الباب الثاني
الفضاءات التوبولوجية
Topological spaces

مفهوم الفضاءات التوبولوجية انبثق عن دراسة الخط الحقيقي والفضاء الاقليدي ودراسة الدوال المتصلة على هذه الفضاءات. في هذا الباب نقدم تعريف ما هو الفضاء التوبولوجي، وندرس عددا من الطرق لتكوين توبولوجي على مجموعة بحيث تتحول إلى فضاء توبولوجي. أيضا نتعرض للمفاهيم الأولية التي تصاحب الفضاءات التوبولوجية مثل المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة. أيضا نقدم مفهوم الأساس والأساس الجزئي لتوبولوجي كما نقدم مفهوم التوبولوجي المرتب على مجموعة مرتبة. في نهاية الباب نقدم مفهوم التوبولوجي النسبي والفضاء الجزئي.

٢-١ التوبولوجي Topology

تعريف الفضاء التوبولوجي الذي أصبح الآن قياسيا أخذ وقتا طويلا في الصياغة. العديد من الرياضيين مثل Frechet و Hausdorff وآخرون اقترحوا تعريفات مختلفة على مدى فترة زمنية خلال العقود الأولى من القرن العشرين ولكن الأمر استغرق بعض الوقت قبل أن يستقر الرياضيون على أحدها والذي يبدوا أكثر ملائمة. الرياضيون بالطبع أرادوه تعريفا واسعا قدر الإمكان، بحيث يشمل كحالات خاصة كل الأمثلة المختلفة والتي كانت مفيدة في الرياضيات، الفضاء الاقليدي، الفضاء الاقليدي لانهائي البعد وفضاءات الدوال بينها. ولكن أيضا رغبوا أن يكون التعريف ضيقا بحيث أن النظريات القياسية عن الفضاءات الشهيرة تتحقق للفضاءات التوبولوجية على وجه العموم. هذه دائما هي المشكلة عندما نحاول صياغة مفهوم رياضي جديد، هو تحديد كيف يكون تعريفه عام. أخيرا، التعريف قد يبدو أنه مجرد إلى حد ما، ولكن في التعامل مع الطرق المختلفة لتكوين الفضاءات التوبولوجية سوف يكون لدينا شعور أفضل حول معنى المفهوم.

تعريف ٢-١. الفضاء التوبولوجي topological space هو ثنائي مرتب (X,τ)، حيث X مجموعة غير خالية و τ تجمع من المجموعات الجزئية من X يحقق الخواص التالية:

$(O1)$ $X,\phi\in\tau$.

$(O2)$ إذا كان $U_\alpha\in\tau$ حيث $\alpha\in I$ فإن $\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha\in\tau$.

$(O3)$ إذا كان $U,V\in\tau$ فإن $U\cap V\in\tau$.

بالاستنتاج السريع يمكننا بيان أنه إذا كان $U_1,U_2,\dots,U_n\in\tau$ فإن

$$\bigcup_{i=1}^{n}U_i\in\tau .$$

التجمع τ يسمى **توبولوجي** على X topology on. عناصر τ تسمى **مجموعات مفتوحة** open sets في X.

إذن الفضاء التوبولوجي يتكون من مجموعة غير خالية X مع توبولوجي τ على X. في كثير من الأحيان نهمل الإشارة إلى τ إذا لم يحدث غموض. في هذه الحالة نقول الفضاء التوبولوجي X أو الفضاء X، للاختصار.

باستخدام مفهوم المجموعات المفتوحة يمكن وصف الفضاء التوبولوجي على أنه مجموعة غير خالية مع تجمع τ من المجموعات المفتوحة في X بحيث يكون

$(O1')$ X و ϕ مجموعات مفتوحة.

$(O2')$ إتحاد أي عدد اختياري (منتهي أو لا نهائي) من المجموعات المفتوحة في X يكون مجموعة مفتوحة في X. وهنا نقول أن τ تكون مغلقة بالنسبة للاتحاد الاختياري.

$(O3')$ تقاطع أي عدد منتهي من المجموعات المفتوحة في X يكون مجموعة مفتوحة في X. وهنا نقول أن τ تكون مغلقة بالنسبة للتقاطع المنتهي.

أمثلة للفضاءات التوبولوجية

الآن نعطي أمثلة للفضاءات التوبولوجية لنتعرف على كيفية التحقق من خواص التوبولوجي. أيضا نعطي أمثلة لفضاءات توبولوجية مشهورة، كثيرا ما يشار إليها خلال دراسة التوبولوجي.

مثال ٢-٢. نفرض مجموعة بها ثلاثة عناصر $X=\{a,b,c\}$. يوجد العديد من التوبولوجيات التي يمكن تعريفها على X، وهي

$\tau_1=\{X,\phi\}$ ، $\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$،

$\tau_3=\{X,\phi,\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$، $\tau_4=\{X,\phi,\{b\}\}$،

$\tau_5=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$، $\tau_6=\{X,\phi,\{a,b\}\}$،

$\tau_7=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$،

$\tau_8=\{X,\phi,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,b\}\}$،

$\tau_9=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$.

من هذا المثال نجد أنه رغم أن المجموعة بها فقط ثلاثة عناصر، فإنه يوجد العديد من التوبولوجيات. ومع ذلك ليس كل تجمع من المجموعات الجزئية من X يكون توبولوجي، فمثلا لا التجمع $\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$ ولا التجمع $\{X,\phi,\{a,b\},\{b,c\}\}$ يكون توبولوجي على X، حيث الأول ليس مغلقا بالنسبة للاتحاد، أما الثاني فليس مغلقا بالنسبة للتقاطع المنتهي.

مثال ٢-٣ . نعتبر المجموعة $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ ونفرض أن

$\tau_1=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$ ،

$\tau_2=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,e\},\{b,c,d\}\}$ ،

$\tau_3=\{X,\phi,\{a\},\{f\},\{a,f\},\{a,c,f\},\{b,c,d,e,f\}\}$.

واضح أن τ_1 يحقق الخواص الثلاث في تعريف ١-١، ومن ثم يكون توبولوجي على X. بينما τ_2 و τ_3 أي منهما لا يكون توبولوجي على X، حيث أن $\{a\},\{c,d\}\in\tau_2$ بينما $\{a\}\cup\{c,d\}=\{a,c,d\}\notin\tau_2$، ومن ثم τ_2 لا تحقق $(O2)$.

كذلك $\{a,c,f\},\{b,c,d,e,f\}\in\tau_3$

بينما $\{a,c,f\}\cap\{b,c,d,e,f\}=\{c,f\}\notin\tau_3$،

أي أن τ_3 لا تحقق $(O3)$.

مثال ٢-٤ . نعتبر مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$، ونفرض أن τ تتكون من $\mathbb{N}$ و ϕ وكل المجموعات الجزئية المنتهية من $\mathbb{N}$. إذن τ لا يكون توبولوجي على $\mathbb{N}$، حيث أن الاتحاد اللانهائي

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \ldots \cup \{n\} \cup \ldots = \{2,3,\ldots,n,\ldots\}$$

من عنصر τ لا يكون عنصرا في τ. أي أن τ لا تحقق الشرط الثاني من تعريف التوبولوجي.

مثال ٢-٥ . نفرض X مجموعة غير خالية و $\tau = P(X)$، تجمع كل المجموعات الجزئية من X. إذن τ يكون توبولوجي على X، يسمى **التوبولوجي المتقطع** discrete topology. في هذه الحالة (X,τ) يسمى **الفضاء التوبولوجي المتقطع** discrete topological space. لاحظ أن τ تحقق الخواص الثلاث في تعريف ١-١. يرمز للتوبولوجي المتقطع بالرمز $\mathscr{D}$.

مثال ٢-٦ . نفرض X مجموعة غير خالية و $\tau = \{X,\phi\}$. إذن τ يكون توبولوجي على X، يسمى **التوبولوجي التافه** trivial topology أو **التوبولوجي غير المتقطع** indiscrete topology. الفضاء التوبولوجي (X,τ) في هذه الحالة يسمى **الفضاء التوبولوجي التافه** trivial topological space أو **الفضاء التوبولوجي غير المتقطع** indiscrete topological space. تحقق من أن τ تحقق الخواص الثلاث في تعريف ١-١. يرمز للتوبولوجي غير المتقطع بالرمز $\mathscr{I}$.

مثال ٢-٧ . نفرض أن $X = \{a,b,c\}$ و τ توبولوجي على X بحيث أن $\{a\} \in \tau$، $\{b\} \in \tau$ و $\{c\} \in \tau$. برهن أن τ يكون هو التوبولوجي المتقطع على X.

