الباب الأول
أساسيات
Fundamintals

في هذا الباب الأولي نناقش باختصار العديد من المفاهيم الرياضية الأساسية التي سوف تستخدم في معالجتنا اللاحقة لأساسيات التوبولوجي. هذه المفاهيم تشتمل على قواعد المنطق الرياضي، طرق البرهان، المجموعات، الرواسم، العلاقات والترتيب.

١-١ المنطق الرياضي

المنطق هو أساس التفكير الرياضي وقواعد المنطق تحدد معنى العبارات الرياضية. فعلى سبيل المثال، هذه القواعد تساعدنا على فهم تفسير تلك العبارات.

لفهم الرياضيات، يجب علينا أن نفهم كيفية تشكيل محاججة (حجة) رياضية صحيحة، وهو ما يعرف بالبرهان. بمجرد أن نبرهن على صحة عبارة رياضية فإن هذه العبارة تسمى نظرية. مجموعة النظريات حول موضوع ما تنظم ما نعرفه عن هذا الموضوع. لتعلم موضوع ما في الرياضيات، نحتاج إلى بناء الحجج والمناقشات الرياضية حول هذا الموضوع وليس مجرد عرض لها. علاوة على ذلك، لأن معرفة إثبات نظرية غالبا ما يجعل من الممكن تعديلها لتناسب أوضاع جديدة، فإن البراهين تلعب دورا أساسيا في تطوير واستحداث أفكار جديدة.

في هذا القسم، سوف نشرح كيفية تشكيل الحجج الرياضية الصحيحة ونقدم الأدوات اللازمة لبناء هذه الحجج. أيضا سوف نعطي عددا وافرا من طرق البرهان المختلفة التي من شأنها أن تمكننا من أن نبرهن العديد من الأنواع المختلفة من النتائج. بعد إدخال العديد من طرق البرهان المختلفة سوف نقدم بعض الاستراتيجيات لبناء البراهين.

منطق التقارير

قواعد المنطق تعطي المعنى الدقيق للبيانات الرياضية. وتستخدم هذه القواعد للتمييز بين الحجج الرياضية الصالحة وغير الصالحة. حيث أن

أحد الأهداف الرئيسية لهذا الموضوع هو تعليم الطالب كيفية فهم وبناء الحجج الرياضية الصحيحة، لذلك نبدأ دراستنا بمقدمة للمنطق.

التقارير (الفرضيات)

تعريف ١-١ . التقرير أو الفرضية proposition هو جملة خبرية تحتمل الصدق أو الكذب ولكنها لا تحتمل الاثنين معا.

مثال ١-٢. الجمل الخبرية التالية كلها تقارير

(أ) القاهرة عاصمة جمهورية مصر العربية.

(ب) أسيوط تقع شمال القاهرة.

(ج) $1+1=2$.

(د) $2+2\neq 4$.

التقريران (أ) و(ج) صادقان، بينما التقريران (ب) و(د) كاذبان.

المثال التالي يعطي بعض الجمل التي ليست تقارير.

سوف نرمز للتقارير بالحروف الصغيرة مثل $p,q,r,s,...$.

قيمة الصدق truth value للتقرير تكون T أو 1 إذا كان التقرير صادقا وتكون F أو 0 إذا كان التقرير كاذبا. جزء المنطق الذي يهتم بالتقارير يسمى **حساب التقارير** propositional calculus أو **منطق التقارير** propositional logic .

تعريف ١-٣. التقرير المركب compound proposition هو التقرير الذي نحصل عليه من تقارير معروفة باستخدام مايسمى عمليات الربط المنطقية أو المؤثرات المنطقية.

تعريف ١-٤ . نفرض p تقرير. العبارة "ليس الحال هو p " أو للاختصار "ليس p " تعطي تقرير جديد، يسمى " **نفي** $\boldsymbol{p}$ " negation of p ويرمز له بالرمز $\sim p$.

تعريف ١-٥ . جدول الصدق Truth table هو الجدول الذي يوضح قيم الصدق للتقارير المركبة من تقارير بسيطة. جدول ١-١ يعطي قيمتي الصدق المحتملتين للتقرير p وقيم الصدق التي تناظرها للتقرير $\sim p$.

p	$\sim p$
T	F
F	T

جدول ١ـ١

فيما يلي سوف نعطي مؤثرات منطقية تستخدم لتكوين تقرير جديد من تقارير موجودة عددها إثنين أو أكثر. هذه المؤثرات المنطقية تسمى أيضا **أدوات ربط** connectives.

تعريف ١ـ٦ . نفرض p و q تقريرين. التقرير "p و q" أو " p and q " ويرمز له بالرمز $p \wedge q$ هو التقرير الذي تكون قيمة الصدق له T فقط عندما تكون قيمة الصدق لكلا التقريرين p و q هي T وتكون F فيما عدا ذلك. التقرير $p \wedge q$ يسمي **عطف** p و q conjunction of. حيث أن $p \wedge q$ مركب من تقريرين بسيطين وكل تقرير له إحتمالين لقيم الصدق فإن التقرير $p \wedge q$ يكون له أربعة إحتمالات لقيم الصدق وبالتالي جدول الصدق له يتكون من أربعة صفوف.

جدول الصدق للتقرير $p \wedge q$ هو المبين في جدول ١ـ٢.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول ١ـ٢

تعريف ١ـ٧ . نفرض p و q تقريران. التقرير"p أو q" أو " p or q" ويرمز له بالرمز $p \vee q$ هو التقرير الذي يكون كاذب فقط عندما يكون التقريران p و q كاذبان ويكون صادق فيما عدا ذلك. التقرير $p \vee q$ يسمى **فصل** p و q disjunction of. جدول الصدق للتقرير $p \vee q$ هو المعطى في جدول ١ـ٣.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول ١-٣

العبارات الشرطية Conditional Statements

الآن نناقش طرق أخرى مهمة لتكوين تقارير جديدة من تقارير معطاة.

تعريف ١-٨ . نفرض p و q تقريران. **التقرير الشرطي** conditional statement $p \to q$ هو التقرير " إذا كان p فإن q ". التقرير الشرطي $p \to q$ يكون كاذب فقط عندما تكون p صادق و q كاذب ويكون $p \to q$ صادق فيما عدا ذلك. في التقرير الشرطي $p \to q$ ، p تسمى **الفرض** أو المعطيات hypothesis و q تسمى **الخلاصة** أو النتيجة conclusion.التقرير الشرطي $p \to q$ يسمى أيضا **تضمين** implication.

جدول الصدق للتقرير الشرطي $p \to q$ هو المبين في جدول ١-٤.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول ١-٤

المنكوس (المقلوب)، المكافئ العكسي والمعكوس

Converse, contrapositive and Inverse

يوجد بعض العبارات الشرطية التي يمكن صياغتها من $p \to q$. العبارة الشرطية $q \to p$ تسمى **منكوس** $p \to q$ converse . المكافئ العكسي لـ $p \to q$ contrapositive هو العبارة الشرطية $\sim q \to \sim p$. التقرير $\sim p \to \sim q$ يسمى **معكوس** inverse $p \to q$.

المكافئ العكسي $\sim q \to \sim p$ للعبارة الشرطية $p \to q$ يكون له نفس قيم الصدق مثل $p \to q$. لبيان ذلك لاحظ أن المكافئ العكسي يكون كاذب فقط عندما يكون $\sim p$ كاذب و $\sim q$ صادق، وهذا يحدث فقط عندما يكون p صادق و q كاذب. من جهة أخرى لا المنكوس $q \to p$ ولا المعكوس $\sim p \to \sim q$ يكون له نفس قيم الصدق مثل $p \to q$ لكل الاحتمالات لقيم الصدق لـ p و q. لبيان ذلك، لاحظ أنه عندما p يكون صادق و q كاذب فإن العبارة الشرطية الأصلية تكون كاذب، ولكن المنكوس والمعكوس كلاهما يكون صادق. عندما يكون عبارتان شرطيتان مركبتان دائما لهما نفس قيم الصدق نقول أنهما **متكافئتان** equivalent، لذلك العبارة الشرطية ووضعها المعكوس تكونا متكافئتين. المعكوس والمنكوس لعبارة شرطية أيضا متكافئتان.

طريقة أخرى لتكوين تقرير مركب من تقارير معطاة نقدمه في التعريف التالي:

تعريف ١-٩ . نفرض p و q تقريران. التقرير **الشرطي المزدوج** biconditional statement $p \leftrightarrow q$ هو التقرير "p إذا وفقط إذا كان q". التقرير الشرطي المزدوج $p \leftrightarrow q$ يكون صادق فقط عندما يكون التقريران p و q لهما نفس قيمة الصدق ويكون كاذب فيما عدا ذلك.

جدول الصدق للتقرير $p \leftrightarrow q$ هو المعطى في جدول ١-٥.

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

جدول ١-٥

لاحظ أن التقرير الشرطي المزدوج $p \leftrightarrow q$ يكون صادق عندما يكون كلا التقريرين $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ صادق. لذلك التعبير "p إذا وفقط إذا كان q" يستخدم لهذا التقرير.

القوانين والتناقضات

نوع هام من الخطوات في بناء الحجج الرياضية هو إستبدال تقرير بتقرير آخر له نفس قيمة الصدق. وبسبب ذلك، الطرق التي تنتج تقارير لها نفس قيم الصدق كتقارير مركبة تستخدم على نطاق واسع في بناء الحجج الرياضية.

تعريف ١-١٠ . التقرير المركب والذي تكون قيمة الصدق له دائما هي T بغض النظر عن قيم الصدق للتقارير التي يتركب منها يسمى **قانون** tautology. التقرير المركب والذي تكون قيمة الصدق له دائما هي F يسمى **تناقض** contradiction. التقرير الذي ليس قانون وليس تناقض يسمى **عارض** أو محتمل contingency.

التكافؤ المنطقي

تعريف ١-١١ . التقريران المركبان يقال أنهما **متكافئان منطقيا** logically equivalent إذا كان لهما نفس قيم الصدق بغض النظر عن قيم الصدق للتقارير البسيطة المركب منهما التقريران. بتعبير آخر التقريران المركبان p و q يقال أنهما متكافئان إذا كان التقرير $p \leftrightarrow q$ قانون. الرمز $p \equiv q$ يستخدم للدلالة على أن التقريرين p و q متكافئان.

لبيان أن تقريرين متكافئين يمكن استخدام جداول الصدق لكلا التقريرين ويكون التقريران متكافئان إذا كانت قيم الصدق في العمودين المناظرين لهما متساوية.

المقدرات والمسورات

المسورات

عندما تعطى قيم لكل المتغيرات في دالة التقرير فإن العبارة الناتجة تصبح تقرير بقيمة صدق معينة. ومع ذلك توجد طرق أخرى مهمة، تسمى **تسوير** quantification لانشاء تقرير من دالة تقرير. التسوير يعبر عن التفويض الذي يجعل مقدرة تكون صادقة على مدى من العناصر. في اللغة الكلمات كل، بعض، العديد ، قليل و لاشيء تستخدم في التسوير. سوف نركز هنا على نوعين من التسوير: التسوير الشامل universal quantification والذي يخبرنا بأن مقدرة تكون صادقة لكل العناصر تحت الاعتبار. وتسوير الوجود existential quantification والذي يخبرنا بأنه يوجد واحد أو أكثر من العناصر الذي تكون المقدرة عنده صادقة. جزء المنطق الذي يختص بدراسة المقدرات والمسورات يسمى **حساب المقدرات** predicate calculus.

