الباب الخامس
توبولوجي حاصل الضرب

The Product Topology

في هذا الباب نقدم طريقة أخرى لتكوين فضاءات توبولوجية جديدة من فضاءات معروفة. هذه الطريقة هي استخدام عدد من الفضاءات التوبولوجية المعروفة لتكوين فضاء توبولوجي جديد يسمى فضاء حاصل الضرب. سوف نقدم فضاء حاصل الضرب لعدد منتهي من الفضاءات التوبولوجية ولعدد لا نهائي من الفضاءات التوبولوجية.

٥-١ توبولوجي حاصل الضرب على $X \times Y$
Product Topology on $X \times Y$

إذا كان X و Y فضاءان توبولوجيان فإنه توجد طريقة طبيعية لتعريف توبولوجي على الضرب الكارتيزي $X \times Y$. الآن نعتبر هذا التوبولوجي وندرس بعض خواصه.

تعريف ٥-١. نفرض أن X و Y فضاءان توبولوجيان. **توبولوجي حاصل الضرب** على $X \times Y$ the product topology هو التوبولوجي الذي له الأساس التجمع $\mathscr{B}$ المكون من كل المجموعات على الصورة $U \times V$، حيث U مجموعة مفتوحة في X و V مجموعة مفتوحة في Y. $X \times Y$ مع توبولوجي حاصل الضرب يسمى **فضاء حاصل الضرب** product space.

الآن نتحقق من أن $\mathscr{B}$ يكون أساسا. الشرط الأول بديهي، حيث أن $X \times Y$ نفسها عنصر أساس. الشرط الثاني إلى حد ما بسيط، حيث أن تقاطع أي عنصري أساس $U_1 \times V_1$ و $U_2 \times V_2$ يكون عنصر أساس آخر. لأن

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

والمجموعة في الطرف الأيمن لهذه المعادلة تكون عنصر أساس لأن $U_1 \cap U_2$ تكون مجموعة مفتوحة في X و $V_1 \cap V_2$ تكون مجموعة مفتوحة في Y.

لاحظ أن التجمع $\mathscr{B}$ لا يكون توبولوجي علي $X \times Y$، حيث أن اتحاد عنصري أساس قد لا يكون عنصر أساس.

مثال ٥-٢. نفرض $X = \{a,b\}$، $Y = \{1,2\}$ ، $\tau = \{X,\phi,\{a\}\}$ و $\sigma = \{Y,\phi,\{2\}\}$. إذن $X \times Y = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$، $\tau \times \sigma = \{X \times Y,\{(a,2),(b,2)\},\{(a,1),(a,2)\},\{(a,2)\},\phi\}$. $\tau \times \sigma$ ليست توبولوجي على $X \times Y$ حيث أن

$$\{(a,1),(a,2)\},\{(a,2),(b,2)\} \in \tau \times \sigma$$

ولكن

$$\{(a,1),(a,2)\} \cup \{(a,2),(b,2)\} = \{(a,1),(a,2),(b,2)\} \notin \tau \times \sigma$$

في كل وقت نقدم فيه مفهوما جديدا، سوف نحاول ربط المفاهيم التي سبق تقديمها بالمفهوم الجديد. في حالتنا هنا نسأل: ماذا يمكن أن نقول إذا أعطي التوبولوجيان بدلالة أساسين لهما؟ الإجابة هي كما يلي:

نظرية ٥-٣. إذا كان $\mathscr{B}$ أساس للتوبولوجي على X و $\mathscr{C}$ أساس للتوبولوجي على Y، فإن التجمع

$$\mathscr{D} = \{B \times C : B \in \mathscr{B} \text{ and } C \in \mathscr{C}\}$$

يكون أساس للتوبولوجي على $X \times Y$.

البرهان: نطبق نظرية ٢-٢٠. نفرض أن W مجموعة مفتوحة في $X \times Y$ و $(x,y) \in W$. من تعريف توبولوجي حاصل الضرب، يوجد عنصر أساس $U \times V$ بحيث $(x,y) \in U \times V \subset W$. لأن $\mathscr{B}$ و $\mathscr{C}$ أساسان للتوبولوجيان على X و Y، على الترتيب، يمكننا اختيار عنصر B من $\mathscr{B}$ وعنصر C من $\mathscr{C}$ بحيث $x \in B \subset U$ و $y \in C \subset V$. إذن $(x,y) \in B \times C \subset W$. لذلك التجمع $\mathscr{D}$ يحقق الشروط في نظرية ٢-٢٠ ومن ثم $\mathscr{D}$ يكون أساس للتوبولوجي على $X \times Y$.