الحل: لكي نبرهن أن τ هو التوبولوجي المتقطع يجب أن نبرهن أن كل مجموعة جزئية من X تنتمي إلى τ. حيث أن X مجموعة تتكون من ثلاثة عناصر فإن $P(X)$ تحتوي ثمانية $(2^3 = 8)$ عناصر وهي X، $\{a,b\}$، $\{a,c\}$، $\{b,c\}$، $\{a\}$، $\{b\}$، $\{c\}$، ϕ. من الفرض $\{a\} \in \tau$، $\{b\} \in \tau$ و $\{c\} \in \tau$. حيث أن τ توبولوجي على X، من

تعريف ١-١، $X,\phi\in\tau$. أيضا $\{a,b\}=\{a\}\cup\{b\}\in\tau$. بالمثل $\{a,c\}\in\tau$ و$\{b,c\}\in\tau$. من ذلك يتضح أن τ **يكون** هو التوبولوجي المتقطع على X.

الحالة في المثال السابق يمكن تعميمها لأي فضاء توبولوجي فنقول أنه إذا كان (X,τ) فضاءا توبولوجيا بحيث **تكون** $\{x\}\in\tau$ لكل $x\in X$ فإن τ يكون هو التوبولوجي المتقطع (برهن).

مثال ٢-٨ . نفرض X مجموعة غير خالية، $p\in X$ ونفرض أن τ يتكون من ϕ وكل المجموعات الجزئية من X التي **تحتوي** p. أي أن

$$\tau=\{\phi,U\subseteq X:p\in U\}$$

يمكن التحقق من أن τ يكون توبولوجي على X. هذا التوبولوجي يسمى **توبولوجي النقطة المختارة** particular point topology. الفضاء التوبولوجي (X,τ) يسمى **فضاء النقطة المختارة** particular point space. يرمز لتوبولوجي النقطة المختارة بالرمز $\mathcal{P}$. كمثال **فضاء سيربينسكي** Sierpinski space هو المجموعة $X=\{0,1\}$ مع توبولوجي النقطة المختارة 0، أي $\tau=\{\phi,\{0\},X\}$.

مثال ٢-٩ . نفرض X مجموعة غير خالية، $e\in X$ ونفرض أن τ يتكون من X وكل المجموعات الجزئية من X **التي** لا تحتوي p. أي أن

$$\tau=\{\phi,U\subseteq X:e\notin U\}$$

يمكن التحقق من أن τ يكون توبولوجي على X. هذا التوبولوجي يسمى **توبولوجي النقطة المستبعدة** excluding point topology. الفضاء التوبولوجي (X,τ) يسمى **فضاء النقطة المستبعدة** excluding point space. يرمز لتوبولوجي النقطة المستبعدة بالرمز $\mathcal{E}$.

مثال ٢-١٠ . نفرض X مجموعة غير خالية و τ تجمع من المجموعات الجزئية من X يتكون من ϕ وكل **المجموعات** الجزئية من X التي مكملاتها تكون منتهية. أي أن

$$\tau = \{\phi, U \subset X : X^c = X \setminus U \text{ is finite}\}$$

يمكن إثبات أن τ يكون توبولوجي على X. هذا التوبولوجي يسمى **توبولوجي المكملات المنتهية** complement finite topology أو cofinite topology. الفضاء التوبولوجي (X,τ) يسمى **فضاء المكملات المنتهية**. يرمز لهذا التوبولوجي بالرمز $\mathscr{C}$.

مثال ٢-١١ . نعتبر مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ونفرض أن τ هو التوبولوجي على $\mathbb{N}$ المكون من ϕ وكل المجموعات الجزئية من $\mathbb{N}$ التي مكملاتها في $\mathbb{N}$ تكون منتهية. لكل $n \in \mathbb{N}$، نعرف S_n كما يلي

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \ldots = \{1\} \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}$$

واضح أن S_n تكون مفتوحة في التوبولوجي τ، حيث أن مكملتها مجموعة منتهية. ومع ذلك $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\}$. وحيث أن مكملة $\{1\}$ في $\mathbb{N}$ ليست منتهية فإن $\{1\}$ لا تكون مجموعة مفتوحة، وهذا يبين أن تقاطع عدد لا نهائي من المجموعات المفتوحة قد لا يكون مجموعة مفتوحة.

تعريف ٢-١٢ . نفرض أن τ و τ' توبولوجيان على المجموعة غير الخالية X. نقول أن τ' **أكبر من (أدق من)** finer than τ و τ **أصغر من (أخشن من)** coarser than τ' إذا كان $\tau \subset \tau'$.

أدق توبولوجي the finest على المجموعة غير الخالية X هو التوبولوجي المتقطع والذي به أكبر عدد من المجموعات المفتوحة وأخشن توبولوجي the coarsest هو التوبولوجي التافه الذي به أقل عدد من المجموعات المفتوحة. يمكن لتوبولوجيان أن يكونا غير قابلين للمقارنة. في مثال ٢-٢، واضح أن $\tau_4 \subset \tau_3$ و $\tau_6 \subset \tau_7$ ولكن τ_4 و τ_5 غير قابلين للمقارنة.

المجموعات المغلقة

تعريف ٢-١٣. نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. المجموعة الجزئية S من X تسمى **مجموعة مغلقة** closed set إذا كانت مكملتها $X \setminus S$ مجموعة مفتوحة. أي أن S تكون مجموعة مغلقة إذا كان $X \setminus S \in \tau$.

مثال ٢-١٤ . في مثال ٢-٣ المجموعات X، ϕ، $\{a\}$، $\{b,e,f\}$، $\{a,b,e,f\}$، $\{b,c,d,e,f\}$ هي المجموعات المغلقة في (X,τ_1).

مثال ٢-١٥ . في الفضاء التوبولوجي المتقطع كل مجموعة جزئية من X تكون مغلقة وفي الفضاء التوبولوجي غير المتقطع المجموعات المغلقة هي X و ϕ فقط.

مثال ٢-١٦ . في فضاء المكملات المنتهية على المجموعة X، المجموعات المغلقة تكون هي X نفسها وكل المجموعات الجزئية المنتهية من X.

من تعريف المجموعات المفتوحة وعلاقتها بالمجموعات المغلقة ومن قوانين دي مورجان، يمكن صياغة النظرية التالية والتي تعطي خواص المجموعات المغلقة.

نظرية ٢-١٧ . نفرض أن (X,τ) فضاء توبولوجي. إذن تجمع كل المجموعات المغلقة في X يحقق الخواص التالية:

$(C1)$ X و ϕ تكون مجموعات مغلقة.

$(C2)$ تقاطع أي عدد اختياري من المجموعات المغلقة في X يكون مجموعة مغلقة في X.

$(C3)$ اتحاد عدد منتهي من المجموعات المغلقة في X يكون مجموعة مغلقة في X.

البرهان: $(C1)$ X و ϕ مجموعات مغلقة، حيث أنها مكملات مجموعات مفتوحة ϕ و X.

$(C2)$ نفرض تجمع من المجموعات المغلقة $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. بتطبيق قوانين دي مورجان نحصل على

$$X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (X \setminus A_\alpha)$$

وحيث أن $X \setminus A_\alpha$ تكون مجموعات مفتوحة من التعريف، الطرف الأيمن من هذه المعادلة يكون اتحاد عدد اختياري من مجموعات مفتوحة، ومن ثم يكون مجموعة مفتوحة. إذن $\cap A_\alpha$ تكون مجموعة مغلقة.

$(C3)$ بالمثل نفرض أن $\{A_i : i = 1,\ldots,n\}$ عدد منتهي من المجموعات المغلقة. بتطبيق قوانين دي مورجان نحصل على

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$$

وحيث أن $X \setminus A_i$ تكون مجموعات مفتوحة، من التعريف، الطرف الأيمن من هذه المعادلة يكون تقاطع عدد منتهي من مجموعات مفتوحة، ومن ثم يكون مجموعة مفتوحة. إذن $\cup A_i$ تكون مجموعة مغلقة.

بدلا عن استخدام المجموعات المفتوحة، يمكننا تعيين توبولوجي على مجموعة بإعطاء تجمع من المجموعات الجزئية (تسمى مجموعات مغلقة) بحيث تحقق الخواص الثلاث في هذه النظرية. يمكننا تعريف المجموعات المفتوحة بأنها مكملات المجموعات المغلقة. كما في برهان النظرية السابقة يمكننا إثبات أن تجمع كل المجموعات المفتوحة يحقق خواص المجموعات المفتوحة الثلاث والتي هي الخواص الثلاث في تعريف التوبولوجي.

مجموعات بوريل

تقاطع عدد قابل للعد من المجموعات المفتوحة قد لا يكون مجموعة مفتوحة واتحاد عدد قابل للعد من المجموعات المغلقة قد لا يكون مجموعة مغلقة. كل المجموعات الجزئية من الفضاء التوبوبوجي X التي يمكن الحصول عليها من المجموعات الجزئية المفتوحة في X بأخذ إتحاد قابل للعد أو من المجموعات المغلقة بأخذ تقاطع قابل للعد تكون، من وجهة النظر التوبولوجية، تستحق الدراسة. **عائلة مجموعات بوريل** Borel sets في الفضاء التوبولوجي X يقصد بها أصغر عائلة S من المجموعات الجزئية من X التي تحقق الشروط التالية:

$(BS1)$ العائلة S تحتوي كل المجموعات الجزئية المفتوحة في X.