المسور الشامل

العديد من العبارات الرياضية تؤكد أن خاصية ما تكون صحيحة لكل القيم لمتغير ما في نطاق معين، يسمى النطاق الشامل أو النطاق domain . مثل هذه العبارات يمكن التعبير عنها باستخدام التسوير الشامل. التسوير الشامل لدالة التقرير هو التقرير الذي ينص على أن $P(x)$ تكون محققة لكل قيم x في النطاق. النطاق يعين القيم الممكنة للمتغير x.

تعريف ١-١٢. التسوير الشامل universal quantification لـ $P(x)$ هو التقرير "$P(x)$ تكون محققة لكل قيم x في النطاق"

يستخدم الرمز $\forall x\, P(x)$ للدلالة على التسوير الشامل لـ $P(x)$. هنا $\forall$ تسمى **المسور الشامل** universal quantifier.

التقرير $\forall x\, P(x)$ يقرأ هكذا "لكل x $P(x)$ "

لبيان أن العبارة التي على الصورة $\forall x\, P(x)$ تكون كاذبة، حيث $P(x)$ هي دالة التقرير، نحتاج فقط لايجاد قيمة x في النطاق بحيث $P(x)$ تكون كاذبة. مثل هذه القيمة x تسمى مثال عكسي counterexample للعبارة $\forall x\, P(x)$.

تسوير الوجود

العديد من العبارات الرياضية تؤكد أنه يوجد عنصر يحقق خاصية معينة. مثل هذه العبارات يمكن التعبير عنها باستخدام تسوير الوجود. باستخدام تسوير الوجود نكون تقرير يكون صادق إذا وفقط إذا كان $P(x)$ صادق لقيمة واحدة على الأقل x في النطاق.

تعريف ١-١٣ . تسوير الوجود لـ $P(x)$ هو التقرير "يوجد عنصر x في النطاق بحيث $P(x)$ تكون صادقة". نستخدم الرمز $\exists x\ P(x)$ لتسوير الوجود لـ $P(x)$. هنا $\exists$ تسمى **مسور الوجود** existential quantifier.

دائما النطاق يجب أن يعين عندما نستخدم العبارة $\exists x\ P(x)$. علاوة على ذلك معنى $\exists x\ P(x)$ يتغير عندما يتغير النطاق. بدون تعيين النطاق $\exists x\ P(x)$ لا يكون لها معنى. تسوير الوجود $\exists x\ P(x)$ يقرأ

"يوجد x بحيث $P(x)$ "

أو "يوجد على الأقل عنصر واحد x بحيث $P(x)$"

أو "لبعض x $P(x)$"

نفي تعبيرات التسوير

غالبا ما نكون في حاجة إلى نفي تعبير مسور. على سبيل المثال نعتبر نفي العبارة:

"كل طالب في هذا الفصل درس مقرر نظرية الزمر"

هذه العبارة هي تسوير شامل، ليكن $\forall x\ P(x)$، حيث $P(x)$ هي التعبير "x درس مقرر نظرية الزمر " والنطاق يتكون من كل الطلاب في هذا الفصل. نفي هذه العبارة هو "ليس الحال أن كل طالب في هذا الفصل درس مقرر نظرية الزمر " وهذه تكافئ "يوجد طالب في هذا الفصل لم يدرس مقرر نظرية الزمر " وهذه ببساطة تسوير الوجود لنفي دالة التقرير الأصلية، أي $\exists\ x \sim P(x)$.

هذا المثال يوضح لنا أن $\sim \forall\ x\ P(x) \equiv \exists\ x \sim P(x)$.

لبيان أن $\sim \forall\ x\ P(x)$ و $\exists\ x \sim P(x)$ متكافئان منطقيا بغض النظر عن ماهية دالة التقرير $P(x)$ ولا ما هو النطاق، أولا نلاحظ أن $\sim \forall\ x\ \ P(x)$ يكون صادق إذا وفقط إذا كان $\forall\ x\ \ P(x)$ كاذب. وهذا يتحقق إذا وفقط إذا كان يوجد عنصر x في النطاق حيث $P(x)$ يكون كاذب. وهذا يتحقق إذا وفقط إذا كان يوجد عنصر x في النطاق حيث $\sim P(x)$ يكون صادق. أخيرا ، لاحظ أنه يوجد عنصر x في النطاق حيث $\sim P(x)$ يكون صادق إذا وفقط إذا كان $\exists\ x \sim P(x)$ صادق. من ذلك ينتج أن $\sim \forall\ x\ P(x)$ و $\exists\ x \sim P(x)$ يكونا متكافئان منطقيا.

نفرض أننا نرغب في نفي تسوير الوجود. على سبيل المثال، نعتبر التقرير

"يوجد طالب في هذا الفصل درس مقرر نظرية الزمر "

هذا هو تسوير الوجود $\exists\ x\ Q(x)$ ، حيث $Q(x)$ هي العبارة "x درس مقرر نظرية الزمر ". نفي هذه العبارة هو التقرير "ليس الحال أنه

يوجد طالب في هذا الفصل قد درس مقرر نظرية الزمر " وهذه هي التسوير الشامل لنفي دالة التقرير الأصلية، أي $\forall x \ \sim Q(x)$.

هذا المثال يوضح لنا التكافؤ $\sim \exists x\, Q(x) \equiv \forall x \sim Q(x)$.

قواعد نفي التسويرات تسمى قوانين دي مورجان للمسورات De Morgan's laws for quantifiers.

طرق البرهان

في هذا الجزء نقدم مفهوم البرهان ونصف الطرق التي يبنى بها البرهان. البرهان هو محاججة صحيحة والتي تقرر صدق جملة رياضية. البرهان يمكن أن يستخدم فروض النظرية، إذا كانت موجودة، المسلمات التي يفترض أنها صحيحة والنظريات المبرهنة سلفا. باستخدام هذه المقومات وقواعد الاستدلال، الخطوة الأخيرة في البرهان تقرر صدق الجملة التي بصدد برهانها.

بعض المصطلحات الفنية

النظرية theorem هي جملة يمكن بيان أنها صادق. في الرياضيات نكتب نظرية عادة للجملة التي تعتبر على الأقل مهمة بعض الشيء. النظريات الأقل أهمية أحيانا تسمى تقارير (أو **فرضيات**) propositions. (النظريات أيضا يمكن الاشارة إلى أنها حقائق facts أو نتائج results). النظرية قد تكون تسوير شامل لجملة شرطية بفرض واحد أو أكثر مع خلاصة. ومع ذلك قد تكون نوع آخر من العبارات المنطقية. نوضح أن النظرية تكون صادقة بالبرهان. **البرهان** هو محاججة صحيحة تقرر صدق النظرية. العبارات المستخدمة في البرهان يمكن أن تشمل مسلمات وهي العبارات التي نفترض أنها صادقة، معطيات النظرية ، إن وجدت، و النظريات التي سبق برهانها.

النظرية الأقل أهمية والتي تساعد في برهان نتائج أخرى تسمى **تمهيدية** lemma. البراهين المعقدة يكون من الأيسر فهمها عندما تبرهن باستخدام سلسلة من التمهيديات التي تبرهن منفصلة. **اللازمة** أو **النتيجة الطبيعية** corollary هي نظرية يمكن استنتاجها مباشرة من نظرية تم إثباتها. **المقترح** (الحدس) conjecture هو عبارة يراد إثباتها لتكون

عبارة صادقة، ويكون ذلك عادة على أساس بعض الأمارات الجزئية. عندما يوجد برهان للمقترح فإنه يسمى نظرية.

طرق برهان النظريات

الآن نقدم مجموعة من طرق البرهان المختلفة. هذه الطرق سوف تصبح جزء من ذخيرتك لبرهان النظريات.

لإثبات نظرية على الصورة $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$، هدفنا هو بيان أن $P(c) \rightarrow Q(c)$ يكون صادق ، حيث c عنصر اختياري في النطاق ومن ثم نطبق التعميم الشامل. في هذا البرهان، نحتاج لبيان أن العبارة الشرطية صادقة. بسبب ذلك سوف نركز الطرق التي تبين أن العبارات الشرطية تكون صادقة. نذكر هنا أن $p \rightarrow q$ تكون صادقة إلا إذا كانت p صادقة و q كاذبة.

البرهان المباشر

البرهان المباشر للعبارة الشرطية $p \rightarrow q$ هو البرهان الذي يكون عندما نفرض أولا أن p يكون صادق، الخطوات التالية تكون باستخدام قواعد الاستدلال والخطوة الأخيرة بيان أن q يجب أن يكون صادق. البرهان المباشر يبين أن العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ يكون صادق ببيان أنه إذا كان p صادق فإن q يجب أن يكون صادق، لذلك التركيبة p صادق و q كاذب لا تحدث أبدا. في البرهان المباشر، نفترض أن p صادق ونستخدم مسلمات، تعاريف، ونظريات سبق برهانها ، لبيان أن q يجب أن يكون صادق.

البرهان باستخدام المكافئ العكسي

البراهين المباشرة تقود من فروض النظرية إلى الخلاصة. هي تبدأ بالمعطيات ثم تستمر مع متتابعة الاستنتاجات وفي النهاية نصل إلى الخلاصة. ومع ذلك سوف نرى أن المحاولة مع البرهان المباشر غالبا تصل إلى نهاية عليلة. غالبا نحتاج طرق أخرى لإثبات النظريات على الصورة $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$. براهين النظريات على هذه الصورة

والتـي هـي ليست بـراهين مباشـرة، أي التـي لا تبـدأ بـالفروض وتنتهـي بالخلاصـة، تسمى براهين غير مباشرة indirect proofs.

نـوع مهم جدا من البرهان غير المباشر يعرف بالبرهان باستخدام المكافئ العكسي proof by contraposition . البـراهين باستخدام المكــافئ العكــسي تــستعمل حقيقـــة أن $p \to q$ تكــافئ مكافئهــا العكسي $\sim q \to \sim p$. هـذا يعنـي أن العبـارة الـشرطية $p \to q$ يمكـن برهانها ببيان أن مكافئها العكسي $\sim q \to \sim p$ يكون صادق.

البرهان الفارغ والبرهان البديهي

يمكننا بسرعة إثبات أن عبارة شرطية $p \to q$ تكون صادقه إذا عرفنا أن p كاذبـة، لأن $p \to q$ يجب أن تكون صـادقة عنـدما p تكـون كاذبة، لذلك نحصل على برهان يسمى **برهان فارغ** vacuous proof للعبــارة الـشرطية $p \to q$. البــراهين الفارغــة غالبــا تـستخدم لإثبــات حالات خاصة من النظريات التـي تنص علـى أن عبارات شرطية تكون صــادقة لكـل الأعـداد الـصحيحة الموجبـة (أي النظريــات مـن النــوع $\forall n\, P(n)$ ، حيث $P(n)$ هـي دالـة تقرير). آليات البرهـان لمثل هذه النظريات تدرس في الاستنتاج الرياضي.