مثال ٥-٤. سبق أن تعرضنا للتوبولوجي الإقليدي على $\mathbb{R}$ وهو التوبولوجي الذي أساسه مجموعة الفترات المفتوحة على خط الأعداد. حاصل ضرب هذا التوبولوجي مع نفسه يسمى بالتوبولوجي القياسي أو التوبولوجي الاقليدي على $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. أساس هذا التوبولوجي هو

تجمع كل حواصل ضرب المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ ، ولكن النظرية التي أثبتناها أعلى تخبرنا بأن تجمع أصغر كثيرا وهو تجمع كل حواصل الضرب $(a,b)\times(c,d)$ للفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$ أيضا يكون أساسا لهذا التوبولوجي.

أحيانا يكون من المفيد التعبير عن توبولوجي حاصل الضرب باستخدام أساس جزئي. لكي نفعل ذلك، نعرف أولا دوال تسمى بالمساقط.

تعريف ٥-٥. نفرض أن $\pi_1 : X \times Y \to X$ يعرف بالمعادلة

$$\pi_1(x, y) = x$$

ونفرض أن $\pi_2 : X \times Y \to Y$ يعرف بالمعادلة

$$\pi_2(x, y) = y$$

الراسمان π_1 و π_2 يقال أنهما **رواسم إسقاط** projections على العامل الأول والعامل الثاني، على الترتيب. هذان الراسمان يكونا فوقيان.

إذا كانت U مجموعة مفتوحة في X ، فإن المجموعة $\pi_1^{-1}(U)$ تكون تحديدا هي $U \times Y$ ، وهي مجموعة مفتوحة في $X \times Y$. بالمثل إذا كانت V مجموعة مفتوحة في Y، فإن $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ وهي أيضا مجموعة مفتوحة في $X \times Y$. تقاطع هاتان المجموعتان هو المجموعة $U \times V$. حيث

$$(X \times V) \cap (U \times Y) = (X \cap U) \times (V \cap Y) = U \times V$$

نظرية ٥-٦. التجمع

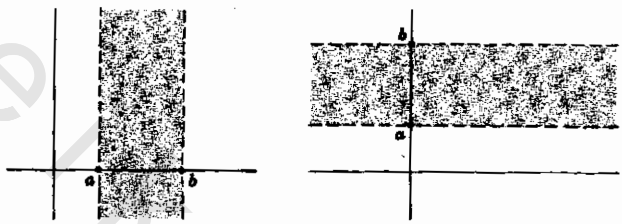
$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \text{ open in } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \text{ open in } Y\}$$

يكون أساس جزئي لتوبولوجي حاصل الضرب على $X \times Y$.

البرهان: نفرض أن τ ترمز إلى توبولوجي حاصل الضرب على $X \times Y$، نفرض τ' هو التوبولوجي المولد بواسطة $\mathcal{S}$ كأساس جزئي. حيث أن كل عنصر من $\mathcal{S}$ ينتمي إلى τ ، كذلك يكون الاتحاد الاختياري للتقاطعات المنتهية لعناصر $\mathcal{S}$. لذلك $\tau' \subset \tau$. من الناحية الأخرى، كل عنصر أساس $U \times V$ للتوبولوجي τ يكون تقاطع

منتهي لعناصر من $\mathcal{S}$ ، حيث $U\times V=\pi_1^{-1}(U)\cap\pi_2^{-1}(V)$. لذلك، $U\times V$ ينتمي إلى τ' ومن ثم يكون $\tau\subset\tau'$.

مثال ٥-٧. نعتبر المستوي الكارتيزي $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. نذكر أن الصور العكسية $\pi_1^{-1}(a,b)$ و $\pi_2^{-1}(a,b)$ هي الشرائح الانهائية المفتوحة التي تكون أساس جزئي للتوبولوجي الاقليدي على $\mathbb{R}^2$.