$(BS2)$ إذا كانت $A \in S$ فإن $X \setminus A \in S$.

$(BS3)$ إذا كانت $A_i \in S$ حيث $i = 1,2,...$ فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$.

حقيقة أنه توجد أصغر عائلة تحقق الشروط السابقة ينتج من الملاحظة البسيطة أن عائلة كل المجموعات الجزئية من X تحقق الشروط $(BS1)-(BS3)$ وأنه لأي تجمع من العائلات التي تحقق $(BS1)-(BS3)$، الجزء المشترك من كل العائلات في التجمع يكون عائلة تحقق هذه الشروط. لذلك، عائلة مجموعات بوريل في X يمكن أن تعرف كذلك على أنها الجزء المشترك من كل العائلات S التي تحقق $(BS1)-(BS3)$.

لاحظ أنه في تعريف مجموعات بورل الشرط $(BS1)$ يمكن أن يستبدل بالشرط

$(BS1')$ العائلة S تحتوي كل المجموعات الجزئية المغلقة في X.

والشرط $(BS3)$ يمكن أن يستبدل بالشرط

$(BS3')$ إذا كانت $A_i \in S$ حيث $i = 1,2,...$ فإن $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in S$.

في الواقع، العطف في $(BS1')$ و $(BS2)$ يكافئ العطف في $(BS1)$ و $(BS2)$ والعطف في $(BS2)$ و $(BS3')$ يكافئ العطف في $(BS2)$ و $(BS3)$.

سؤال يظهر عما إذا كان يوجد مجموعات جزئية من X ليست مجموعات بوريل. واضح أن هذا يعتمد على الفضاء X، على سبيل المثال كل المجموعات الجزئية في الفضاء المتقطع تكون مجموعات بوريل، ولكن على وجه التعميم توجد مجموعات في فضاءات توبولوجية ليست مجموعات بوريل (خط الأعداد الحقيقية على سبيل المثال).

نظرية مجموعات بوريل هي جزئ متطور كثيرا في التوبولوجي العام، ومع ذلك للحصول على نتائج عميقة ومشوقة عن مجموعات بوريل ينبغي أن نقيد فصول الفضاءات تحت الاعتبار إلى فضاءات خارج نطاق هذا الكتاب.

مجموعات بوريل الأكثر شيوعا، بالإضافة إلى المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة، هي الاتحادات قابلة للعد للمجموعات

المغلقة والتقاطعات قابلة للعد للمجموعات المغلقة، الأولى تسمى **مجموعات** F_σ $F_\sigma-$sets والثانية تسمى **مجموعات** G_δ $G_\delta-$sets. واضح أن مكملة مجموعة F_σ تكون مجموعة G_δ والعكس بالعكس.

تقاطع مجموعتي F_σ يكون أيضا مجموعة F_σ. في الواقع إذا كان $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ و $F=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j$، حيث E_i و F_j مجموعات مغلقة، فإن $E\cap F=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(E_i\cap F_j)$ ومن ثم $E\cap F$ تكون مجموعة F_σ. بالمثل، إتحاد مجموعتي G_δ يكون مجموعة G_δ أيضا. واضح أن إتحاد (تقاطع) عدد قابل للعد لمجموعات F_σ (G_δ) يكون أيضا مجموعة F_σ (G_δ). مجموعة كل الأعداد الكسرية تكون مجموعة F_σ في $\mathbb{R}$.

تمارين ٢-١

١- اعتبر التوبولوجيات التسعة المعرفة على المجموعة $X=\{a,b,c\}$ في مثال ٢-٢ قارن كل زوج من هذه التوبولوجيات، حدد ما إذا كانت قابلة للمقارنة أم لا.

٢- نعتبر تجمع التوبولوجيات $\{\tau_\alpha\}$ على المجموعة غير الخالية X. بين أن $\cap\tau_\alpha$ يكون توبولوجي على X. ماذا عن $\cup\tau_\alpha$؟

٣- نفرض أن $X=\{a,b,c,d,e,f\}$. حدد ما إذا كانت كل من تجمعات المجموعات الجزئية من X توبولوجي على X

(أ) $\tau_1=\{X,\phi,\{a\},\{a,f\},\{b,f\},\{a,b,f\}\}$ ؛

(ب) $\tau_2=\{X,\phi,\{a,b,f\},\{a,b,d\},\{a,b,d,f\}\}$ ؛

(ج) $\tau_3=\{X,\phi,\{f\},\{e,f\},\{a,f\}\}$.

٤- للمجموعة $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ بين أي من تجمعات المجموعات الجزئية من X توبولوجي على X (علل إجابتك).

(أ) $\tau_1=\{X,\phi,\{c\},\{b,d,e\},\{b,c,d,e\},\{b\}\}$ ؛

(ب) $\tau_2 = \{X, \phi, \{a\}, \{b,d,e\}, \{a,b,d\}, \{a,b,d,e\}\}$ ؛

(ج) $\tau_3 = \{X, \phi, \{b\}, \{a,b,c\}, \{d,e,f\}, \{b,d,e,f\}\}$.

٥- نفرض أن $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية. برهن أن كل تجمع من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ التالية يكون توبولوجي

(أ) τ_1 يتكون من $\mathbb{R}$ و ϕ وكل الفترات $(-n,n)$، حيث n عدد صحيح موجب.

(ب) τ_2 يتكون من $\mathbb{R}$ و ϕ وكل الفترات $[-n,n]$، حيث n عدد صحيح موجب.

(ج) τ_3 يتكون من $\mathbb{R}$ و ϕ وكل الفترات $[n,\infty)$، حيث n عدد صحيح موجب.

٦- نفرض أن τ توبولوجي على المجموعة غير الخالية X يتكون تحديدا من أربعة مجموعات، أي أن $\tau = \{X, \phi, A, B\}$، حيث A و B مجموعات جزئية فعلية من X غير خالية وغير متساوية. ما هي الشروط التي يجب أن تحققها A و B.

٧- أكتب كل التوبولوجيات على المجموعة $X = \{a,b,c\}$ المكونة تحديدا من أربعة مجموعات.

٨- بين أنه إذا كانت U مجموعة مفتوحة في الفضاء التوبولوجي X و A مجموعة مغلقة في X فإن $U \setminus A$ تكون مفتوحة في X و $A \setminus U$ تكون مغلقة في X.

٩- نفرض أن τ هو تجمع المجموعات الجزئية من $\mathbb{N}$ المعرف كما يلي. $\tau = \{\phi, E_n\}$ حيث $E_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$، $n \in \mathbb{N}$.

(أ) برهن على أن τ يكون توبولوجي على $\mathbb{N}$.

(ب) أكتب كل المجموعات المفتوحة التي تحتوي العدد 6.

١٠- نفرض أن τ تتكون من المجموعة الخالية وكل المجموعات الجزئية اللانهائية من $\mathbb{R}$. هل τ يكون توبولوجي على $\mathbb{R}$؟

١١- نفرض أن τ تتكون من المجموعة الخالية وكل المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ التي مكملاتها مجموعات منتهية. هل τ يكون توبولوجي على $\mathbb{R}$؟

١٢- نفرض أن (X, τ) فضاء توبولوجي، Y نحصل عليها من X بإضافة نقطة منفردة a ، أي أن $Y = X \cup \{a\}$. هل التجمع

$$\{\phi, \{a\} \cup U : U \in \tau\}$$

يكون توبولوجي على Y؟

١٣- أعط أمثلة لمجموعات في فضاءات توبولوجية تكون
(أ) مفتوحة ومغلقة في آن واحد.
(ب) ليست مفتوحة وليست مغلقة.

١٤- صف المجموعات المغلقة في
(أ) الفضاء المتقطع، (ب) الفضاء غير المتقطع،
(ج) فضاء النقطة المختارة، (د) فضاء سيربنيسكي.

٢-٢ الأساس لتوبولوجي A basis for a topology

لكل من الأمثلة في القسم السابق، كان في استطاعتنا تعيين التوبولوجي بوصف التجمع τ لكل المجموعات المفتوحة. عادة هذا يكون صعبا جدا. في معظم الحالات يمكننا تعيين التوبولوجي عن طريق تجمع أقل من المجموعات الجزئية من X ونعرف التوبولوجي بدلالة هذه المجموعات.

تعريف ٢-١٨. نفرض أن X مجموعة غير خالية. **الأساس** basis لتوبولوجي على X هو تجمع $\mathscr{B}$ من المجموعات الجزئية من X (تسمى **عناصر أساس** basis elements) بحيث

$(B1)$ لكل $x \in X$، يوجد على الأقل عنصر أساس B يحتوي X.

$(B2)$ إذا كانت x تنتمي إلى تقاطع عنصري أساس B_1 و B_2، فإنه يوجد عنصر أساس B_3 يحتوي x بحيث $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

إذا كانت $\mathscr{B}$ تحقق هذان الشرطان، فإننا نعرف **التوبولوجي** τ **المولد بواسطة** $\mathscr{B}$ topology generated by كما يلي: المجموعة الجزئية $U \subset X$ يقال أنها مفتوحة (بمعنى أنها تنتمي إلى τ) إذا كان لكل $x \in U$ يوجد $B \in \mathscr{B}$ بحيث يكون $x \in B$ و $B \subset U$.