البرهان باستخدام التناقض

لأن العبارة $r \wedge \sim r$ تكون تناقض حيث r تقرير، يمكننا إثبات أن p يكون صـادق إذا استطعنا بيـان أن $\sim p \to (r \wedge \sim r)$ يكـون صـادق لتقرير ما r. البراهين من هذا النوع تسمى برهان بالتناقض proofs by contradiction.

لأن البرهـان بالتنـاقض لـيس برهانــا مباشـرا فإنـه يعتبـر نـوع آخـر مـن البرهان غير المباشر.

البرهـان بالتنـاقض يمكـن استخدامه لبرهـان العبـارات الـشرطية. فـي مثل هذه البراهين نفرض أولا نفـي الخلاصـة. بعد ذلـك نـستخدم فـروض النظرية ونفي الخلاصـة للوصـول إلـى تنـاقض. (الـسبب فـي أن مثل هذه البــراهين تكـون صـحيحة يـستند علـى التكــافؤ المنطقـي لــ $p \to q$ و

$F \rightarrow (p\wedge \sim q)$. لبيان أن هاتان العبارتان متكافئتان، نلاحظ ببساطة أن كل منهما يكون كاذب تحديدا في حالة واحدة هي عندما p يكون صادق و q يكون كاذب.)

لاحظ أنه يمكننا إعادة كتابة البرهان باستخدام المكافئ العكسي لعبارة شرطية كبرهان بالتناقض. في برهان $p \rightarrow q$ بالمكافئ العكسي، نفرض أن $q\sim$ صادق. بعد ذلك نبين أن $p \sim$ يجب أن يكون صادق. في البرهان بالتناقض نفرض أن كلا من p و $q\sim$ صادق. بعد ذلك نستخدم الخطوات من برهان $\sim q \rightarrow \sim p$ لبيان أن $p\sim$ صادق. وهذا يقود إلى التناقض $p\wedge \sim p$، ويكتمل البرهان.

البراهين بالتكافؤ

لإثبات نظرية على صورة عبارة شرطية مزدوجة، أي على الصورة $p \leftrightarrow q$، نبين أن $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ كلاهما صادق. صحة هذا المسلك وضع على أساس القانون $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$.

أحيانا تنص نظرية على أن عددا من التقارير تكون متكافئة. مثل هذه النظرية تنص على أن التقارير $p_1, p_2, \ldots, p_n$ تكون متكافئة. هذا يمكن كتابته على الصورة $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n$ والتي تنص على أن كل التقارير والتي عددها n لها نفس قيم الصدق. نتيجة لذلك لكل i و j بحيث $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le n$ يكون p_i و p_j متكافئان. طريقة واحدة لإثبات هذه التكافؤات الثنائية هو استخدام القانون

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow p_1)]$$

هذا يبين أنه إذا كانت العبارات الشرطية $p_1 \rightarrow p_2$، $p_2 \rightarrow p_3$، ...، $p_n \rightarrow p_1$ يمكن بيان أنها صادقة، فإن التقارير $p_1, p_2, \ldots, p_n$ تكون جميعها متكافئة.

الأمثلة العكسية

يمكننا بيان أن العبارة على الصورة $\forall x P(x)$ كاذبة إذا أمكننا إيجاد مثال x على أن $P(x)$ كاذبة. هذا المثال يسمى مثال عكسي counterexample .

الاستنتاج الرياضي

على وجه العموم، الاستنتاج الرياضي يمكن استخدامه لإثبات العبارات التي تقترح أن $P(n)$ تكون صادقة لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n، حيث $P(n)$ هي دالة تقرير. البرهان باستخدام الاستنتاج له جزأين، خطوة الأساس basis step، حيث نبين أن $P(1)$ صادق، و خطوة الاستنتاج inductive step، حيث نبين أنه لكل الأعداد الصحيحة الموجبة k، إذا كان $P(k)$ صادق، فإن $P(k+1)$ يكون صادق.

مبدأ الاستنتاج الرياضي

لإثبات أن $P(n)$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n، حيث $P(n)$ دالة تقرير نكمل خطوتين

خطوة الأساس Basis Step: نتحقق من أن $P(1)$ صادق.

خطوة الاستنتاج Inductive Step: نبين أن العبارة الشرطية $P(k) \to P(k+1)$ تكون صادقة لكل عدد صحيح موجب k.

لإكمال خطوة الاستنتاج في البرهان باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي، نفرض أن $P(k)$ يكون صادق لأي عدد صحيح موجب اختياري k ونبين أنه تحت هذا الفرض، $P(k+1)$ يجب أيضا أن يكون صادق. الفرض بأن $P(k)$ صادق يسمى فرض الاستنتاج. بمجرد إكمال كلا الخطوتين في البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي، نكون قد بينا أن $P(n)$ صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة، أي أننا بينا أن $\forall n P(n)$ يكون صادق حيث التسوير مأخوذ على كل الأعداد الصحيحة الموجبة. في خطوة الاستنتاج، بينا أن $\forall k(P(k) \to P(k+1))$ يكون صادق. لصياغته كقاعدة استدلال، هذا الأسلوب للبرهان يمكن صياغته كما يلي

$$\left[\ P(1) \wedge \forall\ k\ \left(P(k) \rightarrow P(k+1)\right)\right] \rightarrow \forall\ n\, P(n)$$

ملاحظة ١-١٤. في البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي لا نفترض أن $P(k)$ صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة! فقط نبين أنه إذا فرض أن $P(k)$ صادق، فإن $P(k+1)$ يكون أيضا صادق. لذلك، البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي ليس حالة من تسول المسألة أو الاستدلال الدائري.

مثال ١-١٥. بين أنه إذا كان n عدد صحيح موجب، فإن

$$1+2+\ldots+n = \frac{n}{2}(n+1)$$

الحل: نفرض $P(n)$ هي التقرير بأن مجموع n حد الأولى من الأعداد الصحيحة الموجبة يكون $n(n+1)/2$. يجب أن نفعل أمرين لإثبات أن $P(n)$ صادق لكل $n = 1,2,3,\ldots$. يجب أن نبين أن $P(1)$ يكون صادق وأن العبارة الشرطية $P(k) \rightarrow P(k+1)$ تكون صادقة لكل $k = 1,2,3,\ldots$.

خطوة الأساس: $P(1)$ يكون صادق، لأن $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

خطوة الاستنتاج: لفرض الاستنتاج، نفرض أن $P(k)$ محقق لعدد صحيح موجب اختياري k. أي نفرض أن

$$1+2+\ldots+k = \frac{k}{2}(k+1)$$

تحت هذا الفرض، يجب أن نبين أن $P(k+1)$ يكون صادق، أي أن

$$1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

يكون أيضا صادق. بإضافة $k+1$ إلى كلا الطرفين في المعادلة في $P(k)$، نحصل على

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k}{2}(k+1)+(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

المعادلة الأخيرة تبين أن $P(k+1)$ يكون صادق تحت الفرض أن $P(k)$ صادق. وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

الآن أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، لذلك بالاستنتاج الرياضي، يكون $P(n)$ صادق لكل عدد صحيح موجب n. الذي برهناه هو

$1+2+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$ لكل عدد صحيح موجب n.

الاستنتاج الرياضي ليس أداة لإيجاد نظريات عن الأعداد الصحيحة الموجبة، ولكن طريقة لإثبات النتائج التي بالفعل تم اقتراحها.

الاستنتاج القوي

الآن نقدم صورة للاستنتاج الرياضي تسمى الاستنتاج القوي Strong induction والذي يستخدم غالبا عندما يكون ليس من السهل استخدام الاستنتاج الرياضي. خطوة الأساس في البرهان باستخدام الاستنتاج القوي هي نفس خطوة الأساس في البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي. أي أننا نبرهن أن $P(1)$ تكون صحيحة عندما نريد إثبات أن $P(n)$ تكون صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة. ومع ذلك خطوة الاستنتاج في البرهانين تختلف. حيث في البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي خطوة الاستنتاج تبين أنه إذا كان $P(k)$ صادق، فإن $P(k+1)$ يكون أيضا صادق. أما في البرهان بالاستنتاج القوي، خطوة

الاستنتاج تبين أنه إذا كان $P(j)$ صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن k، فإن $P(k+1)$ يكون أيضا صادق. أي أن خطوة الاستنتاج تفرض أن $P(j)$ يكون صادق لكل $j=1,2,\ldots,k$.

الاستنتاج القوي

لإثبات أن $P(n)$ تكون صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة، حيث $P(n)$ دالة تقارير، نكمل خطوتين:

خطوة الأساس: نتحقق من أن التقرير $P(1)$ يكون صادق.

خطوة الاستنتاج: نبين أن العبارة الشرطية

$$[P(1)\wedge P(2)\wedge\ldots\wedge P(k)]\rightarrow P(k+1)$$

تكون صادقة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة k.

لاحظ أنه عند استخدام الاستنتاج القوي لإثبات أن $P(n)$ تكون صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة فروض الاستنتاج تشتمل على كل التقارير $P(1)$، $P(2)$،...، $P(k)$، لأنه يمكننا استخدام أي من هذه التقارير لإثبات $P(k+1)$ بدلا عن حالة الاستنتاج الرياضي التي نستخدم فيها $P(k)$ فقط لإثبات صحة $P(k+1)$.

الاستنتاج القوي يسمى أحيانا المبدأ الثاني للاستنتاج الرياضي second principle of mathematical induction أو الاستنتاج التام complete induction.

تمارين ١-١

١- كون جدول الصدق للتقارير المركبة التالية

(أ) $p\wedge\sim p$.　　(ب) $p\vee\sim p$.

(ج) $(p\vee\sim q)\rightarrow q$.　　(د) $(p\vee q)\rightarrow(p\wedge q)$.

(هـ) $p\rightarrow\sim p$.　　(و) $p\leftrightarrow\sim p$.

٢- بين أن التقارير الشرطية التالية تكون قوانين باستخدام جداول الصدق

(أ) $[\sim p\wedge(p\vee q)]\rightarrow q$.

(ب) $\left[(p \to q) \wedge (q \to r)\right] \to (p \to r)$.

(ج) $\left[\, p \wedge (p \to q)\,\right] \to q$.

٣- نفرض أن نطاق دالة التقرير $P(x)$ تتكون من الأعداد الصحيحة 1، 2، 3، 4 و 5. عبر عن العبارات بدون استخدام المسورات ولكن بدلا عنها استخدم النفي، الفصل والعطف.

(أ) $\exists x\, P(x)$.
(ب) $\forall x\, P(x)$.

(ج) $\sim \exists x\, P(x)$.
(د) $\sim \forall x\; P(x)$.

(هـ) $\forall x\, \left((x \neq 3) \to P(x)\right) \vee \exists\, x\; \sim P(x)$.

٤- أثبت انه إذا كان n عدد صحيح و $n^3 + 5$ فردي فإن n يكون زوجي باستخدام

(أ) المكافئ العكسي.
(ب) برهان بالتناقض.

٥- برهن بالتناقض أن مجموع عدد غير كسري وعدد كسري يكون عدد غير كسري.

٦- برهن أنه إذا كان n عدد صحيح موجب فإن n يكون زوجي إذا وفقط إذا كان $7n + 4$ زوجي.

٧- باستخدام الاستنتاج الرياضي برهن أن

$$1.2 + 2.3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)$$

حيثما كان n عدد صحيح موجب.

٨- برهن أن $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ حيثما كان n عدد صحيح موجب أكبر من 1.