$\pi_1^{-1}(a,b)$		$\pi_2^{-1}(a,b)$

مثال ٥-٨. نعتبر التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ على $X=\{a,b,c\}$ والتوبولوجي $\tau^*=\{Y,\phi,\{u\}\}$ على $Y=\{u,v\}$.

(أ) حدد الأساس الجزئي $\mathcal{S}$ المعرف لتوبولوجي الضرب على $X\times Y$.

(ب) حدد الأساس المعرف $\mathcal{B}$ لتوبولوجي حاصل الضرب على $X\times Y$.

الحل: لاحظ أن

$$X\times Y=\{(a,u),(a,v),(b,u),(b,v),(c,u),(c,v)\}$$

هي مجموعة حاصل الضرب التي عليها يعرف توبولوجي حاصل الضرب.

(أ) الأساس الجزئي المعرف $\mathcal{S}$ هو تجمع المجموعات العكسية $\pi_x^{-1}(G)$ و $\pi_y^{-1}(H)$ حيث G مجموعة جزئية مفتوحة في X و H مجموعة جزئية مفتوحة في Y. بالحساب نحصل على

$$\pi_x^{-1}(X)=\pi_y^{-1}(Y)=X\times Y$$

$$\pi_x^{-1}(\phi)=\pi_y^{-1}(\phi)=\phi$$

$$\pi_x^{-1}(\{a\})=\{(a,u),(a,v)\}$$

$$\pi_x^{-1}(\{b,c\})=\{(b,u),(b,v),(c,u),(c,v)\}$$

$$\pi_y^{-1}(\{u\}) = \{(a,u),(b,u),(c,u)\}$$

لذلك الأساس المعرف $\mathcal{S}$ يتكون من المجموعات الجزئية من $X \times Y$ أعلى.

(ب) الأساس المعرف $\mathcal{B}$ هو التقاطعات المنتهية لعناصر الأساس الجزئي $\mathcal{S}$

$$\mathcal{B} = \{X \times Y, \phi, \{(a,u)\}, \{(b,u),(c,u)\}, \{(a,u),(a,v)\}, \{(b,u),(b,v),(c,u),(c,v)\}, \{(a,u),(b,u),(c,u)\}\}$$

ملاحظة ٥-٩. لاحظ أنه إذا كان لدينا فضاءان توبولوجيان (X, τ) و (Y, σ) ومجموعتان جزئيتان $A \subset X$ و $B \subset Y$، فإنه توجد طريقتان طبيعيتان لتكوين توبولوجي على $A \times B$. أولا يمكننا أن نأخذ توبولوجيات الفضاءات الجزئية على A و B المكونة من التوبولوجيات على X و Y، على الترتيب، ونكون توبولوجي حاصل الضرب على $A \times B$. أو يمكننا اعتبار $A \times B$ كمجموعة جزئية من $X \times Y$ ونكون توبولوجي الفضاء الجزئي على $A \times B$ المكون من التوبولوجي على $X \times Y$. السبيل للخروج من هذه الإشكالية هو أن التوبولوجيان على $A \times B$ الناتجان يكونا هما نفس الشيء.

يمكن بيان ذلك كما يلي: نرمز للتوبولوجي على $A \times B$ الذي تم تكوينه بأخذ الفضاءات الجزئية أولا ثم نكون توبولوجي حاصل الضرب بالرمز τ_1، والتوبولوجي الذي نحصل عليه بتكوين توبولوجي حاصل الضرب على $X \times Y$ أولا ثم نكون توبولوجي الفضاء الجزئي على $A \times B$ بالرمز τ_2. الآن سوف نبين أن التجمع

$$\mathcal{U} = \{(U \cap A) \times (V \cap B) : U \in \tau, V \in \sigma\}$$

يكون أساسا لكلا التوبولوجيين τ_1 و τ_2 ومن ثم $\tau_1 = \tau_2$.