لاحظ أن كل عنصر أساس يكون نفسه عنصر في τ.

الآن نتحقق من أن التجمع τ المولد بالأساس $\mathcal{B}$ يكون بالفعل توبولوجي على X. إذا كانت U هي المجموعة الخالية فإنها بداهة تحقق شرط تعريف المجموعة المفتوحة. كذلك X تنتمي إلى τ، حيث لكل $x \in X$ يوجد عنصر أساس B يحتوي x ومحتوى في X. الآن نفرض تجمع اختياري $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ من عناصر τ ونبين أن

$$U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$$

ينتمي إلى τ. نفرض $x \in U$، إذن يوجد دليل α بحيث $x \in U_\alpha$. حيث أن U_α مفتوحة، يوجد عنصر أساس B بحيث $x \in B \subset U_\alpha$. إذن $x \in B$ و $B \subset U$، ومن ثم تكون U مفتوحة، من التعريف.

الآن نأخذ عنصرين U_1 و U_2 من τ ونبين أن $U_1 \cap U_2$ ينتمي إلى τ. نفرض $x \in U_1 \cap U_2$. نختار عنصر أساس B_1 يحتوي x بحيث $B_1 \subset U_1$ وعنصر أساس B_2 يحتوي x بحيث $B_2 \subset U_2$. الشرط الثاني من تعريف الأساس يمكننا من اختيار عنصر أساس B_3 يحتوي x بحيث $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. إذن $x \in B_3$ و $B_3 \subset U_1 \cap U_2$، لذلك $U_1 \cap U_2$ ينتمي إلى τ، من التعريف.

إذن الآن تحققنا من أن تجمع المجموعات المفتوحة المولد بالأساس $\mathcal{B}$ يكون، بالفعل، توبولوجي.

طريقة أخرى لوصف التوبولوجي المولد بأساس تعطى في النظرية التالية.

نظرية ٢-١٩. نفرض أن X مجموعة و $\mathcal{B}$ أساس لتوبولوجي τ على X. إذن τ تساوي تجمع كل الاتحادات الممكنة من عناصر $\mathcal{B}$.

البرهان: إذا أعطينا أي تجمع من عناصر $\mathcal{B}$ فإنها تكون أيضا عناصر في τ، و لأن τ توبولوجي، إتحادها يكون في τ. والعكس، إذا كان $U \in \tau$، نختار لكل $x \in U$ عنصر B_x من $\mathcal{B}$ بحيث $x \in B_x \subset U$. إذن $U = \bigcup_{x\in U} B_x$، ومن ثم U تساوي اتحاد لعناصر من $\mathcal{B}$.

هذه النظرية تقول أن كل مجموعة مفتوحة U في X يمكن التعبير عنها كاتحاد عناصر أساس. ومع ذلك هذا التعبير ليس وحيدا. لذلك كلمة أساس في التوبولوجي تختلف بشكل كبير عن استخدامها في الجبر الخطي، حيث المعادلة التي تعطي متجه ما كتركيبة خطية من متجهات الأساس تكون وحيدة.

أعطينا طريقتين مختلفتين لكيفية الانتقال من أساس إلى التوبولوجي الذي يولده. أحيانا نحتاج إلى الانتقال في الاتجاه العكسي، من توبولوجي إلى أساس يولده. النظرية التالية تعطينا ذلك.

نظرية ٢-٢٠. نفرض أن X فضاء توبولوجي و $\mathcal{C}$ تجمع من المجموعات المفتوحة في X بحيث لكل مجموعة مفتوحة U في X ولكل $x \in U$، يوجد عنصر C في $\mathcal{C}$ بحيث $x \in C \subset U$. إذن $\mathcal{C}$ يكون أساس للتوبولوجي على X.

البرهان: يجب أن نبين أن $\mathcal{C}$ تكون أساسا. الشرط الأول من تعريف الأساس بسيط. نفرض $x \in X$، حيث أن X نفسها مجموعة مفتوحة، من الفرض يوجد عنصر C في $\mathcal{C}$ بحيث $x \in C \subset X$. للتحقق من الشرط الثاني، نفرض أن $x \in C_1 \cap C_2$ ، حيث C_1 و C_2 عنصران في $\mathcal{C}$. حيث أن C_1 و C_2 مجموعتان مفتوحتان، كذلك يكون $C_1 \cap C_2$. لذلك يوجد، من الفرض، عنصر C_3 في $\mathcal{C}$ بحيث $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

نفرض τ هو تجمع المجموعات المفتوحة في X، يجب أن نبين ان التوبولوجي τ' المولد بالأساس $\mathcal{C}$ يساوي التوبولوجي τ. أولا لاحظ أنه إذا كان U ينتمي إلى τ وكان $x \in U$، فإنه من الفرض يوجد عنصر C في $\mathcal{C}$ بحيث $x \in C \subset U$. من ذلك ينتج من التعريف أن U ينتمي إلى τ'. من جهة أخرى، إذا كان W ينتمي إلى τ'، فإن W تساوي اتحاد عناصر من $\mathcal{C}$ ، وذلك من نظرية ٢-١٩ . حيث أن كل عنصر في $\mathcal{C}$ يكون عنصر في τ و τ توبولوجي، W أيضا ينتمي إلى τ.

الفضاء التوبولوجي الذي لـه أسـاس قابل للعد يسمى **فضاء عد من النـوع الثـاني** second countable space أو **يحقـق مسلمة العد الثانية** satisfy the second axiom of cuontability .

مثـال ٢-٢١ . نفـرض أن X مجموعـة غيـر خاليـة. إذن $\mathscr{B}=\{\{x\}:x\in X\}$ يكـون أسـاس للتوبولـوجي المتقطـع علـى X (وضح ذلك).

مثال ٢-٢٢ . نفرض $X=\{a,b,c,d,e,f\}$

و $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$.

إذن $\mathscr{B}=\{\{a\},\{c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$ يكـون أسـاس لــ τ، حيـث $\mathscr{B}\subset\tau$ وكل عنصر من τ يمكن التعبير عنه كاتحاد عناصر من $\mathscr{B}$.

لاحظ أنه، على وجه العموم، τ يكون أيضا أساسا لـ τ.

مثال ٢-٢٣ . نفرض أن $X=\{a,b,c\}$ و

$\mathscr{B}=\{\{a\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$. إذن $\mathscr{B}$ ليـسـت أسـاس لأي توبولوجي على X. لبيان ذلك نفرض أن $\mathscr{B}$ أساس لتوبولـوجي τ. إذن τ يتكـون مـن كـل الاتحـادات الممكنـة مـن عناصـر $\mathscr{B}$. أي أن $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$. ومـع هذا τ ليـست توبولوجي حيث أن $\{b\}=\{a,b\}\cap\{b,c\}$ ليست عنصر في τ ومن ثم τ لا تحقق $(O3)$.

ملاحظـة ٢-٢٤ . إذا كـان (X,τ) فـضاءا توبولوجيـا، فـإن τ يكـون أساسا لـ τ. لذلك، على سبيل المثال، مجموعة كل المجموعات الجزئيـة من X تكون أساسا للتوبولوجي المتقطع على X.

من هـذه الملاحظـة نـستنتج أن التوبولـوجي قد يكون لـه أكثـر مـن أسـاس. بمعنـى أنـه يمكننـا أن نبـدأ بأسـاسـات مختلفـة لنولـد منهـا نفـس التوبولوجي.

عندما تعطـى التوبولوجيـات عـن طريـق الأسـاسـات، فإنـه يكـون مـن المفيد معرفة أسلوب لتحديد أي التوبولوجيات أدق من الآخر عن طريق الأساس. النظرية التالية تعطينا أحد هذه الأساليب.

نظرية ٢-٢٥ . نفرض أن $\mathscr{B}$ و $\mathscr{B}'$ أسـاسـان للتوبولوجيـان τ و τ' . إذن $\tau\subset\tau'$ إذا وفقـط إذا كـان لكـل $x\in X$ وكـل عنـصر أسـاس

$B \in \mathscr{B}$ يحتوي x، يوجد عنصر أساس $B' \in \mathscr{B}'$ بحيث $x \in B' \subset B$.

البرهان: نفرض أن الشرط محقق وأن $U \in \tau$ ، نرغب في بيان أن $U \in \tau'$. نفرض $x \in U$. حيث أن $\mathscr{B}$ تولد τ ، يوجد عنصر أساس $B \in \mathscr{B}$ بحيث $x \in B \subset U$. من الفرض يوجد عنصر أساس $B' \in \mathscr{B}'$ بحيث $x \in B' \subset B$. إذن $x \in B' \subset U$ ومن ثم يكون $U \in \tau'$.