٩- استخدم الاستنتاج في إثبات أن $n^3 + 2n$ تقبل القسمة على 3، حيثما كان n عدد صحيح غير سالب.

١٠- بين باستخدام الاستنتاج الرياضي أن $n^5 - n$ تقبل القسمة على 5، حيثما كان n عدد صحيح غير سالب.

١١- بين باستخدام الاستنتاج الرياضي أن $n^2 - 1$ تقبل القسمة على 8، حيثما كان n عدد صحيح موجب فردي.

١٢- برهن أنه إذا كان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و $B_1, B_2, \ldots, B_n$ مجموعات بحيث $A_k \subseteq B_k$ لكل $k = 1,2,3,\ldots,n$ ، فإن

(أ) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. (ب) $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} B_k$.

١-٢ المجموعات Sets

الآن ، نقدم أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات ألا وهي المجموعات. المجموعات تستخدم لتجميع الأشياء مع بعضها. غالبا، الأشياء في مجموعة يكون لها خواص متماثلة. فمثلا، كل الطلاب في هذا الفصل تكون مجموعة، كما أن كل الطلاب المسجلين في مقرر التوبولوجي تكون مجموعة. الآن نعطي تعريف المجموعة.

تعريف ١-١٦ . المجموعة هي تجمع من الأشياء غير المرتبة.

تعريف ١-١٧ . الأشياء في مجموعة أيضا تسمى عناصر elements أو أعضاء members المجموعة. يقال أن المجموعة تحتوي contain عناصرها. عادة نرمز للمجموعات بالحروف الكبيرة مثل A، B، C، ... وللعناصر بالحروف الصغيرة مثل a، b، c، ...

يوجد العديد من الطرق لوصف المجموعة. واحدة من هذه الطرق هو سرد عناصر المجموعة، عندما يكون ذلك ممكنا. نستخدم رمز الأقواس حيث جميع عناصر المجموعة تكتب بين قوسين على الصورة $\{\ \}$. على سبيل المثال، الرمز $\{a,b,c\}$ يمثل مجموعة بها ثلاث عناصر a ، b و c.

أحيانا رمز الأقواس يستخدم لوصف مجموعة دون كتابة جميع عناصرها. بعض عناصر المجموعة تكتب، ومن ثم نستخدم علامات النقاط (...) عندما يكون السلوك العام للعناصر واضح.

المجموعات التالية تلعب دورا هاما في الرياضيات

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$ ،

مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ ،

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^{+}=\{1,2,3,\ldots\}$ ،

مجموعة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}=\{p/q : p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0\}$ ،

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

تعريف ١-١٨. مجموعتان يقال أنهما متساويتان إذا كان لهما نفس العناصر.

طريقة أخرى لوصف مجموعة باستخدام رمز منشئ المجموعة set builder. نصف جميع العناصر في مجموعة بإعطاء الخاصية أو الخواص التي يجب أن تحققها العناصر. فمثلا، المجموعة O من الأعداد الصحيحة الفردية الموجبة أقل من 10 يمكن أن تكتب بالصورة

{x: x عدد صحيح موجب فردي أقل من 10 }

المجموعات يمكن أن تمثل بالرسم باستخدام **أشكال فن**. في أشكال فن، **المجموعة الشاملة** universal set ، وهي المجموعة التي تحتوي كل الأشياء تحت الاعتبار، تمثل بمستطيل. داخل هذا المستطيل تمثل المجموعات بدوائر أو بأي أشكال أخرى. أحيانا تستخدم النقاط لتمثل عناصر معينة في المجموعة.

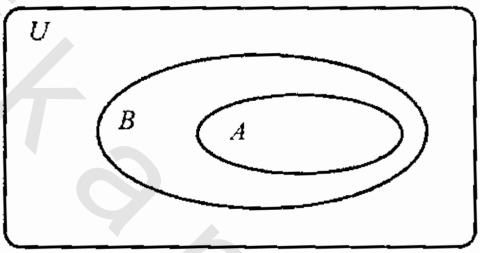
نكتب $x\in A$ لنرمز إلى أن x عنصر في A. الرمز $x\notin A$ يعنى أن x ليست عنصر أو لا تنتمي إلى A.

توجد مجموعة خاصة لا تحتوي أية عناصر. هذه المجموعة تسمى **المجموعة الخالية** empty set ويرمز لها بالرمز ϕ ، وقد يرمز لها أحيانا بالرمز $\{\}$.

ينبغي التمييز بين المجموعة الخالية ϕ والمجموعة $\{\phi\}$، أي المجموعة التي تحتوي عنصر واحد ϕ.

المجموعة التي تحتوي عنصر واحد فقط مثل $\{x\}$ تسمى مجموعة مفردة singleton set.

تعريف ١-١٩ . يقال أن المجموعة A **مجموعة جزئية** من المجموعة B ، ونكتب $A \subseteq B$ إذا كانت كل عناصر A هي أيضا عناصر في B، كما هو موضح في شكل ١-١



$A \subseteq B$

شكل ١-١

واضح أن $A \subseteq B$ إذا وفقط إذا كان التقرير $\forall x(x \in A \to x \in B)$ صادق.

نظرية ١-٢٠ . لأي مجموعة S يكون

(i) $\phi \subseteq S$ ، (ii) $S \subseteq S$.

البرهان: سوف نبرهن (i) ونترك (ii) كتمرين.

نفرض S مجموعة. لبيان أن $\phi \subseteq S$ ، نوضح أن $\forall x\,(x \in \phi \to x \in S)$ يكون صادق . حيث أن المجموعة الخالية لا تحتوي أية عناصر ، ينتج أن $x \in \phi$ دائما كاذب. من ذلك ينتج أن التضمين $x \in \phi \to x \in S$ دائما صادق حيث أن الفرض فيها دائما كاذب. أي أن $\forall x\,(x \in \phi \to x \in S)$ يكون صادق. وهذا يكمل برهان (i).

لكي نؤكد على أن A مجموعة جزئية من B ولكن $A \neq B$، نكتب $A \subset B$ ونقول أن A مجموعة جزئية خالصة (فعلية proper subset من B.

لبيان أن مجموعتين لهما نفس العناصر نبين أن كل منهما مجموعة جزئية من الأخرى. بتعبير آخر يمكننا بيان أنه إذا كان A و B مجموعتان بحيث $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ فإن $A = B$.

تعريف ١-٢١ . نفرض S مجموعة. إذا كانت S تحوي تحديدا عدد n عنصر مختلفة، حيث n عدد صحيح غير سالب، فيقال أن S **مجموعة منتهية** finite set وأن n هو عدد عناصر S أو العدد الكاردينالي cardinality ويرمز لذلك بالرمز $|S|$. إذا لم تكن المجموعة S منتهية فإنها تكون **لانهائية** infinite.

تعريف ١-٢٢ . نفرض S مجموعة. **مجموعة القوة** the power set للمجموعة S، ويرمز لها بالرمز $P(S)$ ، هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من S.

إذا كان عدد عناصر مجموعة ما n فإن مجموعة القوة لها تحتوي 2^n عنصر.

الضرب الكارتيزي

النوني المرتب $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ هو تجمع مرتب فيه a_1 هو العنصر الأول، a_2 هو العنصر الثاني، ...، a_n هو العنصر النوني. كل عنصر من هذه العناصر يسمى إحداثي coordinate أو مركبة component .

نقول أن نونيان مرتبان متساويان إذا كانت إحداثياتهما المتناظرة متساوية. بتعبير آخر $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ إذا وفقط إذا كان $a_i = b_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

كحالة خاصة، عندما $n=2$ ، النوني المرتب يسمى **ثنائي** (زوج) **مرتب** ordered pair . الثنائيان المرتبان (a,b) و (c,d) يكونا متساويين إذا كان $a=c$ و $b=d$. لاحظ أن (a,b) و (b,a) يكونا غير متساويان إلا إذا كان $a=b$.

تعريف ١-٢٣ . نفرض A و B مجموعتان. **الضرب الكارتيزي** Cartesian product للمجموعتين A و B ، يرمز له بالرمز $A \times B$ ، هو مجموعة كل الثنائيات المرتبة (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$. أي أن

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

المجموعة الجزئية R من الضرب الكارتيزي $A \times B$ يسمى علاقة relation من المجموعة A إلى المجموعة B. عناصر R هي ثنائيات مرتبة حيث المركبة الأولى عنصر في A والمركبة الثانية عنصر في B. على سبيل المثال $R = \{(a,0),(a,1),(a,3),(b,1),(b,2)\}$ علاقة من المجموعة $\{a,b,c\}$ إلى المجموعة $\{0,1,2,3\}$.

حاصلا الضرب $A \times B$ و $B \times A$ غير متساويان إلا إذا كان $A = \phi$ أو $B = \phi$ (وفي هذه الحالة $A \times B = \phi$) أو إذا كان $A = B$.

العمليات على المجموعات

يمكن ضم مجموعتين أو أكثر بطرق مختلفة عديدة لنحصل على مجموعة أخرى.

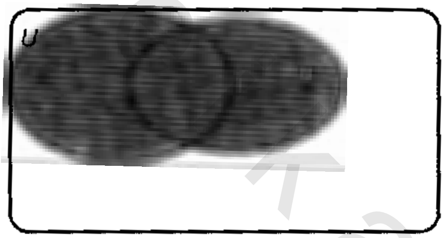
تعريف ١-٢٤. نفرض A و B مجموعتان. **إتحاد** union A و B ، يرمز له بالرمز $A \cup B$، هو المجموعة التي تحتوى كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما. أي أن

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

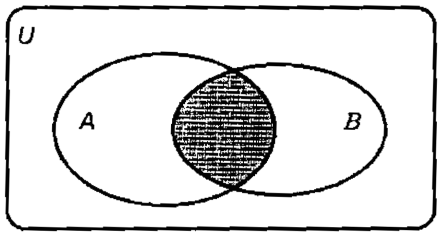
تعريف ١-٢٥ . نفرض A و B مجموعتان. **تقاطع** intersection A و B ، يرمز له بالرمز $A \bigcap B$ ، هو المجموعة التي تحتوي العناصر الموجودة في A و B معا. أي أن

$$A \bigcap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

في الشكل التالي، أشكال فن التي تمثل إتحاد وتقاطع المجموعتين A و B.



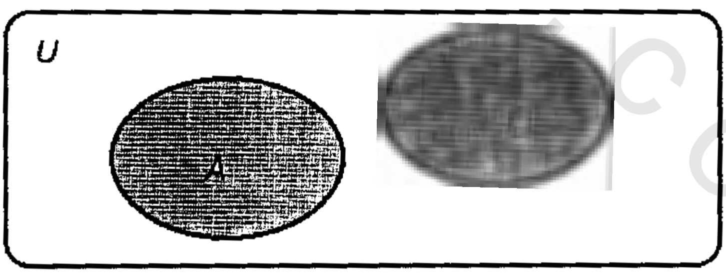
$A \bigcup B$



$A \bigcap B$

شكل ١-٢

تعريف ١-٢٦ . يقال أن مجموعتان **منفصلتان** (غير متقاطعتان) disjoint إذا كان تقاطعهما هو المجموعة الخالية. أي أن المجموعتان A و B تكونا منفصلتان إذا كان $A \bigcap B = \phi$.



