قياس $\bar{d}$ يعطي التوبولوجي على X بالنسبة إليه كل مجموعة جزئية من X تكون محددة. هذا القياس يعرف في النظرية التالية:

نظرية ٦-٢٩. نفرض أن (X,d) فضاء قياس. نعرف $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ بالمعادلة

$$\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$$

إذن $\bar{d}$ يكون قياس يولد نفس التوبولوجي مثل d.

القياس $\bar{d}$ يسمى **القياس المحدد العياري** standard bounded metric المناظر للقياس d.

البرهان: التحقق من الشرطين الأولين للقياس يكون بديهي. الآن نتحقق من متباينة المثلث:

$$\bar{d}(x,z) \le \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z)$$

الآن إذا كان إما $d(x,y) \ge 1$ أو $d(y,z) \ge 1$ فإن الطرف الأيمن من هذه المتباينة يكون على الأقل 1؛ وحيث أن الطرف الأيسر (من التعريف) على الأكثر 1، فإن المتباينة تكون محققة. يتبقى اعتبار الحالة عندما $d(x,y) < 1$ و $d(y,z) < 1$. في هذه الحالة يكون لدينا

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) = \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z)$$

حيث أن $\bar{d}(x,z) \le d(x,z)$ ، من التعريف، المتباينة تتحقق لـ $\bar{d}$.

الآن نلاحظ أنه في أي فضاء قياس، تجمع كل كرات-ε حيث $\varepsilon < 1$ يكون أساس لتوبولوجي القياس، لكل عنصر أساس يحتوي x يحتوي واحدة من كرات-ε هذه مركزها x. من ذلك ينتج أن d و $\bar{d}$ يولدان نفس التوبولوجي على X ، لأن تجمع كرات-ε حيث $\varepsilon < 1$ لهذين القياسين هو نفس التجمع.

الآن نعتبر بعض الفضاءات المشهورة ونبين أنها قابلة للقياس.

تعريف ٦-٣٠. نفرض أن $x = (x_1,\ldots,x_n)$ نقطة في $\mathbb{R}^n$، نعرف **معيار** x norm بالمعادلة

$$\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

ونعرف **القياس الاقليدي** d Euclidean metric على $\mathbb{R}^n$ بالمعادلة

$$d(x,y) = \|x-y\| = [(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2]^{1/2}$$

نعرف **القياس المربع** ρ square metric بالمعادلة

$$\rho(x,y) = \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\}$$

لإثبات أن ρ يكون قياس نحتاج فقط إلى إثبات متباينة المثلث، حيث أن الشرطان الآخران إثباتهما بديهي. من متباينة المثلث على $\mathbb{R}$ ينتج أنه لكل عدد صحيح موجب i يكون

$$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

لذلك من تعريف ρ نحصل على

$$|x_i - z_i| \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

كنتيجة لذلك

$$\rho(x,z) = \max |x_i - z_i| \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

وهو المطلوب.

على الخط الحقيقي $\mathbb{R}$، هذان القياسان ينطبقان مع القياس الاقليدي على $\mathbb{R}$.

الآن نبين أن كل من هذان القياسان يولد التوبولوجي المعتاد على $\mathbb{R}^n$. في البداية نبرهن التمهيدية التالية:

تمهيدية ٦-٣١. نفرض أن d و d' قياسان على X؛ ونفرض أن τ و τ' التوبولوجيان على X المولدان بالقياسين d و d'، على الترتيب. إذن $\tau \subset \tau'$ إذا وفقط إذا كان لكل x في X ولكل $\varepsilon > 0$، توجد $\delta > 0$ بحيث

$$B_{d'}(x,\delta) \subset B_d(x,\varepsilon)$$

البرهان: نفرض أن $\tau \subset \tau'$. نعتبر عنصر أساس $B_d(x,\varepsilon)$ للتوبولوجي τ، إذن يوجد عنصر أساس B' للتوبولوجي τ' بحيث $x \in B' \subset B_d(x,\varepsilon)$. داخل B' يمكننا إيجاد كرة $B_{d'}(x,\delta)$ مركزها x.

في الاتجاه العكسي، نفرض أن شرط $\varepsilon - \delta$ محقق. نعتبر عنصر أساس B للتوبولوجي τ يحتوي x، يمكننا إيجاد كرة $B_d(x,\varepsilon)$ محتواة في B مركزها x. من الشرط المعطى توجد δ بحيث يكون $B_{d'}(x,\delta) \subset B_d(x,\varepsilon)$. من نظرية ٢-٢٥ يكون $\tau \subset \tau'$.

نظرية ٦-٣٢. التوبولوجيات على $\mathbb{R}^n$ المولدة بالقياس الاقليدي d والقياس المربع ρ هما نفس توبولوجي حاصل الضرب على $\mathbb{R}^n$.

