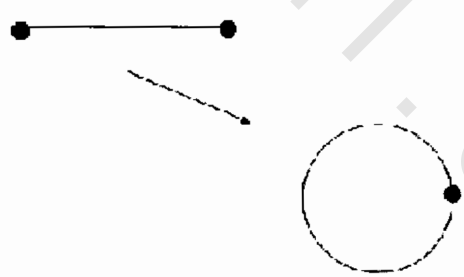
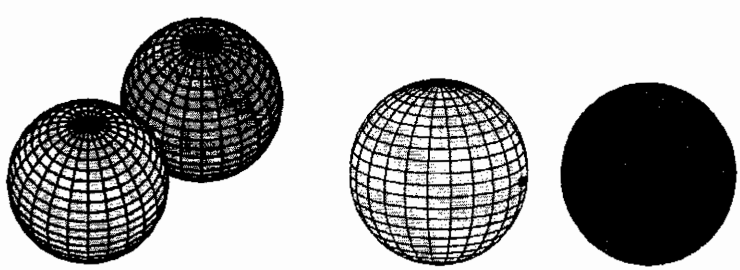
الباب العاشر
فضاءات القسمة
Quotient Spaces

الآن نناقش فكرة متميزة للغاية لتوبولوجي القسمة. الفكرة الأساسية هي أنه في مشاريعنا السابقة في التوبولوجي ناقشنا العديد من طرق تكوين فضاءات توبولوجية جديدة من فضاءات موجودة، مثل فضاءات حاصل الضرب والفضاءات الجزئية. الآن نحن بصدد مناقشة ما يمكن القول بأنه أهم نوع من التراكيب التوبولوجية وهو فضاء القسمة. الفكرة نشأت من رغبة التوبولوجيين في تمحيص فكرة لصق الفضاءات أو جزء منها بعضها للبعض. على سبيل المثال، نأخذ الفترة $[0,2\pi]$ ونربط نقطتي النهاية 0 و 2π . ما نحصل عليه هو شيء ما يشبه S^1. مثال آخر إذا أخذنا دائرتين ولامسناهما في نقطة واحدة لنجعلهما في صورة 8 . كلا الفكرتان لهما موضوع مشترك وهو أخذ نقطتين وجعلهما نقطة واحدة.

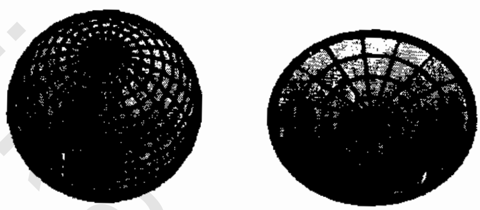




بالمثل يمكن لصق (مطابقة) أكثر من نقطتين. على سبيل المثال، الطوق (سطع الكعكة) torus ، يمكن تكوينه بأخذ مستطيل ولصق أحرفه

بعضها مع البعض. بلصق (تطابق) حرفي مستطيل المتقابلين نحصل على سطح اسطواني وبلصق (تطابق) قاعدتي الاسطوانة الدائرتين نحصل على سطح الكعكة.

سطح الكرة يمكن تكوينه بأخذ قرص دائري وضغط حدوده إلى نقطة واحدة



راسم القسمة

تعريف ١٠-١. نفرض أن X و Y فضاءان توبولوجيان و $p: X \to Y$ راسم فوقي. p يسمى **راسم قسمة** quotient map إذا تحقق الشرط: المجموعة الجزئية U من Y تكون مفتوحة في Y إذا وفقط إذا كان $p^{-1}(U)$ مفتوحة في X.

هذا الشرط أقوى من الاتصال. كشرط مكافئ هو أن المجموعة الجزئية A من Y تكون مغلقة في Y إذا وفقط إذا كان $p^{-1}(A)$ مغلقة في X. تكافؤ الشرطين يأتي من العلاقة

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

طريقة أخرى لوصف راسم القسمة كما يلي: نقول أن المجموعة الجزئية C من X تكون **مشبعة** saturated بالنسبة إلى الراسم الفوقي $p: X \to Y$ إذا كانت C تحتوي كل مجموعة $p^{-1}(\{y\})$ تقطعها. لذلك C تكون مشبعة إذا كان $C = p^{-1}(p(C))$. لكي نقول أن p راسم قسمة هذا يكافئ قولنا أن p متصلة وترسم المجموعات المفتوحة المشبعة في X إلى مجموعات مفتوحة في Y.

إذا كان $p: X \to Y$ راسم فإن المجموعة $U \subset X$ تسمى مشبعة إذا وجدت مجموعة $V \subset Y$ بحيث أن $U = f^{-1}(V)$. لذلك إذا كان $p: X \to Y$ راسم فوقي فإن $U \subset X$ تكون مشبعة إذا كان $f^{-1}(f(U)) = U$.