$A \cap B = \phi$

شكل ١-٣

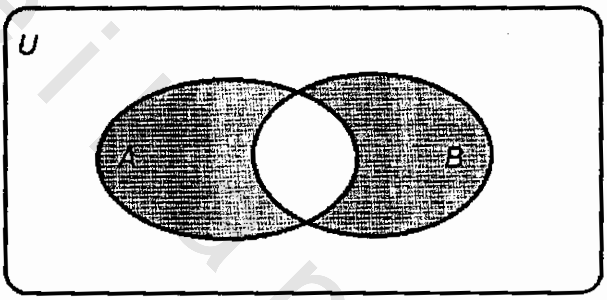
تعريف ١-٢٧. نفرض A و B مجموعتان. **الفرق** difference بين A و B ، يرمز له بالصورة $A - B$ (أو $A \setminus B$)، هو المجموعة المكونة

من تلك العناصر الموجودة في A ولكن ليست في B. الفرق بين A و B أيضا يسمى مكملة B بالنسبة إلى A. لذلك

$$A - B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$$

الفرق المتماثل symmetric difference لـ A و B ، يرمز له بالصورة $A \Delta B$، يعرف كما يلي:

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$$



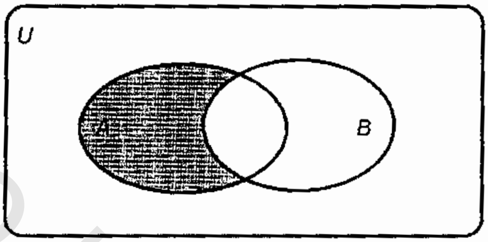
$A \Delta B = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$

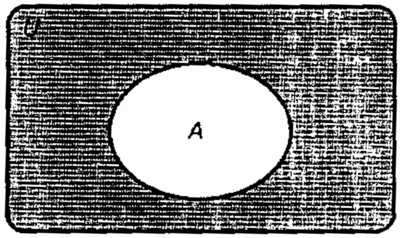
شكل ١ـ٤

تعريف ١ـ٢٨ . نفرض أن U هي المجموعة الشاملة. **المكملة** complement للمجموعة A، يرمز لها بالصورة $U \setminus A$ أو A^c ، هي مكملة A بالنسبة إلى U. العنصر ينتمي إلى $U \setminus A$ إذا وفقط إذا كان لا ينتمي إلى A. لذلك $A^c = U \setminus A = \{x : x \notin A\}$.

بمجرد تعيين المجموعة الشاملة، يمكن تعريف مكملة أي مجموعة.

الشكل التالي يوضح أشكال فن التي تمثل الفرق بين المجموعتين A و B ومكملة المجموعة A .





$A \backslash B$ **شكل ١-٥** $U \backslash A = A^c$

متطابقات المجموعات

الجدول التالي يعطي المتطابقات الأكثر أهمية في المجموعات. سوف نبرهن بعض هذه المتطابقات باستخدام ثلاث طرق مختلفة.

المتطابقة	الاسم
$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$	قوانين الوحدة
$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$	قوانين الهيمنة
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	قوانين التعادل
$(A^c)^c = A$	قانون التكميل
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	قوانين الإبدال
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	قوانين الدمج(المشاركة)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	قوانين التوزيع
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	قوانين دي مورجان
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	قوانين الامتصاص
$A \cup A^c = U$ $A \cap A^c = \phi$	قوانين المكملة

جدول ١ـ٥

حيث أن اتحاد وتقاطع المجموعات يحقق قوانين الدمج، المجموعات $A \cup B \cup C$ و $A \cap B \cap C$ تكون معرفة جيدا عندما تكون A، B و C مجموعات. أيضا يمكننا اعتبار اتحاد وتقاطع عدد اختياري من المجموعات.

تعريف ١-٢٩ . (i) اتحاد تجمع من المجموعات هو المجموعة التي تحتوي تلك العناصر التي تكون عناصر في واحدة على الأقل من مجموعات ذلك التجمع. نستخدم الرمز $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ لنشير إلى اتحاد المجموعات $A_1 , A_2 , ..., A_n$.

(ii) تقاطع تجمع من المجموعات هو المجموعة التي تحتوي تلك العناصر التي تكون عناصر في كل مجموعات ذلك التجمع. نستخدم الرمز $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .. \cap \cup A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ لنشير إلى تقاطع المجموعات $A_1 , A_2 , ..., A_n$.

تمارين ١-٢

١- أكتب عناصر المجموعات التالية

(أ) $\{ x :$ عدد حقيقي بحيث x $x^2 = 1 \}$.

(ب) $\{ x :$ عدد صحيح موجب أقل من x $12 \}$.

(ج) $\{ x :$ مربع عدد صحيح و x $x < 100 \}$.

(د) $\{ x :$ عدد صحيح بحيث x $x^2 = 2 \}$.

٢- استخدم العنصر المنشئ للمجموعة في وصف المجموعات التالية:

(أ) $\{0,3,6,9,12\}$. (ب) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

٣- حدد ما إذا كانت العبارات التالية صادقة أم كاذبة

(أ) $\phi \in \{0\}$. (ب) $0 \in \phi$. (ج) $\{0\} \subset \phi$.

(د) $\phi \subset \{0\}$. (هـ) $\{0\} \in \{0\}$. (و) $\{0\} \subset \{0\}$.

(ز) $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$. (ح) $\phi \in \{\phi\}$. (ط) $\phi \in \{\phi, \{\phi\}\}$.

(ي) $x \in \{x\}$. (ك) $\phi \in \{\{\phi\}\}$.

(ل) $\{x\} \in \{\{x\}\}$. (م) $\{x\} \subseteq \{x\}$. (ن) $\phi \in \{x\}$.

٤- نفرض A مجموعة. بين أن $\phi \times A = A \times \phi = \phi$.

٥- أوجد مجموعة القوة لكل من المجموعات التالية.

(أ) $\{a\}$. (ب) $\{a,b\}$. (ج) $\{\phi,\{\phi\}\}$.

٦- نفرض $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{0,3,6\}$. أوجد

(أ) $A \cup B$ (ب) $A \cap B$.

(ج) $A - B$. (د) $B - A$.

٧- نفرض A، B و C ثلاث مجموعات. بين أن

(أ) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$.

(ب) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$.

(ج) $(A - B) - C \subseteq A - C$.

(د) $(A - C) \cap (C - B) = \phi$.

(هـ) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.

٨- ماذا يمكن أن تقول عن المجموعتين A و B إذا علمت أن

(أ) $A \cup B = A$ ؟ (ب) $A \cap B = A$ ؟

(ج) $A - B = A$ ؟ (د) $A \cap B = B \cap A$ ؟

(هـ) $A - B = B - A$ ؟

٩- نفرض A و B مجموعتين. بين أن

(أ) $(A \cap B) \subseteq A$. (ب) $A \subseteq (A \cup B)$.

(ج) $A - B \subseteq A$. (د) $A \cap (B - A) = \phi$.

(هـ) $A \cup (B - A) = A \cup B$.

١٠- نفرض $A_i = \{1,2,3,...,i\}$ ، حيث $i = 1,2,3,...$. أوجد

(أ) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.   (ب) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

١١- لأي مجموعتين A و B برهن أن

(أ) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.

(ب) $(A \times B) \cup (B \times A) \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$.

١٢- لأي ثلاث مجموعات A ، B و C برهن أن

(أ) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ب) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(ج) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

(د) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(هـ) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

١٣- برهن أن $A \times B \subseteq C \times D$ إذا وفقط إذا كان $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$.

١-٣ الرواسم Mappings

في كثير من الحالات نعين لكل عنصر في مجموعة عنصر معين في مجموعة أخرى. على سبيل المثال مجموعة من الأشخاص وأرقام هواتفه أو تواريخ مواليدهم. هذا التعيين هو مثال لراسم. مفهوم الراسم (الدالة) له أهمية كبيرة في معظم فروع الرياضيات.

تعريف ١-٣٠ . نفرض A و B مجموعتان. الراسم (الدالة) f من A إلى B هو قاعدة تحدد عنصر وحيد من B لكل عنصر من A. نكتب $f(a) = b$ إذا كان b هو العنصر الوحيد من B الذي يتحدد بالراسم

f للعنصر a من A. إذا كان f راسم من A إلى B فإننا نكتب $f: A \to B$.

النطاق والمدى

إذا كان f راسم من A إلى B ، نقول أن A هي **نطاق** (مجال) f domain و B هي **النطاق المصاحب** codomain لـ f. إذا كان $f(a)=b$، نقول أن b هي صورة a image. **مدى** f range، $f(A)$، هو مجموعة كل صور عناصر A. أي أن

$$\text{range } f = \{b \in B : \exists a \in A \wedge f(a)=b\}$$

واضح أن المدى يكون مجموعة جزئية من النطاق المصاحب.

تعريف ١-٣١. نفرض $f: A \to B$ و $g: C \to D$ راسمان. يقال أن الراسمان f و g متساويان ونكتب $f = g$، إذا كان $A = C$، $B = D$ و $f(a) = g(a)$ لكل $a \in A$. أي أن الراسمان يكونا متساويان إذا كان لهما نفس النطاق ونفس النطاق المصاحب وتتساوى صور العناصر بالنسبة لكليهما.

من تعريف الراسم بأنه قاعدة تعين لكل عنصر من النطاق عنصر وحيد في النطاق المصاحب نجد أن كل عنصر في النطاق يجب أن يناظره عنصر في النطاق المصاحب وهذا العنصر في النطاق المصاحب يكون وحيدا. بناءً على ذلك فلا يصح أن يوجد عنصر في النطاق لا يناظره عنصر في النطاق المصاحب كما لا يجوز أن يكون هناك عنصر في النطاق يناظره أكثر من عنصر في النطاق المصاحب. ولكن للراسم قد توجد عناصر في النطاق المصاحب لا تناظرها عناصر في النطاق كما قد يوجد عنصر في النطاق المصاحب يناظره أكثر من عنصر في النطاق. هذه الحالات سوف نناقشها في أنواع الرواسم.

تعريف ١-٣٢ . نفرض $f : A \to B$ راسم ، $S \subseteq A$ و $H \subseteq B$. **صورة** image S هي المجموعة الجزئية من B التي تتكون من صور عناصر S. ونرمز لصورة S بالرمز $f(S)$ ، أي أن

$$f(S) = \{f(s) : s \in S\}$$

الصورة العكسية inverse image للمجموعة H، هي المجموعة الجزئية $f^{-1}(H)$ من A التي صورها عناصر في H، أي أن

$$f^{-1}(H) = \{a \in A : f(a) \in H\}$$

تحصيل الرواسم

تعريف ١-٣٣ . نفرض $g : A \to B$ و $f : B \to C$ راسمين. تحصيل (تركيب) composition الراسمين f و g ويرمز له بالصورة $f \circ g$ هو الراسم $f \circ g : A \to C$ المعرف بالصورة $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

لاحظ أن الراسم المركب $f \circ g$ لا يمكن تعريفة إلا إذا كان مدي g مجموعة جزئية من نطاق f.

تعريف ١-٣٤ . يقال عن الراسم $f : A \to B$ أنه **الراسم الثابت** constant map إذا وجد عنصر $b \in B$ بحيث $f(a) = b$ لكل $a \in A$.

