الباب الثالث

نقاط النهاية ، داخل مجموعة وإغلاق مجموعة

Limit points, interior and closure of a set

في هذا الباب نقدم بعض أنواع النقاط التي تتعلق بمجموعة جزئية في فضاء توبولوجي مثل نقطة النهاية، نقطة الإغلاق، النقطة الداخلية، النقطة الحدية، والنقطة الخارجية ونقدم العلاقات بين هذه النقاط وكذلك خواص مجموعات هذه النقاط. كما نقدم علاقة هذه النقاط بالمجموعات المفتوحة والمغلقة. وفي نهاية الباب نقدم مفهوم الجوار لنقطة وخواص نظام الجوارات.

٣-١ **نقاط النهاية** limit points

على خط الأعداد الحقيقية، لدينا مفهوم القرب. على سبيل المثال كل نقطة في المتتابعة ... ,00001. ,0001. ,001. ,01. ,1. تكون أقرب إلى 0 من سابقتها. في الواقع وبأسلوب ما، 0 هو نقطة النهاية لهذه المتتابعة. لذلك الفترة $[0,1)$ ليست مغلقة، لأنها لا تحتوي نقطة النهاية 0. في التوبولوجي العام ليس لدينا دالة مسافة، لذلك يجب أن تكون المعالجة مختلفة. سوف نعرف مفهوم نقطة النهاية دون ذكر المسافات. ومع ذلك بالتعريف الجديد للنهاية، النقطة 0 تظل نقطة نهاية للمجموعة $(0,1]$. تقديم مفهوم نقطة النهاية سوف يؤدي إلى فهم أفضل لمفهوم المجموعة المغلقة.

تعريف ٣-١. نفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X,τ) و $x \in X$. x تسمى **نقطة نهاية** limit point (أيضا تسمى **نقطة تجمع** accumulation point أو **نقطة اشتقاق** derived point) للمجموعة A إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوي x تقطع A في نقطة تختلف عن x. يرمز لمجموعة نقاط النهاية للمجموعة A بالرمز A' وتسمى **مجموعة اشتقاق** المجموعة A derived set. أي أن

$$x \in A' \Leftrightarrow U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi, \ \forall U \in \tau, x \in U$$

مثال ٣-٢. نعتبر الفضاء التوبولوجي (X,τ)، حيث
$$X=\{a,b,c,d,e\}$$
و $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$
ونفرض $A=\{a,b,c\}$. إذن b، d و e تكون نقاط نهاية للمجموعة A في حين أن a و c ليست نقاط نهاية. أي أن $b,d,e\in A'$ و $a,c\notin A'$. (وضح ذلك).

مثال ٣-٣. نفرض أن (X,τ) هو الفضاء التوبولوجي المتقطع و $A\subset X$. إذن A ليس لها نقاط نهاية، حيث لكل $x\in X$، $\{x\}$ تكون مجموعة مفتوحة لا تحتوي أي نقاط من A تختلف عن x.

مثال ٣-٤. نعتبر المجموعة الجزئية $A=[a,b)$ من $\mathbb{R}$. يمكن التحقق من أن جميع نقاط A تكون نقاط نهاية لـ A. أيضا b تكون نقطة نهاية لـ A.

مثال ٣-٥. نفرض أن (X,τ) هو الفضاء التوبولوجي غير المتقطع و A مجموعة جزئية من X تحتوي عنصرين على الأقل. إذن كل نقطة في X تكون نقطة نهاية لـ A.

نظرية ٣-٦. نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و $A,B\subset X$. إذا كان $A\subset B$ فإن $A'\subset B'$.

البرهان: نفرض $x\in A'$. إذن لكل مجموعة مفتوحة U تحتوي x يكون $U\setminus\{x\}\cap A\neq\phi$. ولكن $A\subset B$ يؤدي إلى $U\setminus\{x\}\cap B\neq\phi$، ومن ثم $x\in B'$. إذن $A'\subset B'$.

النظرية التالية تعطينا طريقة لاختبار ما إذا كانت مجموعة مغلقة عن طريق نقاط النهاية.

نظرية ٣-٧. نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي و $A\subset X$. إذن A تكون مغلقة إذا وفقط إذا كان $A'\subset A$.

البرهان: نفرض أن A مجموعة مغلقة و $x\in A'$. نفرض أن $x\notin A$. إذن $x\in X\setminus A$ ومن ثم $X\setminus A$ تكون مجموعة مفتوحة تحتوي x ولا تحتوي أي نقاط من A. أي أن $x\notin A'$، وهذا تناقض. لذلك $x\in A$ وبالتالي $A'\subset A$.

في الاتجاه الآخر، نفرض أن $A' \subset A$. نفرض $x \in X \setminus A$. إذن توجد مجموعة مفتوحة U_x تحتوي x بحيث $U_x \cap A = \phi$ ومن ثم $U_x \subset X \setminus A$. لذلك $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$، أي أن $X \setminus A$ تكون اتحاد مجموعات مفتوحة وبالتالي تكون مجموعة مفتوحة. إذن A تكون مغلقة.

