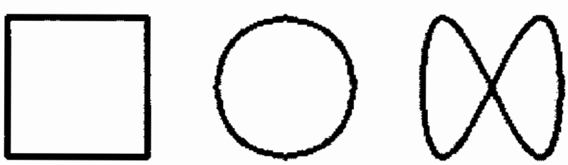
المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي جعل العلم النافع طريقاً موصلاً لرضاه، وصراطاً يتبعه من أراد هداه، ويحيد عنه من ضل واتبع هواه، ومن أضل ممن اتبع هواه بغير هدىً من الله، وأشهد أن لا إله إلا الله رفع شأن العلم وأهله حتى وصلوا من المجد منتهاه، ومن العز أعلى ذراه، فمن سلك طريقاً يبتغي فيه علماً؛ سهل الله له به طريقاً إلى جنته وعلاه، وأشهد أن محمداً عبده ورسوله الرحمة المهداة، والنعمة المسداة، صلى الله عليه وعلى آله وأصحابه الهداة التقاة، ومن سار على نهجه إلى يوم لقاه.

أما بعد فهذا كتاب أساسيات التوبولوجي أقدمه للمكتبة العربية حسبة لله وخدمة لأبنائي الدارسين إسهاما مني في تبسيط تدريس العلوم الحديثة وخاصة الرياضيات .

التوبولوجي هو دراسة خواص الفضاءات التي لا تتغير تحت تأثير التشكيل (التشويه) المتصل. أحيانا يسمى بالهندسة المطاطية، لأن الأشياء يمكن أن تشد أو تنكمش مثل المطاط ولكن لا يمكن أن تقطع أو تكسر. على سبيل المثال المربع يمكن أن يشكل إلى دائرة بدون قطع ولكن الشكل 8 لا يمكن. لذلك المربع يكافئ توبولوجيا الدائرة، ولكنه يختلف عن الشكل 8.



هنا بعض الأمثلة للأسئلة النموذجية في التوبولوجي. كم عدد الثقوب في الشيء؟ كيف يمكننا تحديد الثقوب في الكعكة أو الكرة؟ ما هي حدود الشيء؟ هل الفضاء مترابط؟ هل كل دالة متصلة من الفضاء إلى نفسه يكون لها نقطة ثابتة؟

التوبولوجي هو فرع من الرياضيات له صلة بالهندسة. ولكن له اسم يشترك مع موضوع ليس له علاقة به، دراسة التضاريس topography، أي دراسة طبيعة وأشكال التضاريس وأحيانا كيف يتغير مع مرور الوقت، ولكن في الاستخدام هنا التوبولوجي ليس له أي علاقة بالتضاريس.

التوبولوجي نوع من الهندسة إذا تجاهلنا التعقيدات في الشكل. التوبولوجي يتجاهل قضايا مثل الحجم والزاوية والتي عادة ما تسود فهمنا للهندسة. على سبيل المثال، في دراستنا الأولية للهندسة تعرفنا على المربعات، المستطيلات، متوازيات الأضلاع، أشباه المنحرف، وهكذا، وأعطيناها أسمائها وقياسات أضلاعها وزواياها. ولكن في التوبولوجي أهملنا الفروق التي نتجت عن المسافات، لذلك المربع والمستطيل تكون توبولوجيا نفس الشكل وبإهمال الزاوية يكون المستطيل ومتوازي الأضلاع تعتبر توبولوجيا نفس الشكل. في الواقع أي شكل رباعي الأضلاع يكون توبولوجيا نفس الشكل.

حتى لو أننا قلصنا أحد الأضلاع إلى الطول صفر، فإننا نحصل على مثلث، ولا نزال نعتبره نفس الشكل. أو إذا أحدثنا انحناء فإننا نحصل على عدد أضلاع أكثر، ويظل توبولوجيا هو نفس الشكل.

التوبولوجي هو فرع حديث نسبيا في الرياضيات. معظم البحوث في التوبولوجي بدأت حوالي عام ١٩٠٠. فيما يلي بعض فروع التوبولوجي.