تعريف ١-٣٥ . نفرض $f : A \to B$ راسم و $C \subset A$. الراسم $g : C \to B$ يسمى **تقييد** restriction لـ f على C إذا كان $g(a) = f(a)$ لكل $a \in C$. في هذه الحالة f يسمى **توسيع** extension لـ g. نرمز لتقييد f على C بالرمز f_C أو $f|C$.

تعريف ١-٣٦ . نفرض $f: A \to B$ راسم. إذا كان $A \subseteq B$ و $f(a)=a$ لكل $a \in A$ فإن f يسمى **راسم احتواء** inclusion. الراسم $f: A \to A$ بحيث $f(a)=a$ لكل $a \in A$ يسمى **راسم الوحدة** identity map أو راسم التطابق.

خواص الرواسم

بعض الرواسم يكون لها صور مختلفة للعناصر المختلفة في النطاق. هذا النوع من الرواسم يسمى أحادي.

تعريف ١-٣٧ . الراسم $f: A \to B$ يسمى **أحادي** (1-1) injective (one-to-one)، إذا كان $f(x)=f(y)$ يؤدي إلى $x=y$ لكل x و y في النطاق A. أو بتعبير مكافئ إذا كان $x \neq y$ يؤدي إلى $f(x) \neq f(y)$.

تعريف ١-٣٨ . الراسم $f: A \to B$ يقال أنه راسم **فوقي** onto or surjective إذا كان لكل عنصر $b \in B$ يوجد عنصر $a \in A$ بحيث $f(a)=b$. أي أن الراسم يكون فوقي إذا كان المدى للراسم يساوي النطاق المصاحب له.

تعريف ١-٣٩ . الراسم $f: A \to B$ يقال أنه **تناظر أحادي** (one-to-one correspondence) bijective إذا كان أحادي وفوقي.

تمهيدية ١-٤٠ . نفرض $f: X \to Y$ ، $g: Y \to Z$ راسمان، إذن

(١) إذا كان f و g فوقيان فإن $g \circ f: X \to Z$ يكون فوقي.

(٢) إذا كان f و g أحاديان فإن $g \circ f: X \to Z$ يكون أحادي.

البرهان: سوف نبرهن الجزء الثاني ونترك الجزء الأول كتمرين للقارئ.

نفرض $x_1, x_2 \in X$ بحيث $(g \circ f)(x_1)=(g \circ f)(x_2)$. إذن $g(f(x_1))=g(f(x_2))$. وحيث أن g أحادي، ينتج أن

$f(x_1)=f(x_2)$. ولكن f أيضا أحادي، لذلك $x_1=x_2$. وهذا يعني أن $g\circ f$ يكون أحادي.

من تمهيدية ١-٤٠ نستنتج أنه إذا كان $f:X\to Y$، $g:Y\to Z$ راسمان كلاهما تناظر أحادي فإن $g\circ f:X\to Z$ يكون أيضا تناظر أحادي.

نفرض $f:X\to Y$ راسم تناظر أحادي. إذا كانت $y\in Y$ فإنه يوجد $x\in X$ بحيث $f(x)=y$ (حيث أن الراسم فوقي) وحيث أن الراسم أحادي فإن هذا العنصر x يكون وحيد. نعرف الراسم $f^{-1}:Y\to X$ بالصورة $f^{-1}(y)=x$. الراسم f^{-1} يسمى معكوس f. الآن نحسب $f\circ f^{-1}$ والذي يرسم Y فوقي إلى X.

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y$$

لذلك $f\circ f^{-1}$ يكون هو راسم الوحدة على Y. كذلك $f^{-1}\circ f$ يكون هو راسم الوحدة من X فوق نفسها. من جهة أخرى إذا كان $f:X\to Y$ راسم بحيث يوجد راسم $g:Y\to X$ بحيث $g\circ f$ و $f\circ g$ تكون هي رواسم الوحدة على X و Y على الترتيب، سوف نوضح أن g يكون تناظر أحادي بين Y و X. لاحظ أن g فوقي، حيث إذا كان $x\in X$ فإن $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x$، لأن $g\circ f$ راسم وحدة. لذلك x يكون هو صورة $f(x)$ تحت تأثير g. لذلك g يكون فوقي. بالمثل إذا كان $g(y_1)=g(y_2)$، باستخدام خاصية أن $f\circ g$ راسم وحدة نجد أن

$$y_1=(f\circ g)(y_1)=f(g(y_1))=f(g(y_2))=(f\circ g)(y_2)=y_2$$

لذلك g يكون تناظر أحادي.

المناقشة السابقة هي برهان للنظرية التالية

نظرية ١-٤١. الراسم $f:X\to Y$ يكون تناظر أحادي إذا وفقط إذا كان يوجد راسم $g:Y\to X$ بحيث أن $g\circ f$ و $f\circ g$ تكون هي

رواسم الوحدة على X و Y على الترتيب. الراسم g يكون هو معكوس الراسم f.

الراسم التناظر أحادي يسمى **منعكس** (قابل للانعكاس) invertible، حيث أنه يمكننا تعريف معكوس لهذا الراسم. الراسم يسمى **غير منعكس** (غير قابل للانعكاس) not invertible إذا لم يكن له معكوس، أي إذا لم يكن تناظر أحادي.

برهان النظرية التالية يكون باستخدام تعريف تحصيل الرواسم وتعريف المعكوس ويترك كتمرين للقارئ.

نظرية ١-٤٢ . إذا كان $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ راسمان منعكسان فإن $g\circ f:X\to Z$ يكون منعكس ويكون $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

مع أن عملية تحصيل الرواسم لا تحقق قانون الإبدال، إلا أنها تحقق قانون الدمج (المشاركة).

نظرية ١-٤٣ . نفرض $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ و $h:Z\to W$ رواسم. إذن $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$.

البرهان: لاحظ أولا أن $h\circ g$ معرف ويأخذ Y إلى W، لذلك $(h\circ g)\circ f$ يكون أيضا معرف ويأخذ X إلى W. بالمثل $g\circ f$ معرف ويأخذ X إلى Z . لذلك $h\circ(g\circ f)$ يكون معرف ويأخذ X إلى W.

لإثبات التساوي يجب أن نبين أن

$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)$ لكل $x\in X$.

من تعريف تحصيل الراسمين

$$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x)))$$

كذلك

$$(h\circ(g\circ f))(x)=h\circ(g(f(x)))=h(g(f(x)))$$

إذن $((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)$ لكل $x\in X$.

نظريـــة ١-٤٤ . نفــرض $f:X\to Y$ راســم و $A,B\subseteq X$ و $G,H\subseteq Y$. إذن

(أ) $A=B \Leftarrow f(A)=f(B)$.

(ب) $G=H \Leftarrow f^{-1}(G)=f^{-1}(H)$.

(ج) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$.

(د) $f(f^{-1}(G))\subseteq G$.

(هـ) $f(G)-f(H)\subseteq f(G-H)$.

(و) $f^{-1}(G-H)=f^{-1}(G)-f^{-1}(H)$.

البرهان: (أ) نفرض $A=B$، إذن

$$y\in f(A)\Leftrightarrow \exists x\in A: f(x)=y\Leftrightarrow$$
$$\exists x\in B: f(x)=y\Leftrightarrow y\in f(B)$$

وعليه يكون $f(A)=f(B)$.

(ب) نفرض أن $G=H$، إذن

$$x\in f^{-1}(G)\Leftrightarrow f(x)\in G\Leftrightarrow f(x)\in H\Leftrightarrow x\in f^{-1}(H)$$

لذلك $f^{-1}(G)=f^{-1}(H)$.

(ج) حيث أن $x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(A))$ ،

لذلك $A\subseteq f^{-1}(f(A))$.

(د) حيث أن

$$y\in f(f^{-1}(G))\Rightarrow \exists x\in f^{-1}(G): y=f(x)\Rightarrow$$
$$f(x)\in G: y=f(x)\Rightarrow y\in G$$

لذلك $f(f^{-1}(G))\subseteq G$.

(هـ) حيث أن

$$y\in f(G)-f(H)\Rightarrow y\in f(G)\wedge y\notin f(H)\Rightarrow$$
$$\exists x\in G: y=f(x)\wedge f(x)\notin f(H)\Rightarrow$$
$$\exists x\in G: x\notin f^{-1}(f(H))\subseteq H\Rightarrow x\in H-G\Rightarrow$$
$$y=f(x)\in f(G-H)$$

لذلك $f(G)-f(H)\subseteq f(G-H)$.

(و) حيث أن

$$x\in f^{-1}(G-H)\Leftrightarrow f(x)\in G-H\Leftrightarrow$$
$$f(x)\in G\wedge f(x)\notin H\Leftrightarrow x\in f^{-1}(G)\wedge x\notin f^{-1}(H)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in(f^{-1}(G)-f^{-1}(H))$$

إذن $f^{-1}(G-H)=f^{-1}(G)-f^{-1}(H)$.

نظرية ١ـ٤٥ . نفرض $f:X\to Y$ راسم و $\{A_i\}_{i\in I}$ عائلة مرقمة من المجموعات الجزئية من X و $\{B_i\}_{i\in I}$ عائلة مرقمة من المجموعات الجزئية من Y. إذن

(أ) $f(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}f(A_i)$.

(ب) $f(\bigcap_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}f(A_i)$.

(ج) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$.

(د) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$.

البرهان: (أ) حيث أن

$$y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i : y = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\exists i \in I : x \in A_i \wedge y = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\exists j \in I : y \in f(A_j) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

إذن $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

(ب) حيث أن

$$y \in f(\bigcap_{i\in I} A_i) \Rightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i : y = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A_i \forall i \in I : y = f(x)$$

$$\Rightarrow (f(x) \in f(A_i) \forall i \in I) \wedge y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(A_i) \forall i \in I \Rightarrow y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

إذن $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

(ج) حيث أن

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \exists j \in I : f(x) \in B_j$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in I : x \in f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

إذن $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

(د) حيث أن

$$x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Leftrightarrow f(x) \in B_i, \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \ \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

لذلك $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)=\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

تعريف ١-٤٦ . **المتتابعة** هي راسم من مجموعة الأعداد الصحيحة، عادة إما المجموعة $\{0,1,2,3,...\}$ أو المجموعة $\{1,2,3,...\}$، إلى مجموعة S. نستخدم الرمز a_n لنرمز إلى صورة العدد الصحيح n. a_n تسمى حد للمتتابعة. نستخدم الرمز $\{a_n\}$ أو (a_n) لوصف المتتابعة. لاحظ أنه قد يحدث خلط مع رمز المجموعة، ولكن سوف يكون معروف ضمن سياق الكلام هل المقصود مجموعة أم متتابعة.

الأعداد الكاردينالية Cardinal numbers

المجموعتان X و Y يقال أنهما **متكافئتان في التأثير** equipotent إذا كان يوجد راسم تناظر أحادي بين X و Y. لكل مجموعة X يعين عدد كاردينالي، يسمى **كاردينالية** cardinality of X ويرمز له بالرمز $|X|$. التساوي $|X|=|Y|$ يتحقق إذا وفقط إذا كان X و Y متكافئان في التأثير. العدد الكاردينالي الذي يعين للأعداد الصحيحة الموجبة يرمز له بالرمز $\aleph_0$ وتقرأ aleph zero. العدد الكاردينالي الذي يعين لمجموعة كل الأعداد الحقيقية يرمز له بالرمز $\mathfrak{c}$ (المتصل continuum). المجموعة تسمى **قابلة للعد** countable إذا كانت منتهية أو لها الكاردينالية $\aleph_0$. المجموعة اللانهائية قابلة للعد تسمي **لانهائية قابلة للعد** countably infinite.