مثال ٣-٨. كتطبيق على النظرية ٣-٧ يكون لدينا ما يلي:

١- المجموعة $[a,b)$ ليست مغلقة في $\mathbb{R}$، حيث أن b نقطة نهاية و $b \notin [a,b)$.

٢- المجموعة $[a,b]$ تكون مغلقة في $\mathbb{R}$، حيث أنها تحتوي جميع نقاط النهاية لها وهي جميع عناصر $[a,b]$.

٣- المجموعة (a,b) ليست مغلقة في $\mathbb{R}$ حيث أنها لا تحتوي نقطة نهاية لها وهي a.

نظرية ٣-٩. نفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي و $A \subset X$. إذن $A \cup A'$ تكون مجموعة مغلقة، حيث A' هي مجموعة كل نقاط النهاية للمجموعة A.

البرهان: من نظرية ٣-٧ يكفي إثبات أن $A \cup A'$ تحتوي كل نقاط النهاية لها. نفرض $x \in X \setminus (A \cup A')$. حيث أن $x \notin A'$، توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي x بحيث $U \cap A \subset \{x\}$. ولكن $x \notin A$، لذلك $U \cap A = \phi$. أيضا نوضح أن $U \cap A' = \phi$، حيث إذا كان $y \in U$، لأن U مجموعة مفتوحة و $U \cap A = \phi$ فإن $y \notin A'$. لذلك $U \cap A' = \phi$. إذن $U \cap (A \cup A') = \phi$ و $x \in U$ وهذا يبين أن x ليست نقطة نهاية للمجموعة $A \cup A'$ ومن ثم $A \cup A'$ تكون مجموعة مغلقة.

٣-٢ إغلاق مجموعة Closure of a set

تعريف ٣-١٠. نفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ). **إغلاق** A closure of هو تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحتوي A. يرمز لإغلاق A بالرمز $\overline{A}$ أو $Cl(A)$. أي أن

$$Cl(A) = \cap\{F : A \subset F, F^c \in \tau\} = \overline{A}$$

نقول أن x **نقطة إغلاق** closure point للمجموعة A إذا وفقط إذا كان $x \in \overline{A}$.

واضح من تعريف ٣-١٠، أن إغلاق المجموعة A، $\overline{A}$، يكون مجموعة مغلقة، حيث أنه تقاطع عدد اختياري لمجموعات مغلقة، وهو أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A. كذلك A تكون مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كان $A = \overline{A}$.

مثال ٣-١١. نفرض أن $X = \{a,b,c,d,e\}$ و
$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$.
أوجد $\overline{\{b\}}$ ، $\overline{\{a,c\}}$ ، $\overline{\{b,d\}}$.

الحل: المجموعات المغلقة في (X, τ) هي ϕ ، X، $\{b,c,d,e\}$، $\{a,b,e\}$، $\{b,e\}$، $\{a\}$.

المجموعات المغلقة التي تحتوي $\{b\}$ هي X، $\{b,c,d,e\}$، $\{a,b,e\}$ و $\{b,e\}$. لذلك $\overline{\{b\}} = \{b,e\}$.

بالمثل $\overline{\{a,c\}} = X$ و $\overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$.

مثال ٣-١٢. نعتبر توبولوجي المكملات المنتهية على مجموعة لانهائية X، $A \subset X$. إذن

$$\overline{A} = \begin{cases} A & \text{if } A \text{ is finite} \\ X & \text{if } A \text{ is infinite} \end{cases}$$

تعريف إغلاق مجموعة (تعريف ٣-١٠) لا يعطي طريقة ملائمة لإيجاد الإغلاق لمجموعة معينة بصورة فعلية، حيث أن تجمع كل المجموعات المغلقة في X، مثله كمثل تجمع كل المجموعات المفتوحة، عادة يكون كبير جدا ويصعب التعامل معه. طريقة أخرى أكثر ملائمة لوصف إغلاق مجموعة تعطى في النظرية التالية.

نظرية ٣-١٣. نفرض أن (X, τ) فضاءا توبولوجيا و $A \subset X$. إذن

١- $x \in \overline{A}$ إذا وفقط إذا كان $U \cap A \neq \phi$ لكل $U \in \tau$ بحيث $x \in U$.

٢- إذا كـان التوبولـوجي τ معطـي بأسـاس $\mathcal{B}$ فـإن أن $x \in \overline{A}$ إذا وفقط إذا كان $B \cap A \neq \phi$ لكل $B \in \mathcal{B}$ بحيث $x \in B$.

البرهان: (١) نبرهن هذه باستخدام المكافئ العكسي

$$x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U \in \tau : x \in U , U \cap A = \phi$$

نفرض $x \notin \overline{A}$، إذن $U = X \setminus \overline{A}$ تكون مجموعة مفتوحة تحتوي x و $U \cap A = \phi$. من جهة أخري نفرض أنه توجد مجموعة مفتوحة U بحيث $x \in U$ و $U \cap A = \phi$. إذن $X \setminus U$ تكون مجموعة مغلقة تحتوي A ومن ثم تحتوي $\overline{A}$ وبالتالي $x \notin \overline{A}$.

