الباب الرابع
الدوال المتصلة
Continuous Functions

في معظم فروع الرياضيات، ندرس فيما يعرف في نظرية الفصائل category theory بـ "الأشياء" objects و"الناقلات" arraws. في الجبر الخطي الأشياء هي الفضاءات الاتجاهية والناقلات هي التحويلات الخطية. في نظرية الزمر الأشياء هي الزمر والناقلات هي تشاكلات الزمر. بينما في نظرية المجموعات الأشياء هي المجموعات والناقلات هي الرواسم. في التوبولوجي الأشياء هي الفضاءات التوبولوجية والناقلات هي الدوال المتصلة. في هذا الباب نقدم مفهوم الدوال المتصلة حيث نقدم تعريف الدوال المتصلة بين الفضاءات التوبولوجية كما نقدم طرق تكوين الدوال المتصلة وبعض الخواص المكافئة للاتصال. أيضا نقدم مفهوم التشاكل التوبولوجي والخواص التوبولوجية.

٤ـ١ اتصال الدوال Continuity of functions

مفهوم اتصال الدوال هو من المفاهيم الأساسية لمعظم الرياضيات. الدوال المتصلة على الخط الحقيقي تظهر في مقدمة أي كتاب في التفاضل والتحليل واتصال الدوال في المستوى والفراغ تأتي بعد ذلك ليس ببعيد. أنواع أكثر عمومية من الاتصال تظهر كلما تعمقنا أكثر في الرياضيات. في هذا الفصل صوف نصوغ تعريفا للاتصال يشمل كل هذه كحالات خاصة وسوف ندرس الخواص المختلفة للدوال المتصلة. العديد من هذه الخواص هو تعميم مباشر للأشياء التي درست عن الدوال المتصلة في التفاضل والتحليل.

نعلم من دراستنا في حساب التفاضل أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تكون متصلة إذا كان لكل $a\in\mathbb{R}$ ولكل عدد حقيقي موجب ε، يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث إذا كان $|x-a|<\delta$ فإن $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

هذا التعريف للاتصال، يسمى تعريف $\varepsilon-\delta$ للاتصال، ليس من الواضح كيفية تعميمه إلى الفضاءات التوبولوجية، حيث أنه في

التوبولوجي ليس معروفا لنا مفهوم المقياس أو مفهوم الطرح. لذلك ينبغي البحث عن تعريف مكافئ للاتصال يقبل التعميم.

من السهل بيان أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تكون متصلة إذا كان لكل $a\in\mathbb{R}$ ولكل فترة $(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$، حيث $\varepsilon>0$، يوجد $\delta>0$ بحيث $f(x)\in(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$ لكل $x\in(a-\delta,a+\delta)$.

هذا التعريف هو تحسين لسابقة حيث أنه لا يحتوي على مفهوم المقياس، ولكنه يظل يحتوي على مفهوم الطرح . التمهيدية التالية توضح لنا كيفية التخلص من الطرح.

تمهيدية ٤-١. الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كان لكل $a\in\mathbb{R}$ وكل مجموعة مفتوحة U تحتوي $f(a)$ توجد مجموعة مفتوحة V تحتوي a بحيث $f(V)\subset U$.

البرهان: نفرض أن f تكون متصلة، $a\in\mathbb{R}$ و U تحتوي $f(a)$. إذن يوجد عددين حقيقيين c و d بحيث $f(a)\in(c,d)\subset U$. نضع ε تساوي أصغر العددين $d-f(a)$ و $f(a)-c$. لذلك

$$(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)\subset U$$

حيث أن f متصلة، توجد $\delta>0$ بحيث يكون $f(x)\in(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$ لكل $x\in(a-\delta,a+\delta)$. نفرض أن V هي المجموعة المفتوحة $(a-\delta,a+\delta)$. إذن $a\in V$ و $f(V)\subset U$.

من جهة أخرى نفرض أنه لكل $a\in\mathbb{R}$ وكل مجموعة مفتوحة U تحتوي $f(a)$ توجد مجموعة مفتوحة V تحتوي a بحيث $f(V)\subset U$. الآن نبين أن f تكون متصلة. نفرض $a\in\mathbb{R}$ و ε أي عدد حقيقي موجب. نضع $U=(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon)$. لذلك U تكون مجموعة مفتوحة تحتوي $f(a)$. لذلك توجد مجموعة مفتوحة V تحتوي a بحيث $f(V)\subset U$. حيث أن V مجموعة مفتوحة تحتوي a، يوجد عددان حقيقيان c و d بحيث $a\in(c,d)\subset V$. نضع δ أصغر العددين $d-a$ و $a-c$. لذلك $(a-\delta,a+\delta)\subset V$. إذن

لكل $x \in (a-\delta, a+\delta)$، $f(x) \in f(V) \subset U$ ومن ثم f تكون متصلة.

يمكننا استخدام الخاصية الواردة في تمهيدية ٤-١ لتعريف الاتصال، ومع ذلك التمهيدية التالية تسمح لنا بإعطاء تعريف أكثر جمالا.

تمهيدية ٤-٢. نفرض أن f دالة من الفضاء التوبولوجي (X, τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y, σ). إذن الشرطان التاليان يكونا متكافئين:

(١) لكل $U \in \sigma$، $f^{-1}(U) \in \tau$.