التوبولوجي العام General Topology. التوبولوجي العام عادة يعتبر الخصائص المحلية للفضاءات ويكون وثيق الصلة بالتحليل. هو يعمم مفهوم الاتصال إلى تعريف الفضاءات التوبولوجية، والتي فيها يمكن اعتبار نهاية متتابعة. أحيانا يمكن تعريف المسافة في هذه الفضاءات، عندئذ تسمى فضاءات القياس metric spaces ، وأحيانا مفهوم المسافة لا يكون له معنى.

التوبولوجيا الاندماجية Combinatorial Topology. التوبولوجيا الاندماجية تعتبر الخواص الكلية للفضاءات، تكونت من شبكة من الرؤوس، الحواف والأوجه. هذا هو أقدم فرع من التوبولوجي ويعود إلى أويلر. قد تم بيان أن الفضاءات المتكافئة توبولوجيا لها نفس العدد اللاتغيري والذي يسمى مميز أويلر. هذا العدد $(V-E+F)$ حيث V، E و F هي عدد الرؤوس، الحواف والأوجه للشيء، على الترتيب. على سبيل المثال، رباعي السطوح والمكعب يكافئان توبولوجيا الكرة وأي تثليث للكرة سوف يكون له مميز أويلر 2.

التوبولوجي الجبري Algebraic Topology. التوبولوجي الجبري أيضا يعتبر الخواص الكلية للفضاءات، ويستخدم الأشياء الجبرية مثل الزمر والحلقات للإجابة عن الأسئلة التوبولوجية. التوبولوجي الجبري يحول المسائل التوبولوجية إلى مسائل جبرية التي نأمل أن تكون أيسر في الحل. على سبيل المثال، زمرة تسمى زمرة تناظر homology group يمكن أن تصاحب كل فضاء. الطوق Tours وقارورة كلاين Klein Bottle يمكن تمييز كل منهما عن الآخر حيث أن لهما زمر تناظر مختلفة.

زجاجة كلاين

الطوق

التوبولوجي الجبري أحيانا يستخدم تراكيب اندماجية لفضاء لحساب الزمر المختلفة التي تصاحب هذا الفضاء.

التوبولوجي التفاضلي Differential Topology. التوبولوجي التفاضلي يعتبر الفضاءات التي لها نوع من النعومة smoothness التي تصاحب كل نقطة. في هذه الحالة، المربع والدائرة لا يكونا متكافئين في

النعومة (أو تفاضليا). التوبولوجي التفاضلي يكون مفيد في دراسة خواص المجالات الاتجاهية مثل المجالات المغناطيسية أو الكهربائية.

التوبولوجي يستخدم في العديد من فروع الرياضيات مثل المعادلات قابلة للتفاضل، الأنظمة الديناميكية، نظرية العقد، و سطوح ريمان في التحليل المركب. أيضا يستخدم في نظرية الأوتار في الفيزياء و لوصف بنية الزمكان العام.

التوبولوجي من النظريات (التركيبات) الحديثة في الرياضيات التي نشأت في القرن التاسع عشر وتبلورت في القرن العشرين. رغم أن جذوره تمتد في الهندسة والتحليل الرياضي إلا أنه بنموه استقل عنهما وأصبح الآن أداة تخدم كل الرياضيات.

وقد نما التوبولوجي من نواحي هندسية كما في التوبولوجي التجميعي (التوافقي) combinatorial على أيدي أويلروأوغست ، فيرديناند موبيوس وفيليكس كلاين وريمان وتبلور على يد هنري بوانكاريه . ونما من التحليل الرياضي وكامتداد لنظرية المجموعات كما في التوبولوجي التحليلي (العام)، ومن ثم فإن نموه اتبع خطان أحدهما المجالات التي ينظر فيها إلى الفضاءات التوبولوجية على أنها تكوينات هندسية معممة ويكون التركيز فيها على تركيب الفضاءات نفسها. أما الخط الثاني ففي التحليل الرياضي حيث ينظر إلى االفضاءات التوبولوجية كحاملة للدوال المتصلة حيث تحتل الدوال المتصلة أهمية كبرى فيها.