(٢) تنتج مباشرة حيث إذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحتوي x تقطع A فإن كل عنصر أساس يحتوي x أيضا يقطع A. وعلى العكس، إذا كان كل عنصر أساس يحتوي x يقطع A فإن كل مجموعة مفتوحة U تحتوي x أيضا تقطع A ، لأن U تحتوي عنصر أساس يحتوي x.

نظرية ٣-١٤. نفرض أن (X, τ) فضاءا توبولوجيا و $A \subset X$. إذن

$$\overline{A} = A \cup A'$$

البرهان: من نظرية ٣-٩ ، $A \cup A'$ تكون مجموعة مغلقة واضح أنها تحتوي A. وحيث أن $\overline{A}$ هو أصغر مجموعة مغلقة تحتوي A فإن $\overline{A} \subset A \cup A'$. من جهة أخري نفرض أن $x \in A \cup A'$ ، إذا كانت $x \in A$ فإن $x \in \overline{A}$. إذا كانت $x \in A'$ فإن أي مجموعة مفتوحة تحتوي x تقطع A في نقطة تختلف عن x ومن ثم أي مجموعة مفتوحة تحتوي x تقطع A وبالتالي، من نظرية ٣-١٣، $x \in \overline{A}$. إذن $A \cup A' \subset \overline{A}$. لذلك $\overline{A} = A \cup A'$.

تمهيدية ٣-١٥. نفرض أن X فضاءا توبولوجيا و $A, B \subset X$. إذا كان $A \subset B$ فإن $\overline{A} \subset \overline{B}$.

البرهان: يترك كتمرين للقارئ.

مؤثر الإغلاق الذي يعين لكل مجموعة جزئية من X إغلاقها $\overline{A} \subset X$ يحقق أربعة خواص تظهر في النظرية التالية، وتسمى **مسلمات كوراتوفيسكي للإغلاق** Kuratowski Closur Axioms.

نظرية ٣-١٦. نفرض أن $(X\,,\tau)$ فضاءا توبولوجيا و $A,B\subset X$. إذن

(١) $\overline{\phi}=\phi$ ؛ (٢) $A\subset\overline{A}$ ؛ (٣) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ و
(٤) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.

البرهان: ϕ و $\overline{A}$ مجموعات مغلقة ومن ثم تساوي إغلاقها. ومن نظرية ٣-١٤، $A\subset A\cup A'=\overline{A}$. الآن نبرهن أن $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. من تمهيدية ٣-١٥ $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$ و $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$ ومن ثم $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. من جهة أخري $A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. وحيث أن $\overline{A}\cup\overline{B}$ مجموعة مغلقة، لكونها اتحاد مجموعتين مغلقتين، تحتوي $A\cup B$ فإن $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. وهذا يكمل البرهان.

المجموعات الكثيفة

تعريف ٣-١٧. المجموعة الجزئية A في الفضاء التوبولوجي $(X\,,\tau)$ تسمى:

(أ) **كثيفة في** X dense in إذا كان $\overline{A}=X$.

(ب) **مكملة كثيفة في** X codense in إذا كان $X\setminus A$ كثيفة في X.

(ج) **ليست كثيفة على الإطلاق في** X nowhere dense in إذا كان $\overline{A}$ codense.

(د) **كثيفة ذاتيا** dense in itself إذا كان $A\subset A'$.

الفضاء التوبولوجي الذي يحتوي مجموعة جزئية كثيفة قابلة للعد يسمى **فضاء قابل للفصل** separable space.

مثال ٣-١٨. في الفضاء المتقطع X، كل مجموعة جزئية من X تكون مغلقة (لأنها مكملة مجموعة مفتوحة) ، وبالتالي المجموعة الكثيفة الوحيدة في X تكون هي X نفسها. مجموعة الأعداد الكسرية ومثلها مجموعة الأعداد غير الكسرية كلاهما تكون كثيفة و مكملة كثيفة في خط الأعداد الحقيقية. أي أن $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$. حيث إذا كان $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$، فإنه

يوجد $a,b \in \mathbb{R}$ بحيث $a<b$ و $x \in (a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$، لأن $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ مجموعة مفتوحة لكونها مكملة مجموعة مغلقة. ولكن لكل فترة (a,b) يوجد عدد كسري q بحيث $q \in (a,b)$ ومن ثم $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$، وهذا تناقض. بالمثل يمكن بيان أن مجموعة الأعداد غير الكسرية تكون كثيفة في $\mathbb{R}$.

مثال ٣-١٩. نفرض أن (X,τ) هو الفضاء التوبولوجي غير المتقطع. إذن كل مجموعة جزئية غير خالية من X تكون كثيفة في X، حيث أن المجموعة المغلقة غير الخالية الوحيدة هي X.

نظرية ٣-٢٠. إذا كانت A مجموعة كثيفة في الفضاء التوبولوجي X فإنه لأي مجموعة مفتوحة $U \subset X$ يكون $\overline{U} = \overline{U \cap A}$.

البرهان: لكل $x \in \overline{U}$ وأي مجموعة مفتوحة W تحتوي x، $W \cap U$ تكون مجموعة مفتوحة غير خالية. إذن $W \cap U \cap A \neq \phi$ ومن ثم $x \in \overline{U \cap A}$. لذلك الاحتواء $\overline{U} \subset \overline{U \cap A}$ يكون محقق. الاحتواء العكسي يكون بديهي.