نفرض $U \subset X$ و $V \subset Y$ مجموعتان مفتوحتان. حيث أن المجموعات على الصورة $U \times V$ تكون أساس لتوبولوجي على $X \times Y$، المجموعات على الصورة $(U \times V) \cap (A \times B)$ سوف تزودنا بأساس لتوبولوجي الفضاء الجزئي على $A \times B$ الناتج من التوبولوجي على $X \times Y$. ومع ذلك

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$$

وهو ما يبرهن أن $\mathscr{U}$ يكون أساس لـ τ_1. من جهة أخري

$$\{V \cap B : V \in \sigma\} \text{ و } \{U \cap A : U \in \tau\}$$

يكونا أساسين لـ τ_A و σ_B ، على الترتيب. وحيث أن حاصل ضرب أساسات يكون أساس لتوبولوجي حاصل الضرب، فإن $\mathscr{U}$ يكون أساس لـ τ_2.

٥-٢ توبولوجي حاصل الضرب The Product Topology

في القسم السابق، عرفنا توبولوجي حاصل الضرب على $X \times Y$ لحاصل ضرب فضاءين توبولوجيين. فيما يلي سوف نعمم هذا التعريف لحواصل ضرب أعم. لذلك نعتبر حاصلي الضرب الكارتيزي

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \quad \text{و} \quad X_1 \times \ldots \times X_n$$

حيث X_i فضاء توبولوجي. توجد طريقتان ممكنتان للعمل. الطريقة الأولى أن نأخذ كأساس كل المجموعات على الصورة $U_1 \times \ldots \times U_n$ في الحالة الأولى وعلى الصورة $U_1 \times U_2 \times \ldots$ في الحالة الثانية، حيث U_i تكون مجموعة مفتوحة في X_i لكل i. هذه العملية تعرف توبولوجي على الضرب الكارتيزي، يسمى توبولوجي الصندوق.

طريقة أخرى يمكن أن تباشر وهي تعميم صياغة الأساس الجزئي في التعريف المعطى في نظرية ٥-٦ في هذه الحالة، نأخذ كأساس جزئي كل المجموعات على الصورة $\pi_i^{-1}(U_i)$، حيث i أي دليل و U_i تكون مجموعة مفتوحة في X_i. سوف نسمي هذا التوبولوجي توبولوجي حاصل الضرب.

كيف يختلف هذان التوبولوجيان؟ نعتبر عنصر أساس نموذجي B للتوبولوجي الثاني. هذا العنصر يكون تقاطع لعدد منتهي من عناصر أساس جزئي، لتكن $\pi_i^{-1}(U_i)$ حيث $i = i_1, \ldots, i_k$. إذن النقطة x تنتمي إلى B إذا وفقط إذا كان $\pi_i(x)$ تنتمي إلى U_i حيث $i = i_1, \ldots, i_k$؛ لا توجد أية قيود على $\pi_i(x)$ لقيم i الأخرى.

من ذلك ينتج أن التوبولوجيان يكونا متفقان للضرب الكارتيزي المنتهي ومختلفان للضرب اللانهائي. ما هو غير واضح لماذا يبدو أننا نفضل التوبولوجي الثاني. هذا السؤال هو الذي سوف نجيب عليه فيما يلي.

في البداية سوف نقدم بعض المصطلحات والرموز حول الضرب الكارتيزي. فيما سبق قدمنا تعريف الضرب الكارتيزي لعائلة مرقمة من المجموعات فقط في حالة كون مجموعة الترقيم هي $\{1,...,n\}$ أو $\mathbb{Z}^+$. الآن نعتبر الحالة حيث مجموعة الترقيم اختيارية تامة.

تعريف ٥-١٠. نفرض أن J مجموعة ترقيم و X مجموعة، نعرف **أمبوب-J** J-tuple من عناصر X على أنه الدالة $x:J\to X$. إذا كانت α عنصر في J، فإننا غالبا نرمز لقيمة x عند α بالرمز x_α بدلا من $x(\alpha)$، ونسميه **الإحداثي رقم** α لـ x α-th coordinate. وغالبا نرمز للدالة x نفسها بالرمز $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$. سوف نرمز لمجموعة كل أمبوب-J من عناصر X بالرمز X^J.

تعريف ٥-١١. نفرض أن $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ عائلة مرقمة من المجموعات؛ نفرض $X=\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$. الضرب الكارتيزي لهذه المجموعة المرقمة، يرمز له بالرمز

$$\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$$

يعرف على أنه مجموعة كل أمبوب-J $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$من عناصر X بحيث $x_\alpha\in A_\alpha$ لكل $\alpha\in J$. أي أنها مجموعة كل الدوال

$$x:J\to\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$$

بحيث أن $x(\alpha)\in A_\alpha$ لكل $\alpha\in J$.