في الاتجاه العكسي، نفرض أن $x \in X$ و $B \in \mathscr{B}$ بحيث $x \in B$. من التعريف $B \in \tau$ ومن الفرض $\tau \subset \tau'$ ، لذلك $B \in \tau'$. وحيث أن $\mathscr{B}'$ يولد τ'، يوجد عنصر أساس $B' \in \mathscr{B}'$ بحيث $x \in B' \subset B$.

تعريف ٢-٢٦ . نفرض أن $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية و نفرض $\mathscr{B}$ تجمع كل الفترات المفتوحة (a,b) على الخط الحقيقي، حيث

$$(a,b) = \{x : a < x < b\}$$

إذن $\mathscr{B}$ تكون أساس لتوبولوجي على $\mathbb{R}$ (تحقق من ذلك).

التوبولوجي المولد على $\mathbb{R}$ بواسطة $\mathscr{B}$ يسمى **التوبولوجي القياسي** standard topology أو **التوبولوجي الاقليدي** Euclidean topology أو **التوبولوجي المعتاد** usual topology أو **توبولوجي الفترة** interval topology. عند اعتبار $\mathbb{R}$ فإننا دائما نعتبر أن التوبولوجي المعرف عليها هو التوبولوجي الاقليدي ما لم نذكر خلاف ذلك.

نفرض أن $\mathscr{B}'$ هو تجمع كل الفترات نصف المفتوحة $[a,b)$ على الخط الحقيقي، حيث

$$[a,b) = \{x : a \leq x < b\}$$

حيث $a < b$. التوبولوجي المولد بواسطة $\mathscr{B}'$ يسمى **توبولوجي النهاية السفلى** على $\mathbb{R}$ lower limit topology. عندما تعطى $\mathbb{R}$ توبولوجي النهاية السفلى فإنه يرمز لها بالرمز $\mathbb{R}_l$.

ملاحظة ٢-٢٧. التوبولوجي $\mathbb{R}_l$ أدق من التوبولوجي الاقليدي على $\mathbb{R}$. لإثبات ذلك، نفرض أن τ هو التوبولوجي الاقليدي على $\mathbb{R}$ وأن

τ' هو التوبولوجي على $\mathbb{R}_l$. نفرض (a,b) عنصر أساس لـ τ يحتوي النقطة x. عنصر الأساس $[x,b)$ لـ τ' يحتوي x ومحتوى في (a,b). لذلك $\tau \subset \tau'$.

كل مجموعة من أعداد كاردينالية تكون مرتبة جيدا ومن ثم يكون لها عنصر أصغر. العنصر الأصغر في مجموعة الأعداد الكاردينالية على الصورة $|\mathcal{B}|$ ، حيث $\mathcal{B}$ أساس للفضاء التوبولوجي (X,τ) يسمى **وزن الفضاء التوبولوجي** weight of the topological space ويرمز لها بالرمز $w((X,\tau))$ أو اختصارا $w(X)$.

نظرية ٢-٢٨. في الفضاء التوبولوجي (X,τ)، إذا كان $w(X)\le m$، فإنه لكل تجمع $\{U_s\}_{s\in S}$ من مجموعات جزئية مفتوحة في X توجد مجموعة $S_0 \subset S$ بحيث يكون $|S_0|\le m$ و $\bigcup_{s\in S_0} U_s = \bigcup_{s\in S} U_s$.

البرهان: نأخذ أساس $\mathcal{B}$ للفضاء التوبولوجي X يحقق $|\mathcal{B}|\le m$ ونرمز $\mathcal{B}_0$ لتجمع كل $U\in\mathcal{B}$ بحيث لبعض $s\in S$ يكون $U\subset U_s$. لكل $U\in\mathcal{B}_0$ نختار $s(U)\in S_0$ بحيث

$$U\subset U_{s(U)} \qquad (١)$$

بهذه الطريقة دالة s من $\mathcal{B}_0$ إلى S تكون معرفة؛ سوف نبين أن $S_0 = s(\mathcal{B}_0)\subset S$ تحقق النظرية.

في البداية $|S_0| = |s(\mathcal{B}_0)| \le |\mathcal{B}| \le m$. الآن نأخذ نقطة $x\in\bigcup_{s\in S} U_s$. يوجد $s\in S$ بحيث $x\in U_s$ ويوجد $U\in\mathcal{B}$ بحيث $x\in U\subset U_s$. واضح أن $U\in\mathcal{B}_0$ و $s(U)\in S_0$. من (١) ينتج أن

$$x\in U\subset U_{s(U)}\subset \bigcup_{s\in S_0} U_s$$

لذلك $\bigcup_{s\in S} U_s \subset \bigcup_{s\in S_0} U_s$. الاحتواء العكسي بديهي. وهذا يكمل البرهان.

نظرية ٢-٢٩. في الفضاء التوبولوجي (X,τ)، إذا كان $w(X)\le m$، لكل أساس $\mathcal{B}$ يوجد أساس $\mathcal{B}_0$ بحيث $|\mathcal{B}_0|\le m$ و $\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}$.

البرهان: نفرض أن $m \geq \aleph_0$ ونأخذ أساس $\mathscr{B}_1 = \{W_t\}_{t\in T}$ للفضاء X بحيث $|T| \leq m$. نفرض $\mathscr{B} = \{U_s\}_{s\in S}$ ولكل $t \in T$ نفرض

$$S(t) = \{s \in S : U_s \subset W_t\}$$

حيث أن $\mathscr{B}$ أساس لـ X فإن $\bigcup_{s\in S(t)} U_s = W_t$ ومن نظرية ٢-٢٨ توجد مجموعة $S_0(t) \subset S(t)$ بحيث يكون

$$|S_0(t)| \leq m \qquad (٢)$$

و

$$W_t = \bigcup_{s\in S(t)} U_s = \bigcup_{s\in S_0(t)} U_s \qquad (٣)$$

نفرض أن $\mathscr{B}_0 = \{U_s\}_{s\in S_0(t), t\in T}$. حيث أن $|T| \leq m$، من (٢) ومن العلاقة $m^2 = m$ ينتج أن $|\mathscr{B}_0| \leq m$. الآن سوف نبين أن $\mathscr{B}_0$ يكون أساسا. نأخذ نقطة اختيارية $x \in X$ وجوار لها V. حيث أن $\mathscr{B}_1$ أساس، لبعض $t \in T$ يكون $x \in W_t \subset V$ ومن (٣) يوجد $s \in S_0(t)$ بحيث $x \in U_s \subset W_t \subset V$. واضح أن $U_s \in \mathscr{B}_0$، وهذا يبرهن أن $\mathscr{B}_0$ يكون أساسا لـ X.

البرهان في حالة m منتهية يتكون من بيان أنه إذا كان $\mathscr{B}_1$ أساس و $|\mathscr{B}_1| = w(X) \leq m$ ، فإن $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}$، وهذا يترك كتمرين للقارئ.

الفضاء التوبولوجي X يقال أن له **أساس موضعي عند** x local basis at إذا وجد تجمع $\mathscr{B}_x$ من المجموعات المفتوحة التي تحتوي x بحيث أنه لكل مجموعة مفتوحة U تحتوي x يوجد B عنصر في $\mathscr{B}_x$ بحيث $x \in B \subset U$. واضح أنه إذا كان $\mathscr{B}$ أساس للفضاء التوبولوجي X فإن التجمع $\mathscr{B}_x = \{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$ يكون أساس موضعي للفضاء X عند النقطة x.

الفضاء التوبولوجي X الذي له أساس موضعي قابل للعد عند كل نقطة $x \in X$ يسمى **فضاء عد من النوع الأول** first countable space أو **يحقق مسلمة العد الأولى** satisfy the first axiom of cuontability .

قد يظهر لنا سؤال عند هذه النقطة. حيث أن التوبولوجي المولد بأساس $\mathcal{B}$ يمكن وصفه على أنه تجمع كل الاتحادات الممكنة من عناصر $\mathcal{B}$، ماذا يحدث إذا بدأنا بتجمع من المجموعات وأخذنا تقاطعاتها بجانب الاتحادات الممكنة؟ هذا السؤال يقودنا إلى مفهوم الأساس الجزئي.

تعريف ٢-٣٠. الأساس الجزئي $\mathcal{S}$ subbasis لتوبولوجي على X هو تجمع من المجموعات الجزئية من X اتحادها يساوي X. التوبولوجي المولد بالأساس الجزئي $\mathcal{S}$ يعرف بأنه التجمع τ لكل الاتحادات الممكنة للتقاطعات المنتهية لعناصر من $\mathcal{S}$.

بالطبع يجب أن نتحقق أن τ يكون توبولوجي. من أجل هذا الهدف يكفي بيان أن التجمع $\mathcal{B}$ المكون من كل التقاطعات المنتهية لعناصر $\mathcal{S}$ يكون أساس، حيث حينئذ التجمع τ المكون من كل الاتحادات الممكنة من عناصر $\mathcal{B}$ يكون توبولوجي وذلك من نظرية ٢-١٩. نفرض $x \in X$، x تنتمي إلى عنصر في $\mathcal{S}$ ومن ثم تنتمي إلى عنصر في $\mathcal{B}$، وهذا يحقق الشرط الأول من شروط الأساس. لاختبار الشرط الثاني، نفرض

$$B_1 = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m \quad \text{و} \quad B_2 = S'_1 \cap S'_2 \cap \ldots \cap S'_n$$

عنصران في $\mathcal{B}$. تقاطعهما

$$B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m) \cap (S'_1 \cap S'_2 \cap \ldots \cap S'_n)$$

يكون أيضا تقاطع لعدد منتهي من عناصر من $\mathcal{S}$، ومن ثم تنتمي إلى $\mathcal{B}$.