نظرية ٣-٢١. نفرض أن (X,τ) فضاءا توبولوجيا و $A \subset X$. إذن A تكون كثيفة في X إذا وفقط إذا كان $U \cap A \neq \phi$ لكل $\phi \neq U \in \tau$.

البرهان: بسيط ويترك للقارئ كتمرين.

كثافة الفضاء التوبولوجي density of X تعرف بأنها أقل عدد كارديناني على الصورة $|A|$، حيث A مجموعة جزئية كثيفة في X. يرمز لهذا العدد الكارديناني بالرمز $d(X)$.

نظرية ٣-٢٢. لأي فضاء توبولوجي X يكون $d(X) \leq w(X)$.

البرهان: نفرض أن $\mathscr{B} = \{B_s\}_{s \in S}$ أساس للفضاء X يتكون من مجموعات غير خالية بحيث أن $|S| = m = w(X)$. نختار لكل $s \in S$ نقطة $a_s \in B_s$، واضح أن المجموعة $A = \{a_s : s \in S\}$ تكون كثيفة في X. حيث أن $|A| \leq |S| = m$، فإن $d(X) \leq w(X)$.

نتيجة ٣-٢٣. كل فضاء عد من النوع الثاني يكون قابل للفصل.

عندما نتعامل مع فضاء توبولوجي (X,τ) وفضاء جزئي (Y,τ_Y)، فإننا ينبغي أن نكون على حذر عند أخذ الإغلاق للمجموعات. إذا كانت A مجموعة جزئية من Y، إغلاق A في Y و إغلاق A في X على وجه العموم يكونا مختلفين. سوف نرمز إلى إغلاق A في X بالرمز $Cl_X(A)$ وإغلاق A في Y بالرمز $Cl_Y(A)$. علاقة $Cl_X(A)$ مع $Cl_Y(A)$ توضحها النظرية التالية.

نظرية ٣-٢٤. نفرض Y فضاء جزئي من الفضاء التوبولوجي X، إذن

$$Cl_Y(A) = Cl_X(A) \cap Y$$

البرهان: المجموعة $Cl_X(A)$ مغلقة في X. من نظرية ٢-٤٦ ، $Cl_X(A) \cap Y$ تكون مغلقة في Y، لذلك

$$Cl_Y(A) \subset Cl_X(A) \cap Y$$

من جهة أخرى، نعلم أن $Cl_Y(A)$ مغلقة في Y، لذلك من نظرية ٢-٤٧، $Cl_Y(A) = F \cap Y$ لمجموعة ما F مغلقة في X. حيث أن F مجموعة مغلقة في X و $Cl_X(A)$ هي أصغر مجموعة مغلقة في X تحتوي A فإن $Cl_X(A) \subset F$. لذلك

$$Cl_X(A) \cap Y \subset F \cap Y = Cl_Y(A)$$

تعريف ٣-٢٥. تجمع المجموعات الجزئية $\{A_s\}_{s\in S}$ في الفضاء التوبولوجي X يسمى **منتهي موضعيا** locally finite إذا كان لكل نقطة $x \in X$ يوجد جوار U بحيث تكون المجموعة $\{s \in S : U \cap A_s \neq \phi\}$ منتهية. أي أن كل نقطة في الفضاء التوبولوجي X يكون لها جوار يقطع فقط عدد منتهي من عناصر هذا التجمع.

إذا كان كل نقطة $x \in X$ لها جوار يقطع على الأكثر مجموعة واحدة من التجمع المعطى، فإن هذا التجمع يسمى **متقطع** discrete. واضح أن كل تجمع متقطع، وكذلك كل تجمع منتهي، يكون منتهي موضعيا.

نظرية ٣-٢٦. في الفضاء التوبولوجي (X,τ)، لكل تجمع منتهي موضعيا $\{A_s\}_{s\in S}$، يكون $\overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \bigcup_{s\in S} \overline{A_s}$.

البرهان: من تمهيدية ٣-١٥، ينتج أن $\overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s\in S} A_s}$، لكل $s\in S$. لذلك يكون $\bigcup_{s\in S} \overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s\in S} A_s}$. لإثبات الاحتواء العكسي، لاحظ أنه من خاصية أن التجمع $\{A_s\}_{s\in S}$ منتهي موضعيا ، لكل $x \in \overline{\bigcup_{s\in S} A_s}$ يوجد جوار U بحيث أن المجموعة $S_0 = \{s\in S : U\cap A_s \neq \phi\}$ تكون منتهية. من نظرية ٣-١٣ ينتج أن $x \notin \overline{\bigcup_{s\in S\backslash S_0} A_s}$، حيث أن

$$x \in \overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \overline{\bigcup_{s\in S_0} A_s} \cup \overline{\bigcup_{s\in S\backslash S_0} A_s}$$

نحصل على $x \in \overline{\bigcup_{s\in S_0} A_s} = \bigcup_{s\in S_0} \overline{A} \subset \bigcup_{s\in S} \overline{A}$.