للمناسبة، نرمز للضرب ببساطة بالرمز $\prod A_\alpha$، وعنصره العام بالرمز (x_α)، إذا كانت مجموعة الترقيم واضحة.

إذا كانت كل المجموعات A_α تساوي مجموعة واحدة X، فإن الضرب الكارتيزي $\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$ يكون هو تماما المجموعة X^J المكونة

من كل أمبوب-J من عناصر X. أحيانا نستخدم رمز الأمبوب لعناصر X^J وأحيانا نستخدم الرمز الدالي، اعتمادا على أيها أنسب.

تعريف ٥-١٢. نفرض أن $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ مجموعة مرقمة من الفضاءات التوبولوجية. لنأخذ كأساس للتوبولوجي على فضاء حاصل الضرب $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ تجمع كل المجموعات على الصورة $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$، حيث U_α تكون مفتوحة في X_α ، لكل $\alpha\in J$. التوبولوجي المولد بهذا الأساس يسمى **توبولوجي الصندوق** the box topology.

التجمع يحقق الشرط الأول من شروط الأساس، لأن $\prod X_\alpha$ نفسها عنصر أساس؛ ويحقق الشرط الثاني لأن تقاطع أي عنصري أساس يكون عنصر أساس آخر

$$(\prod_{\alpha\in J} U_\alpha)\bigcap(\prod_{\alpha\in J} V_\alpha)=\prod_{\alpha\in J}(U_\alpha\bigcap V_\alpha)$$

الآن نعمم صياغة الأساس الجزئي للتعريف. نفرض أن

$$\pi_\beta:\prod_{\alpha\in J} X_\alpha\to X_\beta$$

هي الدالة التي تعين لكل عنصر في فضاء الضرب مركبته رقم β،

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in J})=x_\beta$$

هذه الدالة تسمى **راسم الإسقاط** projection mapping المناظر للدليل β.

تعريف ٥-١٣. نفرض أن S_β ترمز إلى التجمع

$$S_\beta=\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta)\ :\ \text{تكون مفتوحة في } X_\beta \ \ U_\beta\}$$

ونفرض أن $\mathcal{S}$ هي اتحاد كل هذه التجمعات

$$\mathcal{S}=\bigcup_{\beta\in J} S_\beta$$

التوبولوجي المولد بالأساس الجزئي $\mathcal{S}$ يسمى **توبولوجي حاصل الضرب** the product topology. في هذا التوبولوجي $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ يسمى **فضاء حاصل الضرب** product space.

لكي نقارن هذه التوبولوجيات، نعتبر الأساس $\mathcal{B}$ المولد بالأساس الجزئي $\mathcal{S}$. التجمع $\mathcal{B}$ يتكون من كل التقاطعات المنتهية من عناصر

$\mathcal{S}$. إذا قاطعنا العناصر التي تنتمي إلى نفس المجموعة من المجموعات S_β ، فلن نحصل على شيء جديد، لأن

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta)\cap\pi_\beta^{-1}(V_\beta)=\pi_\beta^{-1}(U_\beta\cap V_\beta)$$

تقاطع عنصرين في S_β، أو عدد منتهي من مثل هذه العناصر، يكون أيضا عنصر في S_β. لذلك العنصر النموذجي للأساس $\mathcal{B}$ يمكن وصفه كما يلي: نفرض $\beta_1,\dots,\beta_n$ مجموعة منتهية من أدلة مختلفة من مجموعة الترقيم J، ونفرض U_{β_i} مجموعة مفتوحة في X_{β_i} لكل $i=1,\dots,n$. إذن

$$B=\pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1})\cap\pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2})\cap\ldots\cap\pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$$

هو العنصر النموذجي في $\mathcal{B}$.

الآن النقطة $x=(x_\alpha)$ تكون في B إذا وفقط إذا كان مركبتها رقم β_1 تقع في U_{β_1} و مركبتها رقم β_2 تقع في U_{β_2}، وهكذا. ليست هناك أي قيود على مركبة x رقم α إذا لم تكن α واحدة من الأدلة $\beta_1,\dots,\beta_n$. كنتيجة، يمكننا كتابة B على صورة حاصل الضرب

$$B=\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$$

حيث U_α ترمز إلى كل الفضاء X_α إذا كانت $\alpha\neq\beta_1,\dots,\beta_n$.