ويعتبر كانتور من الأوئل المخترعين للتوبولوجي التحليلي، فقدم دراسة لمجموعات جزئية من الفضاء التوبولوجي وعليها قدم المفاهيم الأساسية للتوبولوجي مثل المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة والانغلاق ونقطة النهاية والداخل والخارج،....خاصة على خط الأعداد.

أما تعريف الفضاء التوبولوجي عن طريق المجموعات المفتوحة ويسمى توبولوجي المجموعات المفتوحة point set topology فقدمه

كازيميرز كوراتوفسكي Kuratowski (1922) ، وعن طريق الجوار فقدمه فيليكس هاوسدورف Felix Hausdorff (1914) وقد سبقهما فريشيه Frechet (1906) في تعريف الفضاء التوبولوجي عن طريق تقارب المتتابعات ولكن تعريفاتهم كانت غير مرضية، وقدم أندريه كولموجورف Kolmogorff (1935) وهاوسدورف Hausdorff (1914)، وتيخونوف Tychonoff (1930) أنواعا من الفضاءات التوبولوجية على أساس مسلمات الانفصال.

هذا الكتاب تم تصميمه لكي يستخدم على شكل كتاب لمقرر التوبولوجي العام في فصل دراسي أو فصلين دراسيين، أو كمساعد لفهم الكتب الموجودة. يتكون هذا الكتاب من عشرة أبواب عالجت الموضوعات الأساسية في التوبولوجي العام.

الباب الأول هو عبارة عن باب أولي يتم فيه تقديم العديد من المفاهيم الرياضية الأساسية التي سوف تستخدم في معالجتنا اللاحقة لأساسيات التوبولوجي. هذه المفاهيم تشتمل على قواعد المنطق الرياضي، طرق البرهان، المجموعات، الرواسم، العلاقات والترتيب.

الباب الثاني بعنوان الفضاءات التوبولوجية، يشتمل على تعريف الفضاء التوبولوجي وبعض الأمثلة للفضاءات التوبولوجية لنتعرف على كيفية التحقق من خواص التوبولوجي. أيضا نعطي أمثلة لفضاءات توبولوجية مشهورة، كثيرا ما يشار إليها خلال دراسة التوبولوجي، وندرس عددا من الطرق لتكوين توبولوجي على مجموعة بحيث تتحول إلى فضاء توبولوجي. أيضا نتعرض للمفاهيم الأولية التي تصاحب الفضاءات التوبولوجية مثل المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة. أيضا نقدم مفهوم الأساس والأساس الجزئي لتوبولوجي كما نقدم مفهوم التوبولوجي المرتب على مجموعة مرتبة. في نهاية الباب نقدم مفهوم التوبولوجي النسبي والفضاء الجزئي.

الباب الثالث يختص بتقديم بعض النقاط التي تتعلق بمجموعة جزئية في فضاء توبولوجي مثل نقطة النهاية، نقطة الإغلاق، النقطة الداخلية، النقطة الحدية، والنقطة الخارجية ونقدم العلاقات بين هذه النقاط وكذلك

خواص مجموعات هذه النقاط. كما نقدم علاقة هذه النقاط بالمجموعات المفتوحة والمغلقة. وفي نهاية الباب نقدم مفهوم الجوار لنقطة وخواص نظام الجوارات.

تم تخصيص الباب الرابع لدراسة الاتصال بين الفضاءات التوبولوجية. في هذا الباب نقدم مفهوم الدوال المتصلة حيث نقدم تعريف الدوال المتصلة بين الفضاءات التوبولوجية كما نقدم طرق تكوين الدوال المتصلة وبعض الخواص المكافئة للاتصال. أيضا نقدم مفهوم التشاكل التوبولوجي والخواص التوبولوجية.

في الباب الخامس نقدم طريقة أخرى لتكوين فضاءات توبولوجية جديدة من فضاءات معروفة. هذه الطريقة هي استخدام عدد من الفضاءات التوبولوجية المعروفة لتكوين فضاء توبولوجي جديد يسمى فضاء حاصل الضرب. سوف نقدم فضاء حاصل الضرب لعدد منتهي من الفضاءات التوبولوجية ولعدد لا نهائي من الفضاءات التوبولوجية.