نتيجة ٣-٢٧. نفرض أن $\mathscr{F}$ تجمع منتهي موضعيا و $F = \bigcup \mathscr{F}$. إذا كانت كل عناصر $\mathscr{F}$ مجموعات مغلقة، فإن F تكون مجموعة مغلقة، وإذا كان كل عناصر $\mathscr{F}$ مجموعات مفتوحة ومغلقة في آن واحد، فإن F تكون مفتوحة ومغلقة.

نظرية ٣-٢٨. إذا كان $\{A_s\}_{s\in S}$ تجمع منتهي موضعيا (متقطع)، فإن التجمع $\{\overline{A_s}\}_{s\in S}$ يكون أيضا منتهي موضعيا (متقطع).

٣-٣ داخل مجموعة Interior of a set

تعريف ٣-٢٩. نفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X,τ). **داخل** المجموعة interior of A هو اتحاد كل المجموعات المفتوحة المحتواة في A، يرمز لداخل A بالرمز A° أو $Int(A)$. أي أن

$$Int(A) = \cup\{U : U\subset A, U\in\tau\} = A^\circ$$

نقول أن x **نقطة داخلية** interior point للمجموعة A إذا وفقط إذا كان $x\in A^\circ$.

من التعريف يمكن ملاحظة أن داخل المجموعة A، A°، يكون مجموعة مفتوحة، حيث أنه اتحاد عدد اختياري لمجموعات مفتوحة، وهو أكبر مجموعة مفتوحة محتواة داخل A. أيضا $A = A^\circ$ إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة.

من تعريف إغلاق المجموعة وداخل المجموعة نلاحظ أنه لأي مجموعة جزئية A في الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون

$$Int(A) \subset A \subset Cl(A)$$

مثال ٣-٣٠. نفرض أن $X = \{a,b,c,d,e\}$ و $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$.

أوجد $\{a,b,c\}^\circ$، $\{a,b,e\}^\circ$ و $\{b,c,e\}^\circ$.

الحل: المجموعات المفتوحة المحتواة داخل $\{a,b,c\}$ هي $\{a\}$و $\{a,b\}$. لذلك $\{a,b,c\}^\circ = \{a,b\} \cup \{a\} = \{a,b\}$.

بالمثل $\{a,b,e\}^\circ = \{a,b,e\}$ و $\{b,c,e\}^\circ = \phi$.

ماذا يمكنك أن تستنتج من هذا المثال؟

نظرية ٣-٣١. نفرض أن (X, τ) فضاءا توبولوجيا، $A, B \subset X$ و $x \in X$. إذن

١- $x \in A^\circ$ إذا وفقط إذا كان يوجد $U \in \tau$ بحيث $x \in U \subset A$.

٢- A تكون مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كان لكل $x \in A$ توجد مجموعة مفتوحة U بحيث $x \in U \subset A$.

٣- إذا كان $A \subset B$ فإن $A^\circ \subset B^\circ$.

٤- $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$ و $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

٥- $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

البرهان: سوف نبرهن (٤) ونترك بقية الأجزاء كتمرين للقارئ.

$$\begin{aligned} X \setminus \overline{A} &= X \setminus \cap\{F : A \subset F, X \setminus F \in \tau\} \\ &= \cup\{X \setminus F : X \setminus F \subset X \setminus A, X \setminus F \in \tau\} \end{aligned}$$

$$= \cup\{U : U \subset X \setminus A, U \in \tau\}$$
$$= (X \setminus A)^\circ$$

بالمثل يمكن إثبات أن $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

مؤثر الداخل الذي يعين لكل مجموعة جزئية A في الفضاء التوبولوجي X، مجموعة $A^\circ \subset X$ له خواص تناظر خواص مؤثر الإغلاق، نوردها في النظرية التالية، والتي تنتج من نظرية ٣-١٦ و ٣-٢٥(٤) وقوانين دي مورجان.

نظرية ٣-٣٢. مؤثر الداخل يحقق الخواص التالية

(١) $X^\circ = X$.

(٢) $A^\circ \subset A$.

(٣) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(٤) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

في بعض الكتب يشار إلى داخل مكملة المجموعة A في الفضاء التوبولوجي X بأنها **خارج** exterior المجموعة A ويرمز له بالرمز $ext(A)$، أي أن $ext(A) = (X \setminus A)^\circ$. إذا كانت $x \in ext(A)$ فإن x تسمى **نقطة خارجية** exterior point للمجموعة A.

تعريف ٣-٣٣. نفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ). **حدود** boundary of A، يرمز لها بالرمز ∂A أو $b(A)$ أو A^b، تعرف كما يلي

$$\partial A = Cl(A) \setminus Int(A)$$

نقول أن x **نقطة حدية** boundary point للمجموعة A إذا وفقط إذا كان $x \in \partial A$.

نظرية ٣-٣٤. نفرض أن (X, τ) فضاءا توبولوجيا، $A, B \subset X$ و $x \in X$. إذن

١- $x \in \partial A$ إذا وفقط إذا كان $U \cap A \neq \phi$ و $U \cap (X \setminus A) \neq \phi$ لكل $U \in \tau$ بحيث $x \in U$.

٢- $X = A^{\circ} \cup \partial A \cup (X \setminus \overline{A})$ يكون اتحاد منفصل.