تعريف ٢-٣١. نفرض أن X فضاءا توبولوجيا. المتتابعة (x_n) من عناصر X يقال أنها **تقاربية** convergent **وتتقارب إلى النقطة** $x \in X$، ونكتب $x_n \to x$، إذا كان لكل مجموعة مفتوحة U تحتوي x يوجد عدد طبيعي N بحيث أن $x_n \in U$ لكل $n \geq N$.

بالطبع المتتابعة ليس بالضرورة أن تتقارب إلى أي نقطة في الفضاء.

مثال ٢-٣٢. إذا كانت متتابعة تتقارب في توبولوجي τ على X فإنها تتقارب على أي توبولوجي أخشن من τ ولكن ليس بالضرورة أن تتقارب في أي توبولوجي أدق من τ.

مثال ٢-٣٣. في فضاء سيربنيسكي $X=\{0,1\}$ ، المتتابعة $0,0,0,...$ تتقارب إلى 0 وإلى 1. في $\mathbb{R}$ مع توبولوجي المكملات المنتهية، المتتابعة $1,2,3,...$ تتقارب إلى أي نقطة. المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب إلى 0 في $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}_l$ ولا تتقارب إلى أي نقطة أخرى. المتتابعة $\{-\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب إلى 0 في $\mathbb{R}$ ولكنها لا تتقارب في $\mathbb{R}_l$.

التعامل مع المجموعات المفتوحة والمغلقة ونقاط النهاية في الخط الحقيقي والمستوى قد يؤدي إلى غموض عندما نعتبر هذه المفاهيم في الفضاءات التوبولوجية العامة. على سبيل المثال، في $\mathbb{R}$ كل مجموعة مكونة من نقطة واحدة $\{x_0\}$ تكون مغلقة. وهذه الحقيقة يمكن إثباتها بسهولة. ولكن هذه الحقيقة ليست صحيحة في أي فضاء توبولوجي عام. على سبيل المثال في الفضاء التوبولوجي المكون من المجموعة $X=\{a,b,c\}$ مع التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a,b\},\{b,c\},\{b\}\}$ المجموعة $\{b\}$ ليست مغلقة. أيضا المتتابعات في $\mathbb{R}$ لا يمكن أن تتقارب إلى أكثر من نقطة واحدة. ولكن في الفضاءات التوبولوجية العامة يمكن لمتتابعة أن تتقارب إلى أكثر من نقطة. الفضاءات التوبولوجية التي فيها كل مجموعة مكونة من نقطة واحدة تكون مغلقة وكل متتابعة لا يمكن أن تتقارب إلى أكثر من نقطة واحدة يكون لها أهمية خاصة في الرياضيات.

تعريف ٢-٣٤. الفضاء التوبولوجي X يسمى **فضاء** T_2 أو فضاء هاوسدورف Hausdorff space إذا كان لأي نقطتين $x,y\in X$ بحيث $x\neq y$ يوجد مجموعتين مفتوحتين $U,V\subset X$ بحيث $x\in U$ ، $y\in V$ و $U\cap V=\phi$.

فضاء هاوسدورف هو أحد مسلمات التباعد التي سوف نتعرض لها بالتفصيل في الباب التاسع ولكن أوردنا التعريف هنا لحاجتنا إلى استخدامه في الأبواب التالية.

تمارين ٢-٢

١- نفرض أن $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي τ على المجموعة غير الخالية X. إذا كان $\mathcal{B}_1$ تجمع من المجموعات الجزئية من X بحيث $\mathcal{B}\subset\mathcal{B}_1\subset\tau$ فبرهن على أن $\mathcal{B}_1$ يكون أيضا أساس لـ τ.

٢- نفرض أن X هو الفضاء التوبولوجي المتقطع، وأن $\mathcal{B}$ هو تجمع كل المجموعات الجزئية المنفردة (المجموعات ذات النقطة الواحدة) في X. بين أن أي تجمع $\mathcal{B}^*$ من المجموعات الجزئية من X يكون أساس للتوبولوجي على X إذا وفقط إذا كان $\mathcal{B}\subset\mathcal{B}^*$.

٣- نفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ و $\mathcal{A}=\{\{a,b,c\},\{c,d\},\{d,e\}\}$. أوجد التوبولوجي المولد بـ $\mathcal{A}$ على X.

٤- نعتبر التوبولوجي المتقطع $\mathcal{D}$ على $X=\{a,b,c,d,e\}$. أوجد أساس جزئي $\mathcal{S}$ لـ $\mathcal{D}$ لا يحتوي أي مجموعات منفردة.

٥- بين أنه إذا كان $\mathcal{S}$ أساس جزئي لتوبولوجين τ و τ^* على X فإن $\tau=\tau^*$.

٦- نفرض أن $\mathcal{A}$ تجمع من المجموعات الجزئية من المجموعة غير الخالية X. بين أن التوبولوجي المولد بـ $\mathcal{A}$ يساوي تقاطع كل التوبولوجيات على X التي تحتوي $\mathcal{A}$.

٢-٣ التوبولوجي المرتب The order topology

إذا كانت X مجموعة مرتبة ترتيبا بسيطا، فإنه يوجد توبولوجي قياسي على X، يرمز له باستخدام علاقة الترتيب. هذا التوبولوجي يسمى التوبولوجي المرتب. في هذا الجزء نعتبر هذا التوبولوجي وندرس بعض خواصه.

نفرض أن X عليها علاقة ترتيب بسيط $<$. نفرض عنصرين a و b في X بحيث $a<b$. توجد أربع مجموعات جزئية من X تسمى فترات intervals تحدد بـ a و b هي كما يلي:

$$(a,b)=\{x : a<x<b\}،$$

$$(a,b]=\{x : a<x\le b\}،$$

$$[a,b) = \{x : a \le x < b\}$$ ،
$$[a,b] = \{x : a \le x \le b\}$$

الرموز المستخدمة هنا هي مألوفة لنا في حالة كون X هي خط الأعداد الحقيقية، ولكن هذه فترات لمجموعة مرتبة اختيارية. مجموعة من النوع الأول تسمى **فترة مفتوحة** open interval في X، مجموعة من النوع الرابع تسمى **فترة مغلقة** closed interval في X ومجموعة من النوعين الثاني والثالث تسمى **فترة نصف مفتوحة** half-open interval في X. استخدام كلمة مفتوحة في هذه التسميات يوحي بأن الفترات المفتوحة ينبغي أن تصبح مجموعات مفتوحة عندما نضع توبولوجي على X.

تعريف ٢-٣٥ . نفرض أن X مجموعة مكونة من أكثر من عنصر معرف عليها علاقة ترتيب بسيط. نفرض أن $\mathscr{B}$ هي تجمع كل المجموعات من الأنواع التالية:

(١) كل الفترات المفتوحة (a,b) في X.

(٢) كل الفترات على الصورة $[a_0,b)$ ، حيث a_0 هي أصغر عنصر في X (إن وجد).

(٣) كل الفترات على الصورة $(a,b_0]$ ، حيث b_0 هي أكبر عنصر في X (إن وجد).

التجمع $\mathscr{B}$ يكون أساس لتوبولوجي على X، يسمى **التوبولوجي المرتب** order topology.

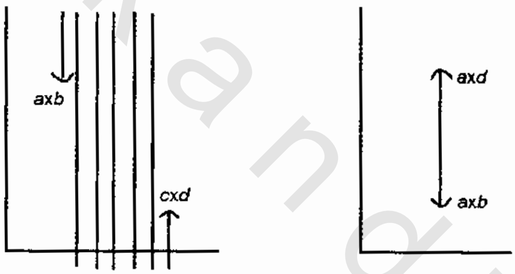
إذا كانت X ليس لها عنصر أصغر، فإنه لا توجد مجموعات من النوع الثاني، وإذا كانت X ليس لها عنصر أكبر فإنه لا توجد مجموعات من النوع الثالث.

يمكننا التحقق من أن $\mathscr{B}$ تحقق شروط الأساس. أولا لاحظ أن كل عنصر x في X يقع على الأقل في في واحد من عناصر $\mathscr{B}$. أصغر عنصر، إن وجد، يقع في جميع المجموعات من النوع الثاني، أكبر عنصر، إن وجد، يقع في جميع العناصر من النوع الثالث، وأي عنصر آخر يقع في مجموعة من النوع الأول. ثانيا، لاحظ أن تقاطع أي

مجموعتين من الأنواع السابقة أيضا يكون مجموعة من هذه الأنواع، أو المجموعة الخالية. نترك التحقق من ذلك للقارئ.