واحد من أهم الطرق والأكثر استخداما في تعريف توبولوجي على مجموعة هو تعريف التوبولوجي بدلالة قياس على مجموعة. التوبولوجيات المعطاة بهذه الطريقة تكون في القلب من التحليل الحقيقي. فضاءات القياس هي مصدر غني يزودنا بوفرة من الأمثلة في التوبولوجي. تم تخصيص الباب السادس لدراسة فضاءات القياس. حيث نقدم تعريف القياس على مجموعة وأمثلة لقياسات مختلفة والتوبولوجي المولد بواسطة قياس. أيضا نتعرض لتعريف القياسات المتكافئة والفضاءات قابلة للقياس والشروط التي تجعل الفضاء التوبولوجي قابل للقياس.

الترابط هو موضوع الدراسة في الباب السابع. في هذا الباب نقدم تعريف الترابط والتعريفات المكافئة وخواص الفضاءات المترابطة وطرق تكوين فضاءات مترابطة. كذلك نتعرض بالدراسة للمجموعات المترابطة في خط الأعداد الحقيقية. أيضا نقدم مفهوم الترابط المساري والترابط الموضعي.

في الباب الثامن نقدم تعريف الإحكام وأمثلة للفضاءات المحكمة وخواص الفضاءات المحكمة وطرق تكوين فضاءات محكمة وإحكام

المتتابعات وإحكام نقطة النهاية. كما نقدم الفضاءات الجزئية المحكمة في خط الأعداد. أيضا نقدم مفهوم الترابط الموضعي وإحكام النقطة الواحدة.

تم تخصيص الباب التاسع لدراسة مسلمات قابلية العد ومسلمات التباعد. في هذا الباب سوف نقدم المسلمة الأولى والمسلمة الثانية لقابلية العد ومسلمة قابلية الفصل. أيضا نقدم مسلمات التباعد T_0 ، T_1 ، T_2 ، الفضاء المنتظم ، الفضاء العادي، فضاء T_3 ، فضاء T_4 والفضاء تام الانتظام.

فضاءات القسمة هي موضوع الدراسة في الباب العاشر وهو الأخير في هذا الكتاب. في هذا الباب نقدم تعريف راسم القسمة ونتعرف على خواص راسم القسمة. أيضا نقدم تعريف توبولوجي القسمة وفضاء القسمة وكيفية تكوين هذا التوبولوجي وعلاقة فضاء القسمة بالفضاء التوبولوجي المكون منه فضاء القسمة.

خلال عرض المادة العلمية حاولنا عرضها بصورة مبسطة ووضعنا بجوار كل مصطلح علمي ترجمته باللغة الانجليزية عند وروده للمرة الأولى لكي يتعرف عليه القارئ وحتى لا يكون هناك غموض في معنى المصطلح خاصة مع تعدد الترجمات.كذلك أوردنا عددا وافيا من الأمثلة المحلولة التي توضح المعنى المقصود من التعريف أو المفهوم المقدم. وفي نهاية كل فصل أوردنا عددا كافيا من التمارين التي تغطي المادة العلمية الواردة في هذا الفصل حتى يتمكن الطالب من اختبار مدى استيعابه للمفاهيم الواردة وذلك بمحاولة حل هذه التمارين.

في نهاية الكتاب أوردنا قائمة المراجع التي اعتمد عليها المؤلف في صياغة المحتوى العلمي للكتاب.

وفي الختام أسأل الله العظيم أن يتقبل هذا العمل وأن يجعله خالصا لوجهه الكريم وأن يكون نافعا ومفيدا لأبنائنا الدارسين كما أسأله سبحانه وتعالى التوفيق لهم، ونطلب الدعاء من كل من يقرأ في هذا الكتاب.

المؤلف

أ.د/ فتحي هشام خضر

رمضان ١٤٣٥هـ - يوليو ٢٠١٤ م