البرهان:

(١) $x \in \partial A \Leftrightarrow x \in \overline{A} - A^{\circ} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \notin A^{\circ}$

$\Leftrightarrow U \cap A \neq \phi \wedge U \cap (X \setminus A) \neq \phi \ \ \forall U \in \tau, x \in U$

(٢) ينتج من تعريف ∂A ومن حقيقة أن $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$.

نظام الجوارات

نفرض أن (X, τ) فضاءا توبولوجيا ونفرض أنه لكل نقطة $x \in X$ يوجد أساس موضعي $\mathcal{N}_x$ عند x. التجمع $\{\mathcal{N}_x\}_{x \in X}$ يسمى نظام الجوارات للفضاء (X, τ).

الحقائق الأساسية حول نظام الجوارات لفضاء توبولوجي، تسمى مسلمات الجوار، يمكن تلخيصها في النظرية التالية:

نظرية ٣-٣٥. نفرض أن (X, τ) فضاءا توبولوجيا و لكل $x \in X$ نفرض أن $\mathcal{N}_x$ هو نظام الجوار للنقطة x. إذن التجمع $\{\mathcal{N}_x\}_{x \in X}$، يسمى نظام الجوار للفضاء (X, τ)، يحقق الخواص التالية:

$(N1)$ $\mathcal{N}_x$ مجموعة غير خالية، و x تنتمي إلى كل عنصر في $\mathcal{N}_x$.

$(N2)$ إذا كان $x \in U \in \mathcal{N}_y$ فإنه يوجد $V \in \mathcal{N}_x$ بحيث $V \subset U$.

$(N3)$ إذا كان $U_1, U_2 \in \mathcal{N}_x$ يوجد $U \in \mathcal{N}_x$ بحيث $U \subset U_1 \cap U_2$.

البرهان: $N1$ ينتج من التعريف. $N2$ و $N3$ ينتج من التعريف لأن $U \in \mathcal{N}_x$ و $U_1 \cap U_2$

طرق أخرى لتكوين توبولوجي

رأينا في الباب الأول كيف يمكن تكوين توبولوجي على مجموعة وذلك بإعطاء تجمع من المجموعات الجزئية من X، تسمى مجموعات مغلقة أو تجمع من المجموعات الجزئية من X، تسمى أساس أو تجمع من المجموعات الجزئية من X، تسمى أساس جزئي. الآن نقدم طريقة أخرى لتكوين توبولوجي على مجموعة وذلك عن طريق مؤثر الإغلاق.

نظرية ٣-٣٦. نفرض أن X غير خالية ونعرف مؤثر يعين لكل مجموعة جزئية $A \subset X$، مجموعة $\overline{A} \subset X$ بحيث تتحقق الخواص الواردة في نظرية ٣- ١٦. برهن أن التجمع

$$\tau = \{X \setminus A : A = \overline{A}\}$$

يكون توبولوجي على X حيث، لكل $A \subset X$ ، $\overline{A}$ هو إغلاق المجموعة A في الفضاء التوبولوجي (X,τ). τ يسمى التوبولوجي المولد بمؤثر الإغلاق.

البرهان: لإثبات الجزء الأول من النظرية يكفي إثبات أن $\mathcal{C} = \{A : A = \overline{A}\}$ يحقق الخواص الثلاث في نظرية ٢-١٧. حيث أن $\overline{A} \subset X$ لكل $A \subset X$ ، فإن $\overline{X} \subset X$ ، وبالتالي من نظرية ٣-١٦(٢) يكون $\overline{X} = X$. من نظرية ٣-١٦(١) ، $\overline{\phi} = \phi$. لذلك $\mathcal{C}$ تحقق الخاصية الأولى من نظرية ٢-١٧.

نفرض أن $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$ ، أي نفرض أن $\overline{F_1} = F_1$ و $\overline{F_2} = F_2$. من نظرية ٣-١٦(٣)، $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F_1} \cup \overline{F_2} = F_1 \cup F_2$ ، وهذا يعني أن $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{C}$. لذلك التجمع $\mathcal{C}$ يحقق الخاصية الثالثة من نظرية ٢-١٧.

الآن لاحظ أن

$$\text{إذا كان } A \subset B \text{ فإن } \overline{A} \subset \overline{B} \qquad (*)$$

نفرض أن $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ عائلة من عناصر $\mathcal{C}$ ، أي أن $\overline{F_\alpha} = F_\alpha$ لكل $\alpha \in \Lambda$.

حيث أن $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha \subset F_\alpha$ ، من (*)، يكون $\overline{\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha} \subset \overline{F_\alpha} = F_\alpha$. وهذا يؤدي إلى $\overline{\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha} \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$. هذا الاحتواء مع نظرية ٣-١٦(٢) يبين أن $\overline{\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$. لذلك التجمع $\mathcal{C}$ يحقق الخاصية الثانية من نظرية ٢-١٧.