(٢) لكل $x \in X$ ولكل $U \in \sigma$ بحيث $f(x) \in U$، يوجد $V \in \tau$ بحيث $x \in V$ و $f(V) \subset U$.

البرهان: (١) $\Leftarrow$ (٢): نفرض $x \in X$ و $U \in \sigma$ بحيث $f(x) \in U$. إذن $f^{-1}(U) \in \tau$. نضع $V = f^{-1}(U)$. إذن $x \in V$، $V \in \tau$ و $f(V) \subset U$.

(٢) $\Leftarrow$ (١): نفرض $U \in \sigma$. إذا كان $f^{-1}(U) = \phi$ فإن $f^{-1}(U) \in \tau$. إذا كان $f^{-1}(U) \neq \phi$، نفرض $x \in f^{-1}(U)$. إذن $f(x) \in U$. لذلك يوجد $V \in \tau$ بحيث $x \in V$ و $f(V) \subset U$. وبالتالي لكل $x \in f^{-1}(U)$ يوجد $V \in \tau$ بحيث $x \in V \subset f^{-1}(U)$ ومن ثم $f^{-1}(U) \in \tau$.

تعريف ٤-٣. نفرض أن (X, τ) و (Y, σ) فضاءان توبولوجيان. الدالة $f : X \to Y$ يقال أنها **متصلة** continuous إذا كانت $f^{-1}(V)$ مجموعة مفتوحة في X لكل مجموعة V مفتوحة في Y، أي أن

$$V \in \sigma \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau$$

اتصال دالة يعتمد ليس فقط على الدالة f نفسها، ولكن أيضا على التوبولوجيات المعينة على النطاق والمدى. وإذا أردنا تأكيد هذه الحقيقة، فإنه يمكننا أن نقول أن f متصلة بالنسبة للتوبولوجيات المعينة على X و Y، أو نكتب $\tau\sigma -$ continuous.

من الملاحظات السابقة نجد أن تعريف الاتصال ينطبق مع التعريف العادي عندما $(X,\tau)=(Y,\sigma)=\mathbb{R}$.

الآن لنفرض أن التوبولوجي على المدى Y معطى بأساس $\mathcal{B}$ ، فإنه لإثبات اتصال f يكفي بيان أن الصورة العكسية لكل عنصر أساس تكون مفتوحة في X. أي مجموعة مفتوحة في Y يمكن كتابتها كاتحاد عدد اختياري من عناصر الأساس

$$V=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$$

ومن ثم

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$$

لذلك $f^{-1}(V)$ تكون مفتوحة إذا كان كل مجموعة $f^{-1}(B_\alpha)$ مفتوحة.

إذا كان التوبولوجي على Y معطى بأساس جزئي $\mathcal{S}$، فإنه لإثبات اتصال f يكفي بيان أن الصورة العكسية لكل عنصر أساس جزئي تكون مفتوحة. عنصر الأساس الاختياري B للتوبولوجي على Y يمكن كتابته كتقاطع $S_1\cap\ldots\cap S_n$ لعدد منتهي من عناصر الأساس الجزئي، من ذلك ينتج أن الصورة العكسية لعنصر الأساس

$$f^{-1}(B)=f^{-1}(S_1)\cap\ldots\cap f^{-1}(S_n)$$

تكون مجموعة مفتوحة.

مثال ٤ـ٤. نفرض أن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مع التوبولوجي القياسي و $\mathbb{R}_l$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية مع توبولوجي النهاية السفلى. نفرض

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_l$$

هي دالة الوحدة، $f(x)=x$ لكل عدد حقيقي x. f ليست متصلة، حيث أن الصورة العكسية للمجموعة $[a,b)$ المفتوحة في $\mathbb{R}_l$ تساوي نفسها، وهي ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$. من جهة أخرى، دالة الوحدة

$$g:\mathbb{R}_l\to\mathbb{R}$$

تكون متصلة لأن الصورة العكسية للمجموعة (a,b) المفتوحة في $\mathbb{R}$ تكون هي نفسها وهي مفتوحة في $\mathbb{R}_l$.

مثال ٤-٥. نعتبر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالصورة $f(x)=x$ لكل $x\in\mathbb{R}$ ، أي راسم الوحدة. إذن لأي مجموعة مفتوحة U في $\mathbb{R}$، $f^{-1}(U)=U$ ومن ثم تكون مفتوحة. إذن f تكون متصلة.

مثال ٤-٦. نعتبر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصورة $f(x)=c$ لكل $x\in\mathbb{R}$، حيث c ثابت. نفرض U مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. إذن $f^{-1}(U)=\mathbb{R}$ إذا كانت $c\in U$ و $f^{-1}(U)=\phi$ إذا كانت $c\notin U$. في كلتا الحالتين $f^{-1}(U)$ تكون مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. إذن f تكون متصلة.

مثال ٤-٧. نعتبر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصورة

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{if } x\le 3 \\ \frac{1}{2}(x+5) & \text{if } x>3 \end{cases}$$

نفرض أن $U=(1,3)$. إذن U تكون مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ و $f^{-1}(U)=f^{-1}((1,3))=(2,3]$. ولكن $(2,3]$ مجموعة ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$ ومن ثم f لا تكون متصلة.