نوعان خاصان من رواسم القسمة هما الرواسم المفتوحة والرواسم المغلقة. من ذلك ينتج أنه إذا كان $p: X \to Y$ راسم فوقي متصل وإما مغلق أو مفتوح فإنه يكون راسم قسمة. توجد رواسم قسمة ليست مفتوحة أو مغلقة.

تعريف ١٠-٢. نفرض أن X فضاءا توبولوجيا ، A مجموعة و $p: X \to A$ راسم فوقي. إذن يوجد تحديدا توبولوجي واحد τ على A حيث يكون p هو راسم القسمة، هذا التوبولوجي يسمى **توبولوجي القسمة** quotient topology المولد بـ p.

التوبولوجي τ بالطبع يعرف بأنه يتكون من كل المجموعات الجزئية U من A بحيث $p^{-1}(U)$ تكون مفتوحة في X. يمكن بسهولة التحقق من أن τ يكون توبولوجي. المجموعات ϕ و A تكون مفتوحة لأن $p^{-1}(\phi) = \phi$ و $p^{-1}(A) = X$. الشرطان الآخران ينتجان من المعادلتين

$$p^{-1}(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in J} p^{-1}(U_\alpha)$$
$$p^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} U_i) = \bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i)$$

مثال ١٠-٣. نفرض أن $\pi_1 : X \times Y \to X$ هو راسم الإسقاط ، π_1 راسم متصل وفوقي. إذا كان $U \times V$ عنصر أساس للتوبولوجي على $X \times Y$ ، فإن الصورة $\pi_1(U \times V) = U$ تكون مفتوحة في X. من ذلك ينتج أن π_1 يكون راسم مفتوح. على وجه العموم π_1 راسم ليس مغلق. على سبيل المثال، راسم الإسقاط $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يأخذ المجموعة المغلقة $\{(x, y) : xy = 1\}$ فوقيا للمجموعة غير المغلقة $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

مثال ١٠-٤. نفرض أن X هو الفضاء الجزئي $[0,1]\cup[2,3]$ من $\mathbb{R}$ ونفرض أن Y هو الفضاء الجزئي $[0,2]$ من $\mathbb{R}$. الراسم $p:X\to Y$ المعرف بالصورة

$$p(x)=\begin{cases} x & \text{for } x\in[0,1] \\ x-1 & \text{for } x\in[2,3] \end{cases}$$

واضح أن راسم متصل، مغلق و فوقي ومع هذا ليس مفتوح؛ صورة المجموعة المفتوحة $[0,1]$ في X ليست مفتوحة في Y.

لاحظ أنه إذا كان A هو الفضاء الجزئي $[0,1)\cup[2,3]$ من X، فإن الراسم $q:A\to Y$ الذي نحصل عليه بتقييد p، يكون متصل وفوقي، ولكنه ليس راسم قسمة. حيث المجموعة $[2,3]$ تكون مفتوحة في A ومشبعة بالنسبة إلى q، ولكن صورتها ليست مفتوحة في Y.

مثال ١٠-٥. نفرض أن $\pi_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ هو المسقط فوق الإحداثي الأول. إذن π_1 يكون متصل وفوقي. علاوة على ذلك، π_1 يكون راسم مفتوح. حيث إذا كان $U\times V$ عنصر أساس غير خالي لـ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$، فإن $\pi_1(U\times V)=U$ تكون مفتوحة في $\mathbb{R}$؛ من ذلك ينتج أن π_1 يحمل المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ إلى مجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}$. ومع ذلك π_1 راسم ليس مغلق. المجموعة الجزئية

$$C=\{(x,y):xy=1\}$$

من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ تكون مغلقة، ولكن $\pi_1(C)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$، ليست مغلقة في $\mathbb{R}$.

لاحظ أنه إذا كان A الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}$ الذي يتكون من اتحاد C ونقطة الأصل $\{0\}$، فإن الراسم $q:A\to\mathbb{R}$ الذي نحصل عليه بتقييد π_1 يكون متصل وفوقي، ولكنه ليس راسم قسمة. حيث المجموعة $\{0\}$ تكون مفتوحة في A ومشبعة بالنسبة إلى q، ولكن صورتها ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$.

توبولوجي القسمة

الآن نبين كيف يمكن استخدام مفهوم راسم القسمة لتكوين توبولوجي على مجموعة.

تعريف ١٠-٦. نفرض أن X فضاء توبولوجي و A مجموعة، إذا كان $p: X \to A$ راسم فوقي فإنه يوجد توبولوجي واحد تحديدا τ على A بالنسبة له p يكون راسم قسمة؛ هذا التوبولوجي يسمى توبولوجي القسمة المولد بـ p.