البرهان: نفرض أن $x=(x_1,\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,\ldots,y_n)$ نقطتان في $\mathbb{R}^n$. يمكن بسهولة التحقق من أن

$$\rho(x,y)\le d(x,y)\le \sqrt{n}\,\rho(x,y)$$

المتباينة الأولى تبين أن

$$B_d(x,\varepsilon)\subset B_\rho(x,\varepsilon)$$

لكل x و ε ، حيث إذا كان $d(x,y)<\varepsilon$، فإن $\rho(x,y)<\varepsilon$ أيضا. بالمثل، المتباينة الثانية تبين أن

$$B_\rho(x,\varepsilon/\sqrt{n})\subset B_d(x,\varepsilon)$$

لكل x و ε. من التمهيدية السابقة ينتج أن توبولوجيا القياس يكونا نفس الشيء.

الآن نبين أن توبولوجي حاصل الضرب هو نفس التوبولوجي المولد بالقياس ρ. أولا نفرض أن

$$B=(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)$$

عنصر أساس لتوبولوجي حاصل الضرب، ونفرض أن $x=(x_1,\ldots,x_n)$ عنصر في B. لكل i يوجد ε_i بحيث

$$(x_i-\varepsilon_i,x_i+\varepsilon_i)\subset(a_i,b_i)$$

نختار $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$. إذن $B_\rho(x,\varepsilon)\subset B$، كما يمكن التحقق من ذلك. نتيجة لذلك التوبولوجي المولد بالقياس ρ يكون أدق من توبولوجي حاصل الضرب.

للاتجاه العكسي، نفرض أن $B_\rho(x,\varepsilon)$ عنصر أساس المولد بالقياس ρ. نفرض $y\in B_\rho(x,\varepsilon)$، نحتاج لإيجاد عنصر أساس B لتوبولوجي حاصل الضرب بحيث

$$y\in B\subset B_\rho(x,\varepsilon)$$

ولكن هذا بديهي، حيث

$$B_\rho(x,\varepsilon)=(x_1-\varepsilon,x_1+\varepsilon)\times\ldots\times(x_n-\varepsilon,x_n+\varepsilon)$$

تكون نفسها عنصر أساس لتوبولوجي حاصل الضرب.

الآن نعتبر الضرب الكارتيزي اللانهائي $\mathbb{R}^{\omega}$. من الطبيعي محاولة تعميم القياسين d و ρ إلى هذا الفضاء. على سبيل المثال، يمكننا محاولة تعريف قياس d على $\mathbb{R}^{\omega}$ بالمعادلة

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

ولكن هذه المعادلة ليست دائما منطقية، حيث أن المتسلسلة ليس بالضرورة تقاربية.

بالمثل، يمكننا محاولة تعميم القياس المربع ρ إلى $\mathbb{R}^{\omega}$ بتعريف

$$\rho(x,y)=\sup\{|x_n-y_n|\}$$

أيضا، هذه الصيغة ليست دائما منطقية. ومع ذلك إذا استبدلنا القياس المعتاد $d(x,y)=|x-y|$ على $\mathbb{R}$ بنسختها المحددة $\bar{d}(x,y)=\min\{|x-y|,1\}$، فإن التعريف يصبح منطقيا، إنه يعطي قياس على $\mathbb{R}^{\omega}$ يسمى **القياس المنظم (النظامي)** uniform metric.

القياس النظامي يمكن أن يعرف بصورة أكثر تعميما على حاصل الضرب الكارتيزي $\mathbb{R}^{J}$ لـ J اختيارية، كما يلي:

تعريف ٦-٣٣. نفرض مجموعة ترقيم J ونقطتين $x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ و $y=(y_\alpha)_{\alpha\in J}$ في $\mathbb{R}^{J}$. نعرف القياس $\bar{\rho}$ على $\mathbb{R}^{J}$ بالمعادلة

$$\bar{\rho}(x,y)=\sup\{\bar{d}(x_\alpha,y_\alpha):\alpha\in J\}$$

حيث $\bar{d}$ هو القياس العياري المحدد على $\mathbb{R}$. يمكن بسهولة التحقق من أن $\bar{\rho}$ بالفعل قياس؛ هذا القياس يسمى **القياس النظامي** uniform metric على $\mathbb{R}^{J}$، التوبولوجي المولد بهذا القياس يسمى **التوبولوجي النظامي** uniform topology.

العلاقة بين هذا التوبولوجي وتوبولوجي حاصل الضرب وتوبولوجي الصندوق تكون في النظرية التالية:

نظرية ٦-٣٤. التوبولوجي النظامي على $\mathbb{R}^J$ يكون أدق من توبولوجي حاصل الضرب وأخشن من توبولوجي الصندوق. هذه التوبولوجيات الثلاثة تكون مختلفة إذا كانت J لانهائية.