مثال ٤-٨. نفرض أن (X,τ) و (Y,σ) فضاءان توبولوجيان ونعتبر الدالة $f:X\to Y$. اتصال f يتوقف على تعريف f وعلى كل من τ و σ. إذا كان τ هو التوبولوجي المتقطع فإن f تكون دائما متصلة. من جهة أخرى إذا كان σ هو التوبولوجي غير المتقطع فإن f تكون دائما متصلة. الدالة الثابتة دائما تكون متصلة.

الآن يمكننا إعادة صياغة تمهيدية ٤-٢ في النظرية التالية:

نظرية ٤-٩. الدالة $f:X\to Y$ من الفضاء التوبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التوبولوجي (Y,σ) تكون متصلة إذا وفقط إذا كان لكل $x\in X$ ولكل $U\in\sigma$ بحيث $f(x)\in U$ ، يوجد $V\in\tau$ بحيث $x\in V$ و $f(V)\subset U$.

إذا تحقق الشرط في هذه النظرية عند نقطة معينة x في X فإننا نقول أن الدالة **متصلة عند النقطة** x continuous at the point.

واضح أن الدالة تكون متصلة إذا كانت متصلة عند كل نقطة في X.

واضح أنه إذا كانت $f: X \to Y$ دالة متصلة فإنه لأي مجموعة F_σ (G_δ) $B \subset Y$ ، الصورة العكسية $f^{-1}(B)$ تكون مجموعة F_σ (G_δ) في X.

النظرية التالية تعطينا بعض التعريفات المتكافئة للاتصال.

نظرية ٤-١٠. نفرض أن (X,τ) و (Y,σ) فضاءان توبولوجيان ونعتبر الدالة $f: X \to Y$. العبارات التالية تكون متكافئة:

(١) f تكون متصلة.

(٢) لكل مجموعة جزئية $A \subset X$ ، $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(٣) لكل مجموعة جزئية مغلقة في Y، $f^{-1}(B)$ تكون مغلقة في X.

البرهان: (١) ⇐ (٢): نفرض أن f تكون متصلة و $A \subset X$. سوف نوضح أنه إذا كان $x \in \overline{A}$ فإن $f(x) \in \overline{f(A)}$. نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y تحتوي $f(x)$. إذن $f^{-1}(V)$ تكون مجموعة مفتوحة في X تحتوي x. لذلك $f^{-1}(V)$ يجب أن تقطع A في نقطة y، مثلا. إذن V تقطع $f(A)$ في النقطة $f(y)$. ومن ثم $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(٢) ⇐ (٣): نفرض أن B مجموعة جزئية مغلقة في Y و $A = f^{-1}(B)$. سوف نبرهن أن A مجموعة مغلقة. من خواص الرواسم، $f(A) \subset B$. لذلك إذا كان $x \in \overline{A}$ فإن

$$f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$$

لذلك $x \in f^{-1}(B) = A$. إذن $\overline{A} \subset A$ وتكون A مغلقة.

(٣) ⇐ (١): نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y. نفرض $B = Y \setminus V$ ، ومن ثم B تكون مغلقة في Y. من (٣) $f^{-1}(B)$ تكون مغلقة في X. ولكن

$$f^{-1}(V)=f^{-1}(Y\setminus B)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B)=X\setminus f^{-1}(B)$$

لذلك $f^{-1}(V)$ تكون مفتوحة في X ومن ثم f تكون متصلة.

نظرية ٤-١١. نفرض أن X و Y فضاءان توبولوجيان. إذا وجد راسم فوقي متصل $f:X\to Y$ ، فإن $d(Y)\le d(X)$.

البرهان: نفرض أن A مجموعة جزئية كثيفة في X بحيث يكون $|A|=d(X)$. من نظرية ٤-١٠، $Y=f(X)=f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$، لذلك $f(A)$ تكون مجموعة جزئية كثيفة في Y، وحيث من الواضح أن $|f(A)|\le|A|=d(X)$، فإن $d(Y)\le d(X)$.

نتيجة ٤-١٢. الصورة المتصلة للفضاء قابل للفصل تكون فضاء قابل للفصل.

تعريف ٤-١٣. نفرض أن X و Y فضاءان توبولوجيان. الدالة $f:X\to Y$ تسمى **متصلة بالمتتابعات** sequentially continuous عند النقطة $p\in X$ إذا كان لأي متتابعة (a_n) في X تتقارب إلى p، فإن المتتابعة $(f(a_n))$ تتقارب إلى $f(p)$. أي أن

$$a_n\to p \quad \text{يؤدي إلى} \quad f(a_n)\to f(p)$$

مبرهنة ٤-١٤. إذا كانت الدالة $f:X\to Y$ متصلة عند النقطة $p\in X$ فإنها تكون متصلة بالمتتابعات عند النقطة p.

البرهان: نفرض أن N جوار للنقطة $f(p)$. حيث أن f متصلة عند p فإن $M=f^{-1}(N)$ يكون جوار للنقطة p. إذا كانت المتتابعة (a_n) تتقارب إلى p فإن M يحتوي كل حدود المتتابعة (a_n) ماعدا عدد منتهي، أي أنه يوجد $n_0\in\mathbb{N}$ بحيث $a_n\in M$ لكل $n\ge n_0$. ولكن $a_n\in M$ يؤدي إلى

$$f(a_n)\in f(M)=f(f^{-1}(N))=N$$

إذن $f(a_n)\in N$ لكل $n\ge n_0$، ومن ثم $(f(a_n))$ تتقارب إلى $f(p)$.