كل ذلك يلخص في النظرية التالية:

نظرية ٥-١٤. (مقارنة لتوبولوجي الصندوق وتوبولوجي حاصل الضرب) توبولوجي الصندوق على $\prod X_\alpha$ يكون له أساس كل المجموعات على الصورة $\prod U_\alpha$، حيث U_α تكون مجموعة مفتوحة في X_α لكل α. توبولوجي حاصل الضرب على $\prod X_\alpha$ يكون له أساس كل المجموعات على الصورة $\prod U_\alpha$، حيث U_α تكون مجموعة مفتوحة في X_α لكل α و U_α تساوي X_α ماعدا عدد منتهي من قيم α.

شيئان ينتجان بوضوح. الأول، لحاصل الضرب المنتهي $\prod_{\alpha=1}^{n} X_\alpha$ التوبولوجيان يكونا تماما نفس الشيء. الثاني، توبولوجي الصندوق على وجه العموم يكون أدق من توبولوجي حاصل الضرب.

الشيء غير الواضح هو لماذا نفضل توبولوجي حاصل الضرب عن توبولوجي الصندوق. الإجابة سوف تتضح عندما نواصل دراستنا للتوبولوجي. سوف نجد أن عدد من النظريات الهامة عن حاصل الضرب المنتهي أيضا سوف تكون محققة لحاصل ضرب اختياري إذا استخدمنا توبولوجي حاصل الضرب، ولكن لا تكون محققة إذا استخدمنا توبولوجي الصندوق. كنتيجة، توبولوجي حاصل الضرب يكون هام جدا في الرياضيات. توبولوجي الصندوق ليس مهما بنفس الدرجة. لذلك عندما نعتبر حاصل الضرب $\prod X_\alpha$، فإننا سوف نفترض أنه معطى توبولوجي حاصل الضرب ما لم نعين حالة مختلفة.

بعض النظريات التي برهنت لحاصل الضرب $X \times Y$ تتحقق لحاصل الضرب $\prod X_\alpha$ بغض النظر عن التوبولوجي المستخدم. سوف نسرد بعض هذه النظريات والتي معظم براهينها تترك كتمارين.

نظرية ٥-١٥. نفرض أن التوبولوجي على كل فضاء X_α معطى بالأساس $\mathscr{B}_\alpha$. إذن تجمع كل المجموعات على الصورة

$$\prod_{\alpha\in J} B_\alpha$$

حيث $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ لكل α، سوف يخدم كأساس لتوبولوجي الصندوق على $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.

تجمع كل المجموعات على نفس الصورة، حيث $B_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ لعدد منتهي من الأدلة α و $B_\alpha = X_\alpha$ لكل الأدلة الأخرى، سوف يخدم كأساس لتوبولوجي حاصل الضرب على $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.

مثال ٥-١٦. نعتبر الفضاء الاقليدي النوني $\mathbb{R}^n$. أساس $\mathbb{R}$ يتكون من كل الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$؛ لذلك أساس للتوبولوجي على $\mathbb{R}^n$ يتكون من كل حواصل الضرب على الصورة

$$(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_n,b_n)$$

حيث أن $\mathbb{R}^n$ حاصل ضرب منتهي، توبولوجي الصندوق وتوبولوجي حاصل الضرب يتفقان. أينما اعتبرنا $\mathbb{R}^n$، سوف نفترض أنه معطى هذا التوبولوجي ما لم نخصص خلاف ذلك.

نظرية ٥-١٧. نفرض أن A_α فضاء جزئي من X_α، لكل $\alpha \in J$. إذن $\prod A_\alpha$ يكون فضاء جزئي من $\prod X_\alpha$ إذا أعطي كلا الضربين توبولوجي حاصل الضرب أو أعطي كلا الضربين توبولوجي الصندوق.

نظرية ٥-١٨. إذا كان كل فضاء X_α فضاء هاوسدورف، فإن $\prod X_\alpha$ يكون فضاء هاوسدورف في كلا من توبولوجي حاصل الضرب وتوبولوجي الصندوق.