للأعداد الكاردينالية، عمليات الجمع والضرب تكون معرفة. **مجموع** sum العددين الكاردينالبين m و n هو العدد الكاردينالي للمجموعة $X\cup Y$، حيث $|X|=m$ و $|Y|=n$ و $X\cap Y=\phi$. **حاصل ضرب** product m و n يرمز له بالرمز $m\cdot n$ أو mn. لأي عدد كاردينالي m، العدد 2^m، يرمز له أيضا بالرمز $\exp m$، يرمز إلى العدد الكاردينالي لمجموعة كل المجموعات الجزئية للمجموعة X التي تحقق $|X|=m$. يمكن إثبات أن $m<2^m$، على وجه الخصوص $\aleph_0<\mathfrak{c}$. يمكن إثبات أن $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$. أكثر تعميما، نعرف n^m على أنها العدد

الكاردينالي لمجموعة كل الدوال من X إلى Y، حيث $|X|=m$ و $|Y|=n$. يمكن إثبات أن

$$n^{m_1+m_2}=n^{m_1}n^{m_2} \text{ ،} (n_1n_2)^m=n_1^m n_2^m \text{ ،} (n^{m_1})^{m_2}=n^{m_1m_2}$$

إذا كان $m>\aleph_0$ فإن $m+m=m\cdot m=m$.

تمارين ١-٣

١- حدد ما إذا كان الراسم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تناظر أحادي، حيث

(أ) $f(x)=2x+1$. (ب) $f(x)=x^2+1$

(ج) $f(x)=x^3$. (د) $f(x)=\dfrac{(x^2+1)}{x^2+2}$.

٢- أوجد $f\circ g$ و $g\circ f$ حيث $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=x+2$ راسمين من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$.

٣- نفرض $f(x)=ax+b$ و $g(x)=cx+d$، حيث a، b، c و d ثوابت. حدد لأي الثوابت a، b، c و d يكون $f\circ g=g\circ f$ محقق.

٤- بين أن الراسم $f(x)=ax+b$ من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ يكون منعكس، حيث a و b ثوابت و $a\neq 0$، وأوجد معكوس f.

٥- نفرض $f:A\to B$ راسم و $S,T\subseteq A$، بين أن

(أ) $f(S\cup T)=f(S)\cup f(T)$.

(ب) $f(S\cap T)\subseteq f(S)\cap f(T)$.

٦- نفرض $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ راسم معرف بالصورة $f(x)=x^2$. أوجد

(أ) $f^{-1}(\{1\})$. (ب) $f^{-1}(\{x:0<x<1\})$.

(ج) $f^{-1}(\{x:x>4\})$.

٧- نفرض A و B مجموعتين منتهيتين حيث $f : A \to B$ راسم، بحيث $|A| = |B|$. بين أن f يكون أحادي إذا وفقط إذا كان فوقي.

٨- نفرض الرواسم $f : A \to B$ ، $g : B \to A$ ، $h : C \to B$ ، $F : B \to C$ و $G : A \to C$. بين ما إذا كان التحصيل التالي معرف أم لا. إذا كان معرف حدد النطاق والنطاق المصاحب للراسم الناتج.

(أ) $g \circ f$. (ب) $h \circ f$. (ج) $F \circ f$.

(د) $G \circ f$. (هـ) $g \circ h$. (و) $F \circ h$.

(ز) $h \circ G \circ g$. (ح) $h \circ G$.

٩- إذا كان $f : A \to B$ راسم أحادي وكان C و D مجموعتين جزئيتين من A فبرهن أن

(أ) $f(C) = f(D) \Leftarrow C = D$.

(ب) $C = f^{-1}(f(C))$.

(ج) $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.

(د) $f(C - D) = f(C) - f(D)$.

١-٤ العلاقات Relations

أكثر الطرق مباشرة للتعبير عن العلاقة بين عناصر مجموعتين هو استخدام الثنائيات المرتبة التي تنتج من العناصر ذات العلاقة. لهذا السبب، مجموعات الثنائيات المرتبة تسمى علاقات ثنائية.

تعريف ١-٤٩. نفرض A و B مجموعتان. **العلاقة الثنائية** binary relation من A إلى B هي مجموعة جزئية من $A \times B$.

بتعبير آخر العلاقة الثنائية من A إلى B هي مجموعة R من الثنائيات المرتبة، حيث العنصر الأول في كل ثنائي مرتب يأتي من A والعنصر

الثاني يأتي من B. نستخدم الرمز aRb للتعبير عن أن $(a,b)\in R$ و الرمز $a \not R b$ للتعبير عن أن $(a,b)\notin R$.

العلاقات على مجموعة

العلاقات من مجموعة إلى نفسها لها اهتمام خاص.

تعريف ١-٥٠ . العلاقة على المجموعة relation on a set A هي علاقة من المجموعة A إلى نفسها.

مثال ١-٥١ . كم علاقة توجد على مجموعة بها n عنصر ؟

الحل: العلاقة على مجموعة A هي مجموعة جزئية من $A\times A$. وحيث أن $A\times A$ بها n^2 عنصر عندما يكون A بها n عنصر والمجموعة التي بها m عنصر يكون لها 2^m مجموعة جزئية، فإنه يوجد 2^{n^2} مجموعة جزئية في $A\times A$. لذلك توجد 2^{n^2} علاقة على مجموعة بها n عنصر.

تعريف ١-٥٢. نفرض كانت $R\subseteq A\times B$ علاقة من A إلى B. إذن
نطاق domain R يرمز له بالرمز $\mathrm{dom}(R)$ يعرف كما يلي

$$\mathrm{dom}(R)=\{a\in A:\exists b\in B:(a,b)\in R\}$$

مدى range R يرمز له بالرمز $\mathrm{range}(R)$ يعرف كما يلي

$$\mathrm{range}(R)=\{b\in B:\exists a\in A:(a,b)\in R\}$$

تعريف ١-٥٣ . نفرض R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B ، أي أن $R\subseteq A\times B$. إذن $R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$ تسمى العلاقة العكسية أو **معكوس العلاقة** R. واضح أن R^{-1} علاقة من B إلى A لأن $R^{-1}\subseteq B\times A$.

خواص العلاقات

يوجد العديد من الخواص التي تستخدم في تصنيف العلاقات على مجموعة. هنا نقدم أكثر هذه الخواص أهمية.

تعريف ١-٥٤. العلاقة R على المجموعة A تسمى **عاكسة** reflexive ، إذا كان $(a,a)\in R$ لكل $a\in A$.

تعريف ١-٥٥ . العلاقة R على المجموعة A تسمى **متماثلة** symmetric إذا كان $(b,a)\in R$ كلما كان $(a,b)\in R$ لكل $a,b\in A$.

العلاقة R على المجموعة A بحيث $(a,b)\in R$ و $(b,a)\in R$ إذا وفقط إذا كان $a=b$ لكل $a,b\in A$ تسمى **متخالفة** antisymmetric.

تعريف ١-٥٦ . العلاقة R على المجموعة A تسمى **متعدية** (ناقلة) transitive إذا كان كلما كان $(a,b)\in R$ و $(b,c)\in R$ فإن $(a,c)\in R$ لكل $a,b,c\in A$.

علاقات الترتيب

تعريف ١-٥٧ . العلاقة R على المجموعة A تسمى **ترتيب جزئي** partial order على A إذا كانت R عاكسة ومتخالفة ومتعدية. أحيانا نطلق على علاقة الترتيب الجزئي على A **ترتيب** order or ordering لـ A .

تعريف ١-٥٨ . العلاقة R على المجموعة A تسمى **ترتيب خطي** linear order أو **ترتيب كلي** totally ordered أو **ترتيب بسيط** simply order على A إذا كانت R ترتيب جزئي وكان $(x,y)\in R$ أو $(y,x)\in R$ لكل $x,y\in A$، أي إذا كان كل عنصرين في A يمكن مقارنتهما بالنسبة إلى R.

إذا كانت R علاقة ترتيب على A فإننا عادة نكتب $<$ (أو أي رمز مماثل) بدلا عن R، بمعنى أن $x<y$ إذا وفقط إذا كان xRy . إذا كانت $\le$ علاقة ترتيب على A، فإننا نسمي الثنائي $(A,<)$ **مجموعة مرتبة جزئيا** أو للاختصار **مجموعة مرتبة** ordered set. علاوة على ذلك إذا كانت $\le$ ترتيب خطي فإننا نسمي $(A,<)$ **مجموعة مرتبة خطيا** linearly ordered set أو سلسلة chain.

عناصر خاصة في المجموعات المرتبة

تعريف ١-٥٩ . نفرض $(A,<)$ مجموعة مرتبة ونفرض B مجموعة جزئية من A. إذن

١- العنصر $b \in B$ يسمى **عنصر أصغر** في B least element (**عنصر أكبر** greatest element) إذا كان $b < x$ ($x < b$) لكل $x \in B$. المجموعة B يمكن أن يكون لها على الأكثر عنصر أصغر (عنصر أكبر) واحد. حيث إذا كان b و b' عنصران أصغران في B فإنه سوف يكون $b < b'$ و $b' < b$. لذلك من خاصية التخالف يكون $b = b'$.

٢- العنصر $b \in B$ يسمى **عنصر أصغري** minimal (**عنصر أعظمي** maximal) لـ B إذا كان لا يوجد $x \in B$ بحيث $x < b$ ($x > b$). إذا كانت المجموعة B تحتوي عنصر أصغر b فإنه بالطبع يكون هو العنصر الأصغري الوحيد في B. ومع ذلك إذا كانت B تحتوي عنصر أصغري فليس من الضروري أن يكون هو العنصر الأصغر الوحيد في B.

٣- العنصر $b \in A$ يسمى حد أدنى lower bound (حد أعلى upper bound) للمجموعة B، إذا كان $b < x$ ($b > x$) لكل $x \in B$.

٤- إذا كانت كل الحدود الدنيا لها عنصر أكبر، فإن هذا العنصر الأكبر يسمى **أكبر حد أدنى** greatest lower bound (glb) للمجموعة B. بالمثل يمكن تعريف **أصغر حد أعلى** least upper bound (lub) للمجموعة B.

تعريف ١-٦٠. نفرض أن X مجموعة، $<$ علاقة ترتيب على X و $a, b \in X$. سوف نستخدم الرمز (a,b) للدلالة على المجموعة $\{x : a < x < b\}$، التي تسمى فترة مفتوحة في X. إذا كانت هذه المجموعة خالية فإن a يسمى **سابق مباشر** immediate predecessor لـ b، و b يسمى **تالي مباشر** immediate successor لـ a.

تعريف ١-٦١. نفرض أن A و B مجموعتان مرتبتان بعلاقتي ترتيب $<_A$ و $<_B$، على الترتيب. نعرف علاقة ترتيب $<$ على $A \times B$ بتعريف

$$a_1 \times b_1 < a_2 \times b_2$$

إذا كـان $a_1 <_A a_2$ أو إذا كـان $a_1 = a_2$ و $b_1 <_B b_2$. هـذه تـسمى **علاقة ترتيب معجمي** dictionary order relation على $A \times B$.