٤-٢ تكوين دوال متصلة

توجد عدة طرق لتكوين دوال متصلة من فضاء توبولوجي إلى فضاء توبولوجي آخر. هناك بعض الطرق التي درست في التحليل الحقيقي سوف نعطي لها تعميما في التوبولوجي. وهناك طرق أخرى جديدة.

نظرية ٤-١٥. نفرض أن X، Y و Z فضاءات توبولوجية. إذن

(١) إذا كانت $f:X\to Y$ هي الدالة الثابتة، أي يوجد $y_0\in Y$ بحيث $f(x)=y_0$ لكل $x\in X$، فإن f تكون متصلة.

(٢) إذا كان A فضاء جزئي من X، فإن دالة الاحتواء $j:A\to X$ تكون متصلة.

(٣) إذا كان $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ دالتان متصلتان، فإن دالة التحصيل $g\circ f:X\to Z$ تكون دالة متصلة.

(٤) إذا كانت $f:X\to Y$ دالة متصلة و A فضاء جزئي من X، فإن دالة التقييد $f|A:A\to Y$ تكون متصلة.

(٥) نفرض $f:X\to Y$ دالة متصلة. إذا كان Z فضاء جزئي من Y بحيث $f(X)\subset Z$، فإن الدالة $g:X\to Z$، التي نحصل عليها بتقييد مدى f، تكون متصلة. إذا كان Z فضاء توبولوجي بحيث Y يكون فضاء جزئي من Z، فإن الدالة $h:X\to Z$، التي نحصل عليها بتوسيع مدى f، تكون متصلة.

(٦) الدالة $f:X\to Y$ تكون متصلة إذا كانت X يمكن كتابتها كاتحاد مجموعات مفتوحة U_α بحيث أن $f|U_\alpha$ تكون متصلة لكل α.

البرهان: (١) نفرض أن $f(x)=y_0$ لكل $x\in X$. نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y. المجموعة $f^{-1}(V)$ تساوي X أو ϕ حسب كون V تحتوي y_0 أم لا. في كلتا الحالتين $f^{-1}(V)$ تكون مجموعة مفتوحة في X ومن ثم f تكون متصلة.

(٢) نفرض أن U مجموعة مفتوحة في X. إذن $j^{-1}(U)=U\cap A$، وهذه مجموعة مفتوحة في A من تعريف توبولوجي الفضاء الجزئي ومن ثم دالة الاحتواء $j:A\to X$ تكون دالة متصلة.

(٣) نفرض أن U مجموعة مفتوحة في Z، إذن $g^{-1}(U)$ تكون مجموعة مفتوحة في Y حيث أن g دالة متصلة. ولكن f أيضا دالة متصلة ومن ثم $f^{-1}(g^{-1}(U))$ تكون مجموعة مفتوحة في X. وحيث أن $f^{-1}(g^{-1}(U))=(g\circ f)^{-1}(U)$ فإن $g\circ f:X\to Z$ تكون دالة متصلة.

(٤) الدالة $f\,|\,A:A\to Y$ تساوي تحصيل دالتين، دالة الاحتواء $j:A\to X$ والدالة $f:X\to Y$، $f\,|\,A=f\circ j$، ومن ثم تكون متصلة لأنها تحصيل دالتين متصلتين.

(٥) نفرض أن $f:X\to Y$ دالة متصلة. إذا كان $f(X)\subset Z\subset Y$ ، سوف نبين أن الدالة $g:X\to Z$ التي نحصل عليها من f تكون متصلة. نفرض أن B مجموعة مفتوحة في Z. إذن توجد مجموعة U مفتوحة في Y بحيث $B=Z\cap U$. حيث أن $f(X)\subset Z$ فإن $f^{-1}(U)=g^{-1}(B)$. وحيث أن $f^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة فكذلك تكون $g^{-1}(B)$.

لبيان أن $h:X\to Z$ تكون متصلة حيث Y فضاء جزئي من Z، لاحظ أن h هي تحصيل الدالة $f:X\to Y$ ودالة الاحتواء $j:Y\to Z$، $h=j\circ f$.

(٦) من الفرض يمكن كتابة X كاتحاد مجموعات مفتوحة U_α بحيث أن $f\,|\,U_\alpha$ تكون متصلة لكل α. نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Y. إذن

$$f^{-1}(V)\cap U_\alpha=(f\,|\,U_\alpha)^{-1}(V)$$

حيث كلا التعبيرين يمثل مجموعة النقاط x الواقعة في U_α بحيث $f(x)\in V$. حيث أن $f|U_\alpha$ تكون متصلة ، هذه المجموعة تكون مفتوحة في U_α ومن ثم تكون مفتوحة في X. ولكن

$$f^{-1}(V)=\bigcup_\alpha (f^{-1}(V)\cap U_\alpha)$$

لذلك $f^{-1}(V)$ تكون أيضا مجموعة مفتوحة في X.

نظرية ٤-١٦. (**تمهيدية اللصق** The pasting lemma)

نفرض أن X و Y فضاءان توبولوجيان و $X=A\cup B$، حيث A و B مغلقتان في X. نفرض أن $f:A\to Y$ و $g:B\to Y$ دالتان متصلتان. إذا كان $f(x)=g(x)$ لكل $x\in A\cap B$، فإنه يمكن ضم f و g لنحصل على دالة متصلة $h:X\to Y$ تعرف بوضع $h(x)=f(x)$ لكل $x\in A$ و $h(x)=g(x)$ لكل $x\in B$.