نظرية ٥-١٩. نفرض أن $f : A \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ معطى بالمعادلة

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha\in J}$$

حيث $f_\alpha : A \to X_\alpha$ لكل α. نفرض أن $\prod X_\alpha$ معطى توبولوجي حاصل الضرب. إذن الدالة f تكون متصلة إذا وفقط إذا كان f_α متصلة لكل α.

البرهان: نفرض أن π_β هو المسقط لحاصل الضرب على المعامل رقم β. الدالة π_β تكون متصلة، حيث إذا كان U_β مفتوحة في X_β، فإن $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ يكون عنصر أساس لتوبولوجي حاصل الضرب على $\prod X_\alpha$. الآن نفرض أن $f : A \to \prod X_\alpha$ متصلة. الدالة f_β تساوي التحصيل $\pi_\beta \circ f$، ولكونها تحصيل دالتين متصلتين فإنها تكون متصلة.

الاتجاه العكسي، نفرض أن كل دالة إحداثي f_α تكون متصلة. لإثبات أن f تكون متصلة، يكفي إثبات أن الصورة العكسية تحت تأثير f لكل عنصر أساس جزئي يكون مفتوح في A. عناصر الأساس الجزئي لتوبولوجي حاصل الضرب على $\prod X_\alpha$ تكون على الصورة $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$، حيث β دليل ما و U_β مفتوحة في X_β. الآن

$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta^{-1}(U_\beta)$$

لأن $f_\beta = \pi_\beta \circ f$. حيث أن f_β متصلة، هذه المجموعة تكون مفتوحة في A، كما هو مطلوب.

لماذا تفشل هذه النظرية إذا استخدمنا توبولوجي الصندوق؟

مثال ٥-٢٠. نعتبر $\mathbb{R}^\omega$ حاصل ضرب عدد لانهائي قابل للعد صورة من $\mathbb{R}$. تذكر أن

$$\mathbb{R}^\omega = \prod_{n\in\mathbb{Z}^+} X_n$$

حيث $X_n = \mathbb{R}$ لكل n. نعرف الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^\omega$ بالمعادلة

$$f(t) = (t,t,t,\ldots)$$

دالة الإحداثي رقم n للدالة f تكون الدالة $f_n(t)=t$. كل من دوال الإحداثي $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تكون متصلة، لذلك الدالة f تكون متصلة إذا كانت $\mathbb{R}^\omega$ معطاة توبولوجي حاصل الضرب. ولكن f لا تكون متصلة إذا كانت $\mathbb{R}^\omega$ معطاة توبولوجي الصندوق. نعتبر، على سبيل المثال، عنصر الأساس

$$B = (-1,1)\times(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\times(-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})\times\ldots$$

لتوبولوجي الصندوق. نقرر أن $f^{-1}(B)$ ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$. حيث إذا كانت $f^{-1}(B)$ مفتوحة في $\mathbb{R}$، سوف تحتوي فترة ما $(-\delta,\delta)$ حول 0. هذا سوف يعني أن $f((-\delta,\delta))\subset B$، لذلك بتطبيق π_n على طرفي الاحتواء،

$$f_n((-\delta,\delta)) = (-\delta,\delta) \subset (-1/n, 1/n)$$

لكل n، وهذا تناقض.

نظرية ٥-٢١. الدالة $f:Y\to X$ من الفضاء التوبولوجي Y إلى فضاء الضرب $X=\prod_i X_i$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كان، لكل راسم إسقاط $\pi_i: X\to X_i$، التحصيل $\pi_i\circ f: Y\to X_i$ يكون متصل.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi_i \circ f"'] & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

البرهان: من تعريف فضاء الضرب، كل المساقط تكون متصلة. لذلك إذا كانت f متصلة، فإن تحصيل كالتين متصلتين $\pi_i \circ f$ يكون دالة متصلة.

من جهة أخرى، نفرض أن كل تحصيل $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ يكون دالة متصلة. نفرض أن G مجموعة جزئية مفتوحة في X_i. إذن، من اتصال $\pi_i \circ f$

$$(\pi_i \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(G))$$

تكون مجموعة مفتوحة في Y. ولكن فصل المجموعات على الصورة

$\pi_i^{-1}(G)$ حيث G مجموعة مفتوحة في X_i

هي الأساس الجزئي المعرف لتوبولوجي الضرب على X. حيث أن معكوساتها تكون مجموعات مفتوحة في Y تحت تأثير f، فإن f تكون دالة متصلة.