الترتيب الجيد

المجموعة المرتبة كليا A تسمى **مرتبة ترتيبا جيدا** well-ordered إذا كان كل مجموعة جزئية غير خالية B من A يكون لها عنصر أصغر. علاوة على ذلك، $(A,<)$ تسمى **ترتيب جيد** well-order.

حيث أن A مرتبة كليا، ينتج أن أي مجموعة جزئية B تحتوي عنصر أصغري واحد وهذا العنصر يكون هو العنصر الأصغر.

علاقات التكافؤ

تعريف ١-٦٢ . العلاقة على مجموعة A تسمى **علاقة تكافؤ** equivalence relations إذا كانت عاكسة، متماثلة وناقلة.

علاقات التكافؤ تكون هامة في الرياضيات. أحد أسباب هذه الأهمية أنه في علاقة التكافؤ، عندما يكون عنصران مرتبطان بهذه العلاقة فإنه يكفل لنا القول بأنهما متكافئان.

تعريف ١-٦٣. العنصران a و b المرتبطان بعلاقة تكافؤ يقال أنهما **متكافئان** equivalent. الرمز $a \sim b$ يستخدم للرمز على أن a و b متكافئان بالنسبة لعلاقة تكافؤ معينة.

فصول التكافؤ

تعريف ١-٦٤. نفرض R علاقة تكافؤ على المجموعة A. مجموعة كل العناصر من A التي ترتبط مع العنصر a بالنسبة للعلاقة R يسمى **فصل تكافؤ** a equivalence class ويرمز له بالرمز $[a]_R$. عندما تكون لدينا علاقة واحدة تحت الاعتبار يمكن حذف الدليل R ونكتب $[a]$ للإشارة إلى فصل التكافؤ هذا. أحيانا تستخدم رموز أخرى لفصول التكافؤ منها $\overline{a}$ و $C(a)$.

بتعبير آخر، فصل تكافؤ العنصر a لعلاقة التكافؤ R على المجموعة A هو

$$[a]=\{s \in A :(a,s) \in R\}$$

إذا كان $b \in [a]$ ، فإن b يسمى ممثل representative لفصل التكافؤ هذا. أي عنصر في فصل التكافؤ يمكن أن يستخدم كممثل لفصل التكافؤ هذا.

فصول التكافؤ والتجزيء

نظرية ١-٦٥ . نفرض R علاقة تكافؤ على المجموعة A. العبارات التالية تكون متكافئة لكل $a,b \in A$:

(i) aRb . (ii) $[a]=[b]$. (iii) $[a]\cap[b]\neq\phi$.

البرهان: أولا نبرهن أن (i) ← (ii). نفرض أن aRb، ونفرض $c \in [a]$. إذن aRc. حيث أن aRb و R متماثلة، إذن bRa. علاوة على ذلك، حيث أن R ناقلة و bRa و aRc، ينتج أن bRc. لذلك $c \in [b]$. وهذا يبين أن $[a] \subseteq [b]$. بالمثل يمكن إثبات أن $[b] \subseteq [a]$. إذن $[a]=[b]$.

ثانيا نبرهن أن (ii) ← (iii). نفرض أن $[a]=[b]$، إذن $[a]\cap[b]\neq\phi$ ، حيث أن $a \in [a]$.

أخيرا نبرهن أن (iii) ← (i). نفرض أن $[a]\cap[b]\neq\phi$. إذن يوجد عنصر c بحيث $c \in [a]$ و $c \in [b]$. بتعبير آخر aRc و bRc. إذن aRc و cRb. وهذا يؤدي إلى aRb.

حيث أن (i) ← (ii) ، (ii) ← (iii) و (iii) ← (i) فإن العبارات الثلاث (i)، (ii) و (iii) تكون متكافئة.

الآن نبين كيف أن علاقة تكافؤ على مجموعة A تجزئ المجموعة. نفرض R علاقة تكافؤ على مجموعة A. إتحاد فصول تكافؤ العلاقة R

يكون هو كل A ، لأن أي عنصر a في A يكون في فصل التكافؤ الخاص به، $[a]_R$. بتعبير آخر

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

بالإضافة إلى ذلك، من نظرية ٣-٣-١١، ينتج أن فصول التكافؤ تكون إما متساوية أو غير متقاطعة، لذلك $[a]_R \cap [b]_R = \phi$ عندما $[a]_R \neq [b]_R$.

هاتان الملاحظتان تبين أن فصول التكافؤ تكون تجزيء للمجموعة A ، لأنها تقسم A إلى مجموعات جزئية منفصلة. بصورة أكثر دقة **التجزيء** partition لمجموعة S هو تجمع من المجموعات الجزئية من S بحيث تكون هذه المجموعات الجزئية منفصلة واتحادها يساوي S. بتعبير آخر تجمع المجموعات الجزئية $A_i , i \in I$ (حيث I مجموعة ترقيم) يكون تجزيء لمجموعة S إذا وفقط إذا كان

$A_i \neq \phi$ لكل $i \in I$،

$A_i \cap A_j = \phi$ كلما كان $i \neq j$،

و $\bigcup_{i \in I} A_i = S$

رأينا كيف أن فصول التكافؤ لعلاقة تكافؤ على مجموعة تكون تجزيء لهذه المجموعة. المجموعات الجزئية في هذا التجزيء هي فصول التكافؤ. والعكس، كل تجزيء لمجموعة يمكن أن يكون فصول تكافؤ. أي عنصران يكونا متكافئان بالنسبة لهذه العلاقة إذا وفقط إذا كانا ينتميان إلى نفس المجموعة الجزئية من التجزيء. لكي نرى ذلك، نفرض أن $\{A_i : i \in I\}$ تجزيء للمجموعة S. نفرض R علاقة على S تتكون من كل الثنائيات المرتبة (x , y) بحيث أن x و y ينتميان إلى نفس المجموعة الجزئية A_i من التجزيء. لبيان أن R علاقة تكافؤ يجب أن نبين أنها عاكسة، متماثلة ناقلة. حيث أن a تنتمي إلى نفس

المجموعة مثل نفسها، إذن $(a,a)\in R$ لكل $a \in S$ ومن ثم R تكون عاكسة. إذا كانت $(a,b) \in R$ فإن a و b ينتميان إلى نفس المجموعة من التجزيء، وبالتالي b و a ينتميان إلى نفس المجموعة من التجزيء وهذا يؤدي إلى $(b,a) \in R$ وتكون R متماثلة. أخيرا، إذا كان $(a,b) \in R$ و $(b,c)\in R$ فإن a و b ينتميان إلى نفس المجموعة الجزئية من التجزيء ولتكن X ، b و c ينتميان إلى نفس المجموعة من التجزيء ولتكن Y. إذن $b \in X \cap Y$. وحيث أن المجموعات الجزئية في التجزيء تكون إما غير متقاطعة أو متساوية، فإن $X = Y$. نتيجة لذلك يكون a و c تنتميان إلى نفس المجموعة الجزئية من التجزيء، X، لذلك $(a,c) \in R$ وتكون R ناقلة وبالتالي علاقة تكافؤ.

النظرية التالية تلخص لنا المناقشة السابقة

نظرية ١-٦٦ . نفرض R علاقة تكافؤ على مجموعة S . إذن فصول تكافؤ R تكون تجزيء للمجموعة S. وعلى العكس، إذا أعطينا تجزيء $\{A_i : i \in I\}$ للمجموعة S، فإنه توجد علاقة تكافؤ R تكون A_i ، $i \in I$ هي فصول التكافؤ لها.

تمارين ١-٤

١- أكتب كل الثنائيات المرتبة في العلاقة R من $A = \{0,1,2,3,4\}$ إلى $B = \{0,1,2,3\}$ حيث $(a,b)\in R$ إذا وفقط إذا كان

(أ) $a=b$. (ب) $a+b=4$. (ج) $a>b$. (د) $a|b$.

٢- لكل من العلاقات التالية على المجموعة $\{1,2,3,4\}$ حدد ما إذا كانت عاكسة، متماثلة، متخالفة أو ناقلة.

(أ) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$.

(ب) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

(ج) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$.

(د) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

(هـ) $\{(2,4),(4,2)\}$.

٣- نفرض R و S علاقتان عاكستان على المجموعة A . برهن على صحة أو عدم صحة العبارات التالية:

(أ) $R \bigcup S$ تكون عاكسة. (ب) $R \bigcap S$ تكون عاكسة.

(ج) $R - S$ تكون عاكسة. (د) $S \circ R$ تكون عاكسة.

٤- نفرض R، S و T ثلاث علاقات. برهن أن

(أ) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$.

(ب) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$.

(ج) $(R \circ S) - (R \circ T) \subseteq R \circ (S - T)$.

٥- نفرض l_1 و l_2 عنصران في مجموعة مرتبة L. برهن أنه إذا كان l_1 و l_2 لهما glb (lub) فإنه يكون وحيد.

٦- بين أنه إذا كانت L مجموعة مرتبة لها عنصر أصغر (عنصر أكبر) فإن هذا العنصر يكون وحيد.

٧- نفرض $L = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ مجموعة مرتبة بعلاقة الترتيب الجزئي "يقسم". حدد glb و lub لكل زوج من العناصر. هل هذه المجموعة المرتبة لها عنصر أصغر؟ هل لها عنصر أكبر؟

٨- أي من العلاقات التالية على مجموعة كل الرواسم من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$ تكون علاقة تكافؤ ؟ العلاقة التي ليست علاقة تكافؤ حدد الخواص التي تفقدها.

(أ) $\{(f,g) : f(1) = g(1)\}$.

(ب) $\{(f,g) : f(0) = g(0) \text{ or } f(1) = g(1)\}$.

(ج) $\{(f,g) : f(x) - g(x) = 1\}$.

(د) $\{(f,g): f(0)=g(1) \text{ and } f(1)=g(0)\}$.

٩- نفرض A مجموعة غير خالية و f راسم نطاقه A. نفرض R علاقة على A تتكون من كل الثنائيات المرتبة (x,y) بحيث $f(x)=f(y)$.

(أ) بين أن R تكون علاقة تكافؤ على A.

(ب) ما هي فصول تكافؤ R ؟

١٠- أكتب الثنائيات المرتبة في علاقة التكافؤ المولدة بالتجزيئات التالية للمجموعة $\{0,1,2,3,4,5\}$.

(أ) $\{0\},\{1,2\},\{3,4,5\}$.

(ب) $\{0,1\},\{2,3\},\{4,5\}$.

(ج) $\{0,1,2\},\{3,4,5\}$.

(د) $\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$.

١١- أكتب الثنائيات المرتبة في علاقة التكافؤ المولدة بالتجزيئات التالية للمجموعة $\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

(أ) $\{a,b\}$، $\{c,d\}$، $\{e,f,g\}$.

(ب) $\{a\}$، $\{b\}$، $\{c,d\}$، $\{e,f\}$، $\{g\}$.

(ج) $\{a,c,e,f\}$، $\{b,d\}$، $\{g\}$.

١٢- أي من التجمعات التالية تكون تجزيئا للمجموعة $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ ؟

(أ) $\{-2,0,2\}$, $\{-3,-1,1,3\}$.

(ب) $\{0,1,2,3\}$, $\{-3,-2,1,0\}$.