البرهان: نفرض أن C مجموعة جزئية مغلقة في Y. الآن

$$h^{-1}(C)=f^{-1}(C)\cup g^{-1}(C)$$

حيث أن f متصلة فإن $f^{-1}(C)$ تكون مغلقة في A ومن ثم تكون مغلقة في X. بالمثل، $g^{-1}(C)$ تكون مغلقة في B ومن ثم تكون مغلقة في X. لذلك اتحادهما $h^{-1}(C)$ تكون مغلقة في X.

هذه النظرية تتحقق أيضا إذا كانت A و B مفتوحة في X، وهي مجرد حالة خاصة من نظرية ٤-١٣(٦).

مثال ٤-١٧. نفرض أن الدالة $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصورة

$$h(x)=\begin{cases} x & \text{for } x\le 0\\ \frac{x}{2} & \text{for } x\ge 0\end{cases}$$

كل قطعة في هذا التعريف تكون دالة متصلة، والقطعتان متساويتان في النقطة المشتركة في النطاق للقسمين، وهي $\{0\}$. حيث أن كلا نطاقي الدالتين مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ ، فإن الدالة h تكون متصلة.

نظرية ٤-١٨. نفرض أن $f:A\to X\times Y$ معرفة بالصورة

$$f(a)=(f_1(a),f_2(a))$$

إذن f تكون متصلة إذا وفقط إذا كانت الدالتان

$$f_1 : A \to X \quad \text{و} \quad f_2 : A \to Y$$

متصلتان.

الدالتان f_1 و f_2 تسميان **دوال إحداثيات** f coordinate functions.

البرهان: نفرض $\pi_1 : X \times Y \to X$ و $\pi_2 : X \times Y \to Y$ هما دالتي الإسقاط على العامل الأول والعامل الثاني، على الترتيب. هاتان الدالتان متصلتان، حيث أن $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ و $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ وهاتان تكونا مجموعتان مفتوحتان في $X \times Y$ إذا كان U و V مفتوحتان في X و Y، على الترتيب. لاحظ أنه لكل $a \in A$،

$$f_1(a) = \pi_1(f(a)) \quad \text{و} \quad f_2(a) = \pi_2(f(a))$$

إذا كانت f متصلة فإن f_1 و f_2 تكونا تحصيل دوال متصلة ومن ثم تكونا متصلتان. وفي الاتجاه العكسي، نفرض أن f_1 و f_2 متصلتان. سوف نبين أنه لكل عنصر أساس $U \times V$ للتوبولوجي على $X \times Y$، الصورة العكسية $f^{-1}(U \times V)$ تكون مفتوحة. النقطة a تكون في $f^{-1}(U \times V)$ إذا وفقط إذا كان $f(a) \in U \times V$ ، أي، إذا وفقط إذا كان $f_1(a) \in U$ و $f_2(a) \in V$. لذلك

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$$

وحيث أن المجموعتان $f_1^{-1}(U)$ و $f_2^{-1}(V)$ مفتوحتان، فكذلك يكون تقاطعهما.

٤-٣ التشاكل التوبولوجي Homeomorphism

تعريف ٤-١٩. نفرض أن (X, τ) و (Y, σ) فضاءان توبولوجيان ونعتبر الدالة $f : X \to Y$. الدالة f تسمى **تشاكل توبولوجي** homeomorphism أو **دالة توبولوجية** topological mapping إذا كانت تتحقق الخواص التالية

(١) f تكون تناظر أحادي.

(٢) f تكون متصلة.

(٣) f^{-1} تكون متصلة.

إذا كان (X,τ) و (Y,σ) فضاءان توبولوجيان وكان $f:X\to Y$ تشاكل توبولوجي فإن X و Y يقال أنهما **متشاكلان** homeomorphic أو **متكافئان توبولوجيا** topologically equivalent ونكتب $X\cong Y$.

ملاحظة ٤-٢٠. العلاقة $\cong$ تكون علاقة تكافؤ على أي مجموعة من الفضاءات التوبولوجية.

الفضاءات المتشاكلة تكون هي نفس الشيء من وجهة نظر التوبولوجي. بصورة بديلة، الفضاءات المتشاكلة يكون لها نفس "الشكل" shape إذا تخيلنا أنها مصنوعة من مادة مطاطة. بتعبير آخر الفضاءان يكونا متشاكلان إذا أمكننا شد أحدهما ليصبح الآخر، ولكن بدون قطع أو لصق أجزاء من الفضاء. على سبيل المثال الدائرة، المربع والقطع الناقص كل منها متشاكل مع الآخر. الكعكة وسطح الكوب متشاكلان.

الشرط f^{-1} تكون متصلة في تعريف التشاكل التوبولوجي يقول أن الصورة العكسية $(f^{-1})^{-1}(U)$ تحت تأثير $f^{-1}:Y\to X$ لأي مجموعة U مفتوحة في X تكون مجموعة مفتوحة في Y. ولكن $(f^{-1})^{-1}(U)=f(U)$. لذلك هذا الشرط يكافئ أن صور المجموعات المفتوحة في X تحت تأثير $f:X\to Y$ تكون مجموعات مفتوحة في Y. لذلك، صورة أخري لتعريف التشاكل التوبولوجي هو أنه التناظر الأحادي $f:X\to Y$ بحيث $f(U)$ تكون مجموعة مفتوحة في Y إذا وفقط إذا كانت Y مجموعة مفتوحة في X.