البرهان: نفرض نقطة $x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ وعنصر أساس لتوبولوجي حاصل الضرب $\prod U_\alpha$ يحتوي x. نفرض أن $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ هي الأدلة حيث $U_\alpha \neq \mathbb{R}$. إذن لكل i ، نختار $\varepsilon_i > 0$ بحيث أن كرة- ε_i المركزة عند x_{α_i} في القياس $\overline{d}$ تكون محتواة في U_{α_i}، هذا يمكننا فعله لأن U_{α_i} مفتوحة في $\mathbb{R}$. نفرض $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$؛ إذن كرة- ε التي مركزها عند x في القياس $\overline{\rho}$ تكون محتواة في $\prod U_\alpha$. حيث إذا كانت z نقطة في $\mathbb{R}^J$ بحيث $\overline{\rho}(x,z)<\varepsilon$ ، فإن $\overline{d}(x_\alpha,z_\alpha)<\varepsilon$ لكل α، لذلك $z\in\prod U_\alpha$. من ذلك ينتج أن التوبولوجي النظامي يكون أدق من توبولوجي حاصل الضرب.

من ناحية أخرى، نفرض أن B كرة- ε مركزها عند x في القياس $\overline{\rho}$. إذن الجوار الصندوق

$$U=\prod(x_\alpha-\tfrac{1}{2}\varepsilon, x_\alpha+\tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

للنقطة x يكون محتوى في B. حيث إذا كان $y\in U$ ، فإن $\overline{d}(x_\alpha,y_\alpha)<\frac{1}{2}\varepsilon$ لكل α ، لذلك $\overline{\rho}(x,y)\leq\frac{1}{2}\varepsilon$.

مثال ٦-٣٥. نعتبر القياس المتقطع (التافه) على المجموعة غير الخالية X، $x\in X$ و $A,B\subset X$. إذن

$$d(A,B)=\begin{cases}1 & \text{if } A\cap B=\phi\\ 0 & \text{if } A\cap B\neq\phi\end{cases} \text{ ، } d(x,A)=\begin{cases}1 & \text{if } x\notin A\\ 0 & \text{if } x\in A\end{cases}$$

النظرية التالية تكون نتيجة مباشر من التعريفات السابقة.

نظرية ٦-٣٦. نفرض أن A ، B مجموعتان جزئيتان غير خاليتان من المجموعة X و $x\in X$. إذن

(١) $d(x,A)$، $d(A,B)$ و $d(A)$ تكون أعداد حقيقية غير سالبة.

(٢) إذا كان $x\in A$ فإن $d(x,A)=0$.

(٣) إذا كان $A \cap B \neq \phi$ فإن $d(A,B)=0$.
(٤) إذا كان A منتهية، فإن $d(A)<\infty$، أي أنها تكون محددة.

تمارين ٦-١

١- نفرض أن d قياس على المجموعة غير الخالية X. برهن أن الدالة e المعرفة بالصورة $e(a,b)=\min(1,d(a,b))$، حيث $a,b \in X$ تكون أيضا قياس على X.

٢- نفرض أن d قياس على المجموعة غير الخالية X. برهن أن الدالة e المعرفة بالصورة $e(a,b)=\dfrac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$، حيث $a,b \in X$ تكون أيضا قياس على X.

٣- نفرض أن δ_1 و δ_2 عددان حقيقيان بحيث $0<\delta_1 \leq \delta_2$. بين أن الكرة المفتوحة $B(p,\delta_1)$ تكون مجموعة جزئية من الكرة المفتوحة $B(p,\delta_2)$.

٤- بين أنه إذا كان S و T كرتان مفتوحتان لهما نفس المركز فإن إحداهما تكون مجموعة جزئية من الأخرى.

٥- برهن أن إغلاق المجموعة A في فضاء القياس X يكون هو مجموعة كل النقاط التي تكون المسافة بينها وبين A تساوي صفر، أي أن $\overline{A}=\{x : d(x,A)=0\}$.

٦- نفرض أن d و e قياسان على المجموعة X بحيث لكل كرة B_d مفتوحة بالنسبة إلى d مركزها $p \in X$ توجد كرة B_e مفتوحة بالنسبة إلى e مركزها p بحيث يكون $B_e \subset B_d$.
برهن أن $\tau_d \subset \tau_e$، حيث τ_d هو التوبولوجي المولد بالقياس d و τ_e هو التوبولوجي المولد بالقياس e .

٧- نفرض أن d قياس على X، بين أنه لأي مجموعتين جزئيتين A و B من X يكون

(أ) $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + d(A, B)$ ،

(ب) $d(\overline{A}) = d(A)$.

٨- نفرض أن (A, d) فضاء قياس جزئي من (X, d)، بين أن (A, d) يكون أيضا فضاء توبولوجي جزئي من (X, d)، أي أن تقييد d على A يولد التوبولوجي النسبي على A.

٩- في فضاء القياس (X, ρ) برهن أن $b \in \overline{A} \Leftrightarrow \rho(b, A) = 0$ حيث $A \subset X$ و $b \in X$.