مثال ٢-٣٦ . التوبولوجي الإقليدي على $\mathbb{R}$ (كما سبق تعريفه) هو مجرد التوبولوجي المرتب المولد بالترتيب العادي على $\mathbb{R}$.

مثال ٢-٣٧ . نعتبر المجموعة $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ مع الترتيب المعجمي، سوف نرمز للعنصر العام في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بالرمز $x\times y$. المجموعة $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ليس لها عنصر أصغر أو عنصر أكبر، لذلك التوبولوجي المرتب على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ يكون له أساس تجمع كل الفترات المفتوحة على الصورة $(a\times b, c\times d)$ لـ $a<c$ ، و لـ $a=c$ و $b<d$. هذان النوعان من الفترات هي المشار إليها في الشكل التالي



التجمع الجزئي المكون فقط من الفترات من النوع الثاني تكون أيضا أساس للتوبولوجي المرتب على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

مثال ٢-٣٨ . مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ تكون مجموعة مرتبة بها أصغر عنصر. التوبولوجي المرتب على $\mathbb{Z}^+$ يكون هو التوبولوجي المتقطع، حيث كل مجموعة من نقطة واحدة تكون مفتوحة. إذا كان $n>1$ ، المجموعة المكونة من نقطة واحدة $\{n\}=(n-1,n+1)$ تكون عنصر أساس، وإذا كان $n=1$ ، المجموعة المكونة من نقطة واحدة $\{1\}=[1,2)$ تكون عنصر أساس.

تعريف ٢-٣٩ . نفرض X مجموعة و a عنصر في X، توجد أربعة مجموعات كل منها يسمى **شعاع** ray تحدد بالعنصر a ، كما يلي

$$(a,+\infty)=\{x : x>a\} ،$$
$$(-\infty,a)=\{x : x<a\} ،$$
$$[a,+\infty)=\{x : x\geq a\} ،$$

$(-\infty,a]=\{x : x \leq a\}$.

المجموعات من النوعين الأول والثاني تسمى **شعاع مفتوح** open ray والمجموعات من النوع الثالث والرابع تسمى **شعاع مغلق** closed ray.

استخدام كلمة مفتوح تقترح أن الشعاع المفتوح في X يكون مجموعة مفتوحة في التوبولوجي المرتب على X. وهو كذلك. نعتبر على سبيل المثال، الشعاع $(a,+\infty)$. إذا كانت X لها أكبر عنصر b_0، فإن $(a,+\infty)$ تساوي عنصر الأساس $(a,b_0]$. إذا كانت X ليس لها عنصر أكبر فإن $(a,+\infty)$ تساوي اتحاد كل عناصر الأساس على الصورة (a,x) لـ $x>a$. في كلتا الحالتين $(a,+\infty)$ تكون مفتوحة. مناقشة مماثلة تطبق على الشعاع $(-\infty,a)$.

في الواقع، الأشعة المفتوحة تكون أساس جزئي للتوبولوجي المرتب على X. لأن الأشعة المفتوحة تكون مجموعات مفتوحة في التوبولوجي المرتب، التوبولوجي الذي تولده يكون محتوى في التوبولوجي المرتب. من جهة أخرى، كل عنصر أساس للتوبولوجي المرتب يساوي تقاطع منتهي لأشعة مفتوحة؛ الفترة (a,b) تساوي تقاطع $(-\infty,b)$ مع $(a,+\infty)$ ، في حين أن $[a_0,b)$ و $(a,b_0]$ ، إذا وجدت، فإنها نفسها تكون شعاع مفتوح. لذلك التوبولوجي المولد بالأشعة المفتوحة يحتوي التوبولوجي المرتب.

٢-٤ توبولوجي الفضاء الجزئي Subspace Topology

تعريف ٢-٤٠. نفرض أن X فضاء توبولوجي مع التوبولوجي τ. إذا كانت Y مجموعة جزئية من X، فإن التجمع

$$\{Y \cap U : U \in \tau\}$$

يكون توبولوجي على Y ، يسمى **توبولوجي الفضاء الجزئي** subspace topology أو **التوبولوجي النسبي** relative topology. Y مع هذا التوبولوجي يسمى **فضاءا جزئيا** subspace من X ، مجموعاته المفتوحة تتكون من تقاطعات كل المجموعات المفتوحة في X مع Y. يرمز لهذا التوبولوجي بالرمز τ_Y أو τ / Y أو $\tau|_Y$.

من اليسير التحقق من أن τ_Y يكون توبولوجي على Y. حيث تحتوي ϕ و Y لأن $\phi = \phi \cap Y$ و $Y = Y \cap X$، حيث ϕ و X عناصر في τ. حقيقة أنها مغلقة بالنسبة للاتحاد الاختياري والتقاطع المنتهي تنتج من المعادلتين

$$\bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha) \cap Y$$

$$(U_1 \cap Y) \cap \ldots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \ldots \cap U_n) \cap Y$$

الخاصية التي إذا كانت محققة للفضاء التوبولوجي (X, τ) فإنها تكون محققة لأي فضاء جزئي منه تسمى **خاصية وراثية** hereditary property.

إذا كان التوبولوجي موصوفا بأساس، فإن توبولوجي الفضاء الجزئي أيضا يمكن وصفة عن طريق الأساس.

نظرية ٢-٤١. نفرض $\mathcal{B}$ أساس للتوبولوجي على X، إذن التجمع

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

يكون أساس لتوبولوجي الفضاء الجزئي على Y.

البرهان: نفرض أن U مجموعة مفتوحة في X و $y \in U \cap Y$. يمكننا اختيار عنصر أساس B من $\mathcal{B}$ بحيث $y \in B \subset U$. إذن $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$. من نظرية ٢-٢٠ ينتج أن $\mathcal{B}_Y$ يكون أساس لتوبولوجي الفضاء الجزئي على Y.

عندما يكون حديثنا عن فضاء توبولوجي X وفضاء جزئي Y، نحتاج إلى الحذر عند استخدام كلمة "مجموعة مفتوحة". هل نقصد أنها عنصر في التوبولوجي على Y أم أنها عنصر في التوبولوجي على X؟ لذلك نضع التعريف التالي: إذا كان Y فضاءا جزئيا من X، نقول أن المجموعة U تكون **مفتوحة في** Y (open in Y) (أو **مفتوحة بالنسبة إلى** Y (open relative to Y)) إذا كانت تنتمي إلى التوبولوجي على Y؛ هذا يؤدي بصفة خاصة إلى أنها تكون مجموعة جزئية من Y. نقول أن U تكون مفتوحة في X إذا كانت تنتمي إلى التوبولوجي على X. مناقشة مماثلة يمكن ذكرها بالنسبة للمجموعات المغلقة.

مثال ٢-٤٢. $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$،

ونفرض أن $Y=\{b,c,e\}$. إذن توبولوجي الفضاء الجزئي على Y يكون $\tau_Y=\{Y,\phi,\{c\}\}$.

مثال ٢-٤٣. نفرض أن $X=\{a,b,c,d,e\}$ ،

$\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ ،

ونفرض $Y=\{a,d,e\}$. إذن توبولوجي الفضاء الجزئي على Y يكون $\tau_Y=\{Y,\phi,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{d,e\}\}$.

مثال ٢-٤٤. نعتبر التوبولوجي الإقليدي على $\mathbb{R}$ ونفرض أن $(1,2)\subset\mathbb{R}$. التوبولوجي النسبي على $(1,2)$ يكون هو التوبولوجي الذي أساسه التجمع $\{(a,b)\cap(1,2):a,b\in\mathbb{R},a<b\}$، أي التجمع $\{(a,b):a,b\in\mathbb{R},1\le a<b\le 2\}$.

مثال ٢-٤٥. نعتبر المجموعة الجزئية $Y=[1,2]$ من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}$. أساس للتوبولوجي النسبي τ على $[1,2]$ يكون التجمع

$$\{(a,b)\cap[1,2]:a,b\in\mathbb{R},a<b\}$$

أي التجمع

$$\{(a,b):1\le a<b\le 2\}\cup\{[1,b):1<b\le 2\}\cup \{(a,2]:1\le a<2\}\cup\{[1,2]\}$$

لاحظ هنا، على سبيل المثال، أن $[1,1\frac{1}{2})$ ليست مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$، ولكن $[1,1\frac{1}{2})=(0,1\frac{1}{2})\cap[1,2]$ تكون مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي Y. أيضا $(1,2]$ مجموعة مفتوحة في Y ولكنها ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$. على الرغم من أن $[1,2]$ مجموعة مفتوحة في Y إلا أنها ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$.

مثال ٢-٤٦. نفرض أن $I=[0,1]$ هي فترة الوحدة المغلقة و τ هو عائلة كل المجموعات على الصورة $I\cap U$، حيث $U\subset\mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة بالنسبة للتوبولوجي القياسي على $\mathbb{R}$. واضح أن (I,τ) يكون فضاء توبولوجي. عائلة كل الفترات على الصورة (q,r) ، $[0,r)$ و $(q,1]$، حيث q و r أعداد كسرية و $0<q<r<1$ ، يكون أساس للفضاء (I,τ). كل الفترات من

النوعين الأخيرين تكون أساس جزئي. المجموعة $A \subset I$ تكون مغلقة في I إذا وفقط إذا كانت مغلقة في $\mathbb{R}$. التوبولوجي τ يسمى التوبولوجي القياسي على الفترة I.