هذه الملاحظة تبين أن التشاكل التوبولوجي $f:X\to Y$ يعطي تناظرا أحاديا ليس فقط بين X و Y كمجموعات ولكن أيضا بين تجمع كل المجموعات المفتوحة في X وتجمع كل المجموعات المفتوحة في Y.

تعريف ٤-٢١. نفرض أن (X,τ) و (Y,σ) فضاءان توبولوجيان الراسم $f:X\to Y$ يسمى

(١) **مفتوح** open إذا كان $f(U)$ مجموعة مفتوحة في Y لكل مجموعة U مفتوحة في X.

(٢) **مغلق** closed إذا كان $f(F)$ مجموعة مغلقة في Y لكل مجموعة F مغلقة في X.

واضح أن تحصيل راسمين مفتوحين (مغلقين) يكون راسم مفتوح (مغلق).

تمهيدية ٤-٢٢. نفرض أن (X,τ) و (Y,σ) فضاءان توبولوجيان ونعتبر الدالة $f: X \to Y$. إذا كانت f تناظر أحادي فإن العبارات التالية تكون متكافئة

(١) f تكون مفتوحة.

(٢) f تكون مغلقة.

(٣) f^{-1} تكون متصلة.

البرهان: بسيط وترك للقارئ كتمرين.

من التعريف والتمهيدية السابقين يمكن تعريف التشاكل التوبولوجي بأنه راسم تناظر أحادي متصل ومفتوح أو راسم تناظر أحادي متصل ومغلق.

نظرية ٤-٢٣. إذا كان $f: X \to Y$ راسم مفتوح من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y فإنه لأي نقطة $x \in X$ يكون $\chi(f(x), Y) \le \chi(x, X)$. علاوة على ذلك، إذا كان $f(X) = Y$، فإن $w(Y) \le w(X)$ و $\chi(Y) \le \chi(X)$.

البرهان: الراسم f يحول أس أساس موضعي عند x إلى أساس موضعي عند $f(x)$ وأي أساس للفضاء X إلى أساس للفضاء $f(X)$.

الخواص اللاتغيرية والخواص التوبولوجية

نفرض أن M هو فصل من الرواسم المتصلة و P خاصية للفضاءات التوبولوجية. سوف نقول أن P **لا تغيرية للفصل** M invariant for أو أن P لا تغيرية تحت تأثير الرواسم من M إذا كان أي راسم من M يحافظ على P، أي أن لكل $f \in M$، حيث

$f : X \to Y$ و $f(X) = Y$ ، الفضاء Y يكون لـه الخاصية P طالما أن X له الخاصية P. باستخدام هذه المصطلحات يمكن إعادة صياغة نظرية ٤-١١ بقولنا أن خاصية " الكثافة أقل من أو تساوي m" تكون لا تغيرية بالنسبة للرواسم المتصلة، وبالمثل يمكن إعادة صياغة نظرية ٤-٢٣ بقولنا أن الخاصيتين "الوزن أقل من أو يساوي m" و "الخصيصة أقل من أو تساوي m" تكونا لا تغيريتين بالنسبة للرواسم المفتوحة.

سوف نقول أن الخاصية P **لا تغيرية عكسيا** inverse invariant للفصل M من الرواسم المتصلة، إذا كان لكل $f \in M$ ، حيث $f : X \to Y$ و $f(X) = Y$ ، الفضاء X يكون له الخاصية P طالما أن الفضاء Y له الخاصية P. لاحظ أن P تكون لا تغيرية عكسيا للفصل M إذا وفقط إذا كان الخاصية $\sim P$ ، أي ليست P ، لا تغيرية للفصل M. لذلك مصطلح لا تغيرية عكسيا يمكن أن يتحول إلى مصطلح لا تغيرية. واضح أنه إذا كان $M_1 \subset M_2$ ، فإن كل خاصية لا تغيرية (لا تغيرية عكسيا) للفصل M_2 تكون لا تغيرية (لا تغيرية عكسيا) للفصل M_1.

الخواص اللاتغيرية للتشاكلات يكون لها اهتمام خاص، هذه تسمى أيضا **خواص توبولوجية** topological properties، مفهومي لا تغيرية ولا تغيرية عكسيا يكونا منطبقان لفصل التشاكلات. لذلك الفضاء X يكون له الخاصية التوبولوجية P إذا وفقط إذا كان كل فضاء متشاكل مع X له الخاصية P. حيث أن التشاكل $f : X \to Y$ يعطي تناظر أحادي بين نقاط X ونقاط Y وكذلك بين المجموعات المفتوحة في كلا الفضاءين، فإن كل خاصية معرفة بدلالة المجموعات المفتوحة وبدلالة نظرية المجموعات تكون خاصية توبولوجية. نحن بالفعل أحصينا العديد من الخواص التوبولوجية، "الوزن أقل من أو يساوي m"، "الخصيصة أقل من أو تساوي m" و "الكثافة أقل من أو تساوي m".