نفرض أن $Cl(A)$ ترمز إلى إغلاق المجموعة A في الفضاء التوبولوجي (X,τ). سوف نبين أن $Cl(A) = \overline{A}$ لكل $A \subset X$. من نظرية ٣-١٦(٤)، $\overline{A} \in \mathcal{C}$ لكل $A \subset X$ ، لذلك $Cl(A) \subset \overline{A}$. لكل

مجموعة F مغلقة في X تحتوي A، أي لكل $F \subset X$ بحيث $F = \overline{F}$ و $A \subset F$، يكون $\overline{A} \subset \overline{F} = F$. ومن ثم

$$\overline{A} \subset \bigcap\{F : F = \overline{F},\ A \subset F\} = ClA$$

وهذا يبرهن أن $Cl(A) = \overline{A}$.

أيضا يمكن استخدام مؤثر الداخل لتعريف توبولوجي على مجموعة.

نظرية ٣-٣٧. نفرض أن X مجموعة اختيارية ونعرف مؤثر يعين لكل مجموعة جزئية $A \subset X$، مجموعة $A^{\circ} \subset X$ بحيث تتحقق الخواص الأربع في نظرية ٣-٢٦. نفرض أن $\tau = \{A : A = A^{\circ}\}$. برهن أن τ يكون توبولوجي على X ولكل $A \subset X$، A° تكون هي داخل المجموعة A في الفضاء التوبولوجي (X,τ).

البرهان: مثل برهان نظرية ٣-٣٦.

نظرية ٣-٣٨. نفرض أن X مجموعة غير خالية ونفرض أن التجمع $\{\mathcal{N}_x\}_{x\in X}$ من عائلات لمجموعات جزئية من X يحقق الخواص $(N1)-(N3)$. نفرض أن τ هو تجمع كل المجموعات الجزئية من X التي تكون اتحادات عائلات جزئية من $\bigcup_{x\in X}\mathcal{N}_x$. τ يحقق الشروط $(O1)-(O3)$ والتجمع $\{\mathcal{N}_x\}_{x\in X}$ يكون هو نظام الجوارات للفضاء التوبولوجي (X,τ).

التوبولوجي τ يسمى التوبولوجي المولد بنظام الجوارات $\{\mathcal{N}_x\}_{x\in X}$.

تمارين ٣-١

١- نفرض أن A، B و A_α ترمز إلى مجموعات جزئية من الفضاء التوبولوجي X. حدد أي من المتطابقات التالية تكون محققة. إذا كانت متطابقة غير محققة ، حدد ما إذا كانت علاقة الاحتواء $\subset$ أو $\supset$ محققة.

(أ) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(ب) $\overline{\cap A_\alpha} = \cap \overline{A_\alpha}$.

(ج) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}$.

٢- نفرض أن τ هو التوبولوجي المعرف على $\mathbb{N}$ كما يلي $\tau = \{\phi, E_n\}$ حيث $E_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$، $n \in \mathbb{N}$.

(أ) أوجد نقاط النهاية للمجموعة $A = \{4, 13, 28, 37\}$.

(ب) حدد المجموعات الجزئية E من $\mathbb{N}$ بحيث $E' = \mathbb{N}$.

٣- نفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي (X, τ). متى تكون النقطة $p \in X$ ليست نقطة نهاية للمجموعة A؟

٤- نفرض أن A أي مجموعة جزئية من الفضاء المتقطع X. برهن على أن $A' = \phi$.

٥- نفرض أن X هو الفضاء غير المتقطع.

(أ) أوجد إغلاق أي مجموعة جزئية A من X.

(ب) حدد المجموعات الكثيفة في X.

٦- نفرض أن A مجموعة جزئية خالصة (فعلية) من الفضاء غير المتقطع X. أوجد A°، $(X \setminus A)^\circ$ و ∂A.

٧- حدد نظام الجوارات لنقطة p في الفضاء غير المتقطع X.

٨- نعتبر التوبولوجي التالي على المجموعة $X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$

أكتب كل الجوارات للنقطة (أ) e ، (ب) c.

٩- برهن على أن المجموعة A في الفضاء التوبولوجي X تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت جوار لكل نقطة فيها.

١٠- برهن أنه إذا كانت A مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي X فإن $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

١١- برهن أنه إذا كانت A مجموعة كثيفة في الفضاء التوبولوجي X و B مجموعة مفتوحة في X فإن $A \cap B \neq \phi$.

١٢- بين أن كل مجموعة جزئية ليست منتهية في فضاء المكملات المنتهية اللانهائي X تكون كثيفة في X.

١٣- نفرض أن A مجموعة جزئية من الفضاء التوبولوجي X. برهن على أن

(أ) $\partial A \subset A$ إذا وفقط إذا كان A مغلقة.

(ب) $\partial A \cap A = \phi$ إذا وفقط إذا كان A مفتوحة.

(ج) $\partial A = \phi$ إذا وفقط إذا كانت A مفتوحة ومغلقة.

١٤- نفرض أن X هو فضاء المكملات المنتهية. بين أن كل جوار لنقطة p في X يكون مجموعة مفتوحة.

١٥- بين أن كل فضاء مرتب يكون هاوسدورف.

١٦- بين أن المجموعة الجزئية $A \subset X$ من الفضاء التوبولوجي X تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت تحتوي جميع نقاط النهاية لها.

١٨- بين أن المجموعة الجزئية $A \subset X$ من الفضاء التوبولوجي X كثيفة إذا وفقط إذا كل مجموعة مفتوحة في X تحتوي نقطة من A.