نظرية ٥-٢٢. نفرض أن F_i مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء التوبولوجي (X_i, τ_i) لكل $i = 1,2,\dots,n$. إذن $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ تكون مجموعة جزئية مغلقة في فضاء حاصل الضرب $(\prod_{i=1}^n X_i, \tau)$.

البرهان: لاحظ أن

$$\begin{aligned}(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \setminus (F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n) = \\ [(X_1 \setminus F_1) \times X_2 \times \dots \times X_n] \cup [X_1 \times (X_2 \setminus F_2) \times \dots \times X_n] \cup \\ \dots \cup [X_1 \times X_2 \times \dots \times (X_n \setminus F_n)]\end{aligned}$$

وهذه اتحاد مجموعات مفتوحة (لأنها حاصل ضرب مجموعات مفتوحة) ومن ثم تكون مجموعة مفتوحة في $(\prod_{i=1}^n X_i, \tau)$. لذلك المكملة $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ تكون مجموعة مغلقة.

نظريــة ٥-٢٣. نفـرض أن $\{X_\alpha\}$ عائلـة مرقمـة مـن الفـضاءات التوبولوجيـة، و نفـرض أن $A_\alpha \subset X_\alpha$ لكـل α. إذا كـان $\prod X_\alpha$ معرف عليه توبولوجي حاصل الضرب أو توبولوجي الصندوق فإن

$$\prod \overline{A_\alpha} = \overline{\prod A_\alpha}$$

البرهـان: نفرض أن $x = (x_\alpha)$ نقطـة فـي $\prod \overline{A_\alpha}$، سـوف نبين أن $x \in \overline{\prod A_\alpha}$. نفرض أن $U = \prod U_\alpha$ عنصر أساس إما لتوبولـوجي حاصـل الـضرب أو توبولـوجي الـصندوق يحتـوي x. حيـث أن $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$ ، يمكننـا اختيـار نقطـة $y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$ لكـل α . إذن $y = (y_\alpha)$ تنتمي إلى كل من U و $\prod A_\alpha$. حيث أن U اختياريـة، ينتج أن x تنتمي إلى إغلاق $\prod A_\alpha$.

فـي الاتجـاه العكسي، نفرض أن $x = (x_\alpha)$ نقطـة تقع فـي إغـلاق $\prod A_\alpha$ فــي أي مــن التوبولــوجيين. ســوف نبــين أنــه لأي دليـل β $x_\beta \in \overline{A_\beta}$. نفـرض أن V_β مجموعـة مفتوحـة اختياريـة فـي X_β تحتوي x_β . حيث أن $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ تكون مفتوحة في $\prod X_\alpha$ في أي من التوبولـوجيين، فإنهـا تحتـوي نقطـة $y = (y_\alpha)$ مـن $\prod A_\alpha$. إذن y_β تنتمي إلى $V_\beta \cap A_\beta$ ومن ثم $x_\beta \in \overline{A_\beta}$.

تمارين ٥-١

١- نفرض أن (X_1,τ_1) ،...، (X_n,τ_n) فضاءات متقطعة. برهن أن فضاء الضرب $(X_1,\tau_1)\times\ldots\times(X_n,\tau_n)$ يكون أيضا فضاء متقطع.

٢- نفرض أن X_1 و X_2 مجموعتان لا نهائيتان و τ_1 و τ_2 توبولوجيان المكملات المنتهية على X_1 و X_2 على الترتيب. برهن أن توبولوجي الضرب τ على $X_1\times X_2$ ليس توبولوجي المكملات المنتهية.

٣- برهن أن فضاء الضرب لأي عدد منتهي من الفضاءات غير المتقطعة يكون فضاء غير متقطع.

٤- برهن أن فضاء الضرب لعدد منتهي من فضاءات هاوسدورف يكون فضاء هاوسدورف.

٥- بين أنه إذا كانت A مجموعة مغلقة في X و B مجموعة مغلقة في Y فإن $A\times B$ تكون مغلقة في $X\times Y$.