أي خاصية P تحدد فصل كل الفضاءات التي لها هذه الخاصية. إذا كانت P خاصية توبولوجية، فإن الفصل المحدد بالخاصية P يكون لا تغيري توبولوجيا، أي أنه مع X يحتوي كل الفضاءات المتشاكلة مع

X. الخواص التوبولوجية المذكورة في نهاية الفقرة السابقة تحدد لقيمة $m = \aleph_0$ فصول فضاءات العد من النوع الثاني ، فضاءات العد من النوع الأول والفضاءات قابلة للفصل، على الترتيب، كل هذه الفصول لا تغيرية توبولوجيا.

موضوع التوبولوجي هو دراسة الخواص التوبولوجية. عندما نعتبر فضاء توبولوجي معين X، فإننا نحاول تحديد ما هي الخواص التوبولوجية التي يحققها X. عندما نعالج نظرية عامة، عادة ندرس خاصية توبولوجية معينة P ، علاقتها بالخواص التوبولوجية الأخرى، ونحاول تحديد ما هي العمليات على الفضاءات التوبولوجية التي تحافظ على P وما هي فصول الرواسم التي تكون بالنسبة لها P لا تغيرية. لذلك من وجهة نظر التوبولوجي الفضاءان المتشاكلان يمكن أن يعتبرا كأنهما نفس الشيء.

مثال ٤-٢٤. نفرض أن X و Y مجموعتان لهما نفس العدد الكاردينالي ونعرف التوبولوجي المتقطع على كلا المجموعتين. من البديهي أن كل راسم تناظر أحادي من X إلى Y يكون تشاكل. من ناحية أخرى، إذا كان الفضاءان المتقطعان X و Y لهما عددان كارديناليان مختلفان، فإنه لا يمكن أن يكونا متشاكلين. لذلك الفضاء المتقطع X يعتمد، على مستوى التشاكل، فقط على العدد الكاردينالي للمجموعة X. الفضاء المتقطع الذي له العدد الكاردينالي m سوف يرمز له بالرمز $D(m)$.

نفس الشيء يتحقق للمجموعات اللانهائية X و Y مع التوبولوجي المعرف في تمرين ٣-١-٢٥، هنا مع ذلك، في حالة تساوي العدد الكاردينالي، للحصول على تشاكل نعتبر راسم تناظر أحادي من X إلى Y يرسم x_0 إلى y_0 ، نقطة التجمع لـ Y. الفضاء الذي حصلنا عليه في تمرين ٣-١-٢٥ من المجموعة التي لها العدد الكاردينالي $m \ge \aleph_0$ سوف يرمز له بالرمز $A(m)$.

الآن نفرض أن $f : X \to Y$ دالة أحادية متصلة، حيث X و Y فضاءان توبولوجيان. نفرض أن Z هو الصورة $f(X)$ باعتباره فضاء جزئي من Y. إذن الدالة $f' : X \to Z$ التي نحصل عليها بتقييد مدى f تكون تناظر أحادي. إذا حدث أن f' كانت تشاكل بين

X و Z فإننا نقول أن $f : X \to Y$ **غامر توبولوجي** topological imbedding أو (للسهولة) **غامر لـ** X في Y.

التوبولوجيات المولدة بالدوال

نفرض أن $\{(Y_i, \tau_i)\}$ عائلة من الفضاءات التوبولوجية ولكل Y_i نفرض أنه لدينا دالة $f_i : X \to Y_i$ معرفة على مجموعة ما غير خالية X. نريد أن نقترح التوبولوجيات على X التي بالنسبة لها الدوال f_i تكون متصلة. نذكر هنا أن الدالة f_i تكون متصلة بالنسبة لتوبولوجي ما على X إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة جزئية مفتوحة في Y_i تكون مجموعة جزئية مفتوحة في X. لذلك، نعتبر التجمع التالي من المجموعات الجزئية من X:

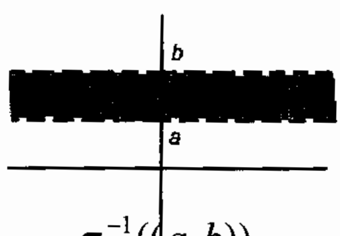
$$\mathcal{S} = \bigcup_i \{f_i^{-1}(H) : H \in \tau_i\}$$

أي أن $\mathcal{S}$ تتكون من الصور العكسية لكل مجموعة جزئية مفتوحة في Y_i. التوبولوجي τ على X المولد بواسطة $\mathcal{S}$ يسمى التوبولوجي المولد بالدوال f_i. $\mathcal{S}$ تسمى الأساس الجزئي المعرف للتوبولوجي المولد بالدوال f_i، أي أصغر (أخشن) توبولوجي على X بالنسبة له الدوال f_i تكون متصلة.

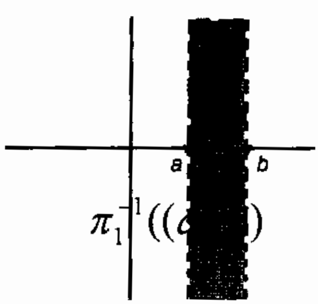
مثال ٤ـ٢٥ نفرض أن π_1 و π_2 هما راسمي الإسقاط للمستوي $\mathbb{R}^2$ على $\mathbb{R}$، أي أن

$$\pi_1((x,y)) = x \quad \text{و} \quad \pi_2((x,y)) = y$$

لاحظ، كما هو موضح بالشكل، أن الصورة العكسية لفترة مفتوحة (a,b) في $\mathbb{R}$ تكون شريحة لانهائية في $\mathbb{R}^2$.