مثال ٢-٤٧. نعتبر مجموعة كل الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. بين أن التوبولوجي النسبي على $\mathbb{Z}$ يكون هو التوبولوجي المتقطع.

الحل: نفرض $n \in \mathbb{Z}$ ، إذن $\{n\} = (n-1, n+1) \cap \mathbb{Z}$. وحيث أن $(n-1, n+1)$ تكون مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$، فإن $\{n\}$ تكون مجموعة مفتوحة في $\mathbb{Z}$، لكل $n \in \mathbb{Z}$. إذن كل مجموعة جزئية منفردة في $\mathbb{Z}$ تكون مفتوحة ومن ثم التوبولوجي على $\mathbb{Z}$ يكون هو التوبولوجي المتقطع.

هناك وضع خاص، حيث كل مجموعة مفتوحة في Y تكون مفتوحة في X.

نظرية ٢-٤٨. نفرض أن Y فضاءا جزئيا من X. إذا كانت U مجموعة مفتوحة في Y و Y مفتوحة في X فإن U تكون مفتوحة في X.

البرهان: حيث أن U مجموعة مفتوحة في Y، فإن $U = Y \cap V$ لمجموعة ما V مفتوحة في X. وحيث أن Y و V كلاهما مفتوحة في X فكذلك يكون تقاطعهما $Y \cap V$.

نظرية ٢-٤٩. نفرض أن Y فضاءا جزئيا من الفضاء التوبولوجي X و $A \subset Y$. إذن A تكون مجموعة مغلقة في Y إذا وفقط إذا كانت تساوي تقاطع Y مع مجموعة مغلقة في X.

البرهان: نفرض أن $A = F \cap Y$، حيث F مجموعة مغلقة في X. إذن $X \setminus F$ تكون مجموعة مفتوحة في X ، ومن ثم $(X \setminus F) \cap Y$ تكون مجموعة مفتوحة في Y. ولكن $Y \setminus A = (X \setminus F) \cap Y$. لذلك $Y \setminus A$ تكون مجموعة مفتوحة في Y ومن ثم A تكون مغلقة في Y. في الاتجاه الآخر نفرض أن A مغلقة في Y. إذن $Y \setminus A$ تكون مفتوحة في Y، ومن ثم تساوي تقاطع Y مع مجموعة U مفتوحة في X. إذن $X \setminus U$ تكون مجموعة مغلقة في X و

$A=Y\cap(X\setminus U)$. لذلك A تساوي تقاطع Y مع مجموعة مغلقة في X، وهو المطلوب.

المجموعة المغلقة A في الفضاء الجزئي Y قد تكون أو لا تكون مغلقة في الفضاء الأكبر X. كما في حالة المجموعات المفتوحة، يوجد معيار لكي تكون A مغلقة في X.

نظرية ٢-٥٠. نفرض أن Y فضاءا جزئيا من الفضاء التوبولوجي X و $A\subset Y$. إذا كانت A مغلقة في Y وكانت Y مغلقة في X فإن A تكون مغلقة في X.

البرهان: يترك كتمرين للقارئ.

الآن نفرض أن X مجموعة مرتبة مع التوبولوجي المرتب، ونفرض أن Y مجموعة جزئية من X. علاقة الترتيب على X، عندما تقيد على Y، تجعل Y مجموعة مرتبة. ومع ذلك التوبولوجي المرتب الناتج على Y ليس بالضرورة أن يكون هو التوبولوجي الناتج على Y باعتباره فضاء جزئي من X.

مثال ٢-٥١. نعتبر المجموعة الجزئية $Y=[0,1]$ من الخط الحقيقي $\mathbb{R}$، مع توبولوجي الفضاء النسبي. توبولوجي الفضاء النسبي يكون أساس له كل المجموعات على الصورة $(a,b)\cap Y$، حيث (a,b) فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$. مثل هذه المجموعات تكون واحدة من الأنواع التالية:

$$(a,b)\cap Y=\begin{cases}(a,b) & \text{إذا كانت } a,b\in Y\\ [0,b) & \text{إذا كانت } b \text{ فقط في } Y\\ (a,1] & \text{إذا كانت } a \text{ فقط في } Y\\ Y \text{ or } \phi & \text{إذا كانت } a,b\notin Y\end{cases}$$

من التعريف كل من هذه المجموعات تكون مفتوحة في Y. ولكن المجموعات من النوع الثاني والثالث ليست مفتوحة في الفضاء الأكبر $\mathbb{R}$.

لاحظ أن هذه المجموعات تكون أساس للتوبولوجي المرتب على Y. ومن ثم نجد أنه في حالة المجموعة $Y=[0,1]$، توبولوجي الفضاء

الجزئي (كفضاء جزئي من $\mathbb{R}$) والتوبولوجي المرتب لها يكونا نفس الشيء.

مثال ٢-٥٢. نفرض أن Y هي المجموعة الجزئية $[0,1)\cup\{2\}$ من $\mathbb{R}$. في توبولوجي الفضاء الجزئي على Y المجموعة ذات النقطة الواحدة $\{2\}$ تكون مفتوحة، لأنها تقاطع المجموعة المفتوحة $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ مع Y. ولكن في التوبولوجي المرتب على Y، المجموعة $\{2\}$ ليست مفتوحة. أي عنصر أساس للتوبولوجي المرتب على Y الذي يحتوي 2 يكون على الصورة $\{x : x\in Y, a<x\le 2\}$ لبعض $a\in Y$، مثل هذه المجموعة من الضروري أن تحتوي نقاط من Y أقل من 2.

الشذوذ الموضح في المثال السابق لا يحدث للفترات أو الأشعة في المجموعة المرتبة X. هذا نبرهنه الآن.

نفرض أن X مجموعة مرتبة، المجموعة الجزئية Y من X تسمى **محدبة** convex في X إذا كان لأي نقطتين $a<b$ في Y، كل الفترة (a,b) من نقاط X تقع في Y. لاحظ أن الفترات والأشعة في X تكون مجموعات محدبة في X.

نظرية ٢-٥٣. نفرض أن X مجموعة مرتبة مع التوبولوجي المرتب و نفرض أن Y مجموعة جزئية من X محدبة في X. إذن التوبولوجي المرتب على Y يكون هو نفس التوبولوجي على Y باعتبارها فضاء جزئي من X.

البرهان: نعتبر الشعاع $(a,+\infty)$ في X. ما هو تقاطعه مع Y؟ إذا كانت $a\in Y$ فإن

$$(a,+\infty)\cap Y=\{x : x\in Y \text{ and } x>a\}$$

وهذه شعاع مفتوح في المجموعة المرتبة Y. إذا كانت $a\notin Y$ فإن a تكون إما حد أدنى أو حد أعلى لـ Y، لأن Y محدبة. في الحالة الأولى $(a,+\infty)\cap Y$ تساوي Y وفي الحالة الثانية تكون هي المجموعة الخالية.

ملاحظة مماثلة تبين أن تقاطع الشعاع $(-\infty,a)$ مع Y يكون إما شعاع مفتوح في Y أو Y نفسها أو المجموعة الخالية. حيث أن المجموعات $(a,+\infty)\cap Y$ و $(-\infty,a)\cap Y$ تكون أساس جزئي

لتوبولوجي الفضاء الجزئي على Y، وحيث أن كل منها تكون مفتوحة في التوبولوجي المرتب، التوبولوجي المرتب يحتوي توبولوجي الفضاء الجزئي.

لإثبات الاحتواء العكسي، لاحظ أن أي شعاع مفتوح في Y يساوي تقاطع شعاع مفتوح في X مع Y، لذلك يكون مفتوح في توبولوجي الفضاء الجزئي على Y . حيث أن الأشعة المفتوحة في Y تكون أساس جزئي للتوبولوجي المرتب على Y، هذا التوبولوجي يكون محتوى في توبولوجي الفضاء الجزئي.

تمارين ٢-٤

١- نفرض أن Y فضاء جزئي من الفضاء التوبولوجي X وأن $A \subset Y$. بين أن التوبولوجي المكون على A باعتبارها فضاء جزئي من Y يكون هو نفس التوبولوجي على A باعتبارها فضاء جزئي من X.

٢- صف التوبولوجي المولد على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بالتوبولوجي الاقليدي على $\mathbb{R}$.

٣- بين أن كل فضاء جزئي من الفضاء المتقطع (غير المتقطع) يكون فضاء متقطع (غير متقطع).

٤- نفرض أن Y فضاءا جزئيا من الفضاء التوبولوجي X و $A \subset Y$. بين أنه إذا كانت A مغلقة في Y وكانت Y مغلقة في X فإن A تكون مغلقة في X.