١٩- نفرض أن X هو الفضاء المتقطع. بين أن المتتابعات التقاربية في X تكون فقط هي المتتابعات التي غالبا تكون ثابتة، أي المتتابعة $\{x_i\}$ بحيث $x_i = x$ لكل i أكبر من عدد ما طبيعي N.

٢٠- صف نظام الجوارات لنقطة في

(أ) الفضاء المتقطع، (ب) الفضاء غير المتقطع،

(ج) فضاء النقطة المختارة، (د) فضاء سيربنيسكي.

٢١- في $\mathbb{R}$ برهن أن

(أ) $[0,1)^\circ = (0,1)$ ، (ب) $\mathbb{Q}^\circ = \phi$ ،

(ج) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \phi$.

٢٢- في $\mathbb{R}$ برهن أن

(أ) $\overline{[0,1)} = [0,1]$ ، (ب) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ و

(ج) $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

٢٣- برهن أن المجموعة A في الفضاء التوبولوجي X تكون مغلقة إذا وفقط إذا كان $\partial A \subset A$.

٢٤- برهن أنه للمجموعة A في الفضاء التوبولوجي X يكون $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

٢٥- نفرض أن X مجموعة لا نهائية، $x_0 \in X$ و τ هو التجمع المكون من كل المجموعات الجزئية من X التي لا تحتوي x_0 وكل المجموعات الجزئية من X التي لها مكملة منتهية.

(أ) برهن أن τ يكون توبولوجي على X.

(ب) بين أن كل المجموعات على الصورة $\{x\}$، لكل $x \in X$ بحيث $x \neq x_0$، تكون مجموعة ومغلقة.

(ج) بين أن المجموعة $\{x_0\}$ تكون مغلقة ولكنها ليست مفتوحة.

(د) بين أن تجمع كل المجموعات على الصورة $\{x\}$، لكل $x \in X$ بحيث $x \neq x_0$، وكل المجموعات على الصورة $X \setminus F$ حيث F مجموعة منتهية، يكون أساس للتوبولوجي τ. هذا الأساس له أقل عدد كاردينالي. لذلك وزن (X,τ) يساوي العدد الكاردينالي لـ X.

(هـ) بين أن تجمع كل المجموعات على الصورة $\{x\}$، لكل $x \in X$ بحيث $x \neq x_0$، وكل المجموعات على الصورة $X \setminus \{x\}$ ، يكون أساس جزئي للتوبولوجي τ.

(و) برهن أن

$$\overline{A}=\begin{cases} A & \text{if } A \text{ is finite} \\ A\cup\{x_0\} & \text{if } A \text{ is infinite} \end{cases}$$

و

$$A^{\circ}=\begin{cases} A & \text{if } X\setminus A \text{ is finite} \\ A\setminus\{x_0\} & \text{if } X\setminus A \text{ is infinite} \end{cases}$$

لأي مجموعة جزئية $A \subset X$.

٢٦- المجموعة الجزئية U في الفضاء التوبولوجي X تسمى مفتوحة بانتظام regularly open إذا كانت تحقق الشرط $U = Int(Cl(U))$.

(أ) برهن أن $Int(F)$ يكون مجموعة مفتوحة بانتظام لأي مجموعة مغلقة F.

(ب) بين أن تقاطع مجموعتين مفتوحتين بانتظام يكون مجموعة مفتوحة بانتظام. لاحظ أن اتحاد مجموعتين مفتوحتين بانتظام ليس بالضرورة أن يكون مجموعة مفتوحة بانتظام.

(ج) المجموعة الجزئية A في الفضاء التوبولوجي X تسمى مغلقة بانتظام regularly closed إذا كانت تحقق الشرط $A = Cl(Int(A))$. بين أن A تكون مغلقة بانتظام إذا وفقط إذا كانت مكملتها مفتوحة بانتظام. أعد صياغة وبرهن الخواص في (أ) و (ب) مع المجموعات المغلقة بانتظام.

٢٧- نفرض أن X فضاء توبولوجي و $A, B \subset X$. أثبت أن

(i) $A^\circ = A \setminus \partial A$.

(ii) $\overline{A} = A \cup \partial A$.

(iii) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

(iv) $\partial(A \cap B) \subset (\overline{A} \cap \partial B) \cup (\partial A \cap \overline{B})$.

(v) $\partial(X \setminus A) = \partial A$.

(vi) $X = A^\circ \cup \partial A \cup (X \setminus A)^\circ$.

(vii) $\partial \overline{A} \subset \partial A$.

(viii) $\partial A^\circ \subset \partial A$.

(ix) A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $\partial A = \overline{A} \setminus A$.

(x) A تكون مغلقة إذا وفقط إذا كان $\partial A = A \setminus A^\circ$.

(xi) A تكون مفتوحة ومغلقة إذا وفقط إذا كان $\partial A = \phi$.

٢٨- برهن أنه لأي مجموعة جزئية مغلقة F في الفضاء التوبولوجي X ولكل مجموعة جزئية $A \subset X$ يكون

$$(F \cup A^\circ) = (F \cup A)^\circ$$