$\pi_2^{-1}((a,b))$



$\pi_1^{-1}((a,b))$

الخواص الأساسية للتوبولوجي τ نوردها في النظرية التالية:

نظرية ٤-٢٦. نفرض أن $\{f_i : X \to (Y_i, \tau_i)\}$ تجمع من الدوال معرف على مجموعة غير خالية X، نفرض أن

$$\mathcal{S} = \bigcup_i \{f_i^{-1}(H) : H \in \tau_i\}$$

نفرض أن τ هو التوبولوجي المولد على X بالتجمع $\mathcal{S}$، إذن

١- كل الدوال f_i تكون متصلة بالنسبة إلى τ.

٢- إذا كان τ^* هو تقاطع كل التوبولوجيات على X التي تكون الدوال f_i متصلة بالنسبة لها، فإن $\tau = \tau^*$.

٣- τ يكون هو أصغر (أخشن) توبولوجي على X بالنسبة له تكون الدوال f_i متصلة.

٤- $\mathcal{S}$ يكون أساس جزئي لـ τ.

البرهان: ١- لأي دالة $f_i : (X, \tau) \to (Y_i, \tau_i)$ ، إذا كان $H \in \tau_i$ ، فإن $f_i^{-1}(H) \in \mathcal{S} \subset \tau$. لذلك كل الدوال f_i تكون متصلة بالنسبة إلى τ.

٢- نفرض أن G مجموعة مفتوحة في Y ، إذن من الفرض $f^{-1}(G)$ تنتمي إلى التقاطع، أي أن $f^{-1}(G) \in \cap_i \tau_i = \tau^*$ ، ومن ثم f تكون متصلة بالنسبة إلى τ^*. لذلك $\mathcal{S} \subset \tau^*$ وحيث أن τ هو التوبولوجي المولد بـ $\mathcal{S}$ ، $\tau \subset \tau^*$. من جهة أخرى τ هو أحد التوبولوجيات التي بالنسبة لها f_i متصلة، فإن $\tau^* \subset \tau$ وبالتالي $\tau = \tau^*$.

٣- تنتج من (٢).

٤- تنتج من حقيقة أن أي تجمع من المجموعات يكون أساس جزئي للتوبولوجي الذي يولده.

تمارين ٤-١

١- نفرض أن $f : X \to Y$ دالة متصلة. إذا كانت x نقطة نهاية للمجموعة الجزئية A من X ، هل من الضروري أن تكون $f(x)$ نقطة نهاية للمجموعة $f(A)$ ؟

٢- نفرض أن X و X' ترمز إلى نفس المجموعة مع التوبولوجيان τ و τ' ، على الترتيب. نفرض أن $i : X' \to X$ هي دالة الوحدة.
(أ) بين أن i تكون متصلة إذا وفقط إذا كان $\tau \subset \tau'$.
(ب) بين أن i يكون تشاكل توبولوجي إذا وفقط إذا كان $\tau' = \tau$.

٣- نفرض أن $x_0 \in X$ و $y_0 \in Y$ ، بين أن الدالتين $f : X \to X \times Y$ و $g : Y \to X \times Y$ المعرفة بالصورة

$$f(x) = (x, y_0) \text{ و } g(y) = (x_0, y)$$

تكون غامر.

٤- نفرض أن $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ دالة ليست متصلة بالنسبة للتوبولوجيان τ_1 و τ_2 ؛ نفرض τ_1^* توبولوجي على X و τ_2^* توبولوجي على Y بحيث $\tau_1^* \subset \tau_1$ و $\tau_2 \subset \tau_2^*$. بين أن f لا تكون متصلة بالنسبة للتوبولوجيان τ_1^* و τ_2^* .

٥- نعتبر التوبولوجي $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}\}$ المعرف على المجموعة $X = \{a,b,c,d\}$. نفرض الدالة $f : X \to X$ حيث $f(a) = f(c) = b$ ، $f(b) = d$ و $f(d) = c$.
(أ) بين أن f ليست متصلة عند c.
(ب) بين أن f متصلة عند d.

٦- نفرض أن المجموعة المنفردة $\{p\}$ تكون مفتوحة في الفضاء التوبولوجي X. بين أنه لأي فضاء توبولوجي Y ولأي دالة $f : X \to Y$ ، f تكون متصلة عند $p \in X$.

٧- برهن أن $f : X \to Y$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(A^\circ) \subset (f^{-1}(A))^\circ$ لأي $A \subset X$.

٨- نفرض أن $f : X \to Y$ دالة متصلة. بين أن $f : X \to f(X)$ تكون أيضا متصلة، حيث $f(X)$ معرف عليها التوبولوجي النسبي.

٩- نفرض أن $f : X \to Y$ دالة متصلة. بين ما إذا كانت هذه الدالة متصلة أم لا في الحالات التالية:

(أ) أدق توبولوجي على X ونفس التوبولوجي على Y.

(ب) أخشن توبولوجي على X ونفس التوبولوجي على Y.

(ج) أدق توبولوجي على Y ونفس التوبولوجي على X.

(د) أخشن توبولوجي على Y ونفس التوبولوجي على X.

١٠- برهن أن الدالة $f : X \to Y$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كان $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$ لكل $A \subset Y$.