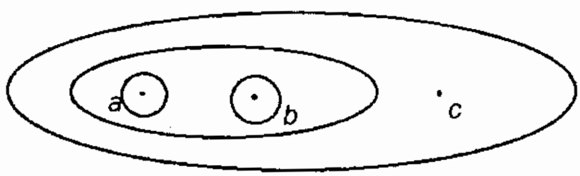
التوبولوجي τ بالطبع يعرف بفرض أنه يتكون من كل المجموعات الجزئية U من A بحيث أن $p^{-1}(U)$ تكون مفتوحة في X. يمكن التحقق من أن τ يكون توبولوجي. المجموعتين ϕ و A تكون مفتوحة في A لأن $p^{-1}(\phi) = \phi$ و $p^{-1}(A) = X$. $p^{-1}(A) = X$. الشرطان الآخران ينتجان من المعادلتين

$$p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} p^{-1}(U_\alpha)$$
$$p^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_i)$$

مثال ١٠-٧. الراسم $p: \mathbb{R} \to A = \{a, b, c\}$ المعرف بالصورة

$$p(x) = \begin{cases} a & \text{if } x > 0 \\ b & \text{if } x < 0 \\ c & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

يمكننا التحقق من أن توبولوجي القسمة على A المولد بـ p هو $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, A\}$ الموضح بالشكل



هناك وضع خاص حيث يحدث توبولوجي القسمة.

تعريف ١٠-٨. نفرض أن X فضاءا توبولوجيا. ونفرض أن X^* تجزيء لـ X إلى مجموعات جزئية غير متقاطعة اتحادها X. نفرض أن $p: X \to X^*$ هو الراسم الفوقي الذي يأخذ كل نقطة في X إلى

عنصر X^* الذي يحتويها. مع توبولوجي القسمة المولد بـ p ، الفضاء X^* يسمى **فضاء القسمة** quotient space لـ X.

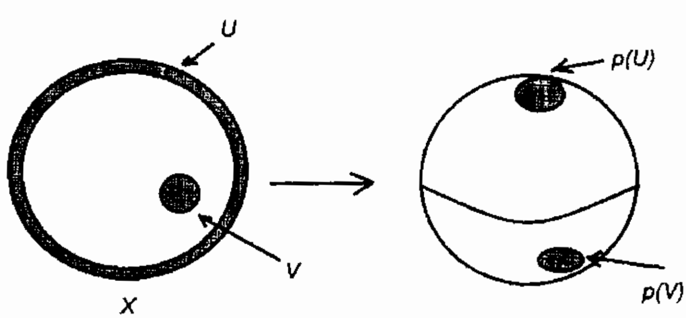
إذا أعطينا X^* فإنه يوجد علاقة تكافؤ على X حيث عناصر X^* تكون هي فصول التكافؤ. قد نعتقد في X^* بأنه تم الحصول عليها بمطابقة identifying كل زوج من النقاط المتكافئة. لهذا السبب فضاء القسمة X^* غالبا يسمى **فضاء المطابقة** identification space أو **فضاء التجزيء** decomposition space للفضاء X.

يمكننا وصف التوبولوجي على X^* بطريقة أخرى. المجموعة الجزئية U من X^* هي تجمع من فصول التكافؤ، والمجموعة $p^{-1}(U)$ هي تحديدا اتحاد تجمع فصول التكافؤ التي تنتمي إلى U. لذلك المجموعات المفتوحة النموذجية في X^* هو تجمع كل فصول التكافؤ التي اتحادها تكون مجموعة مفتوحة في X.

مثال ١٠-٩. نفرض أن X هو كرة الوحدة المغلقة

$$\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$$

في $\mathbb{R}^2$ ، ونفرض أن X^* هو تجزيء X المكون من كل المجموعات ذات النقطة الواحدة $\{(x,y)\}$ حيث $x^2+y^2<1$ جنبا إلى جنب مع المجموعة $S^1=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$. نموذج المجموعات المشبعة المفتوحة في X هي المظللة في الشكل.



يمكننا بيان أن X^* تكون متشاكلة توبولوجيا مع الفضاء الجزئي S^2 من $\mathbb{R}^3$ المعرف كما يلي

$$S^2=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1\}$$

مثال ١٠-١٠. نفرض أن X هو المستطيل $[0,1]\times[0,1]$. نعرف التجزيء X^* لـ X كما يلي: تتكون من كل المجموعات ذات النقطة الواحدة $\{(x,y)\}$ ، حيث $0<x<1$ و $0<y<1$ ، الأنواع التالية من المجموعات ذات النقطتين

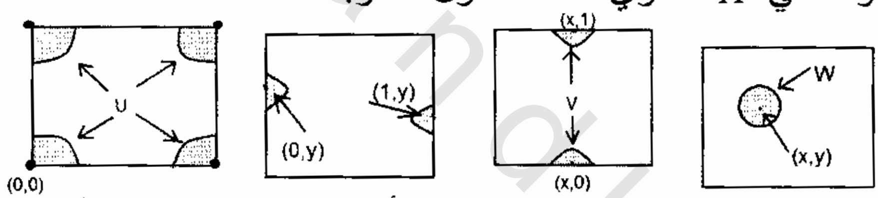
$$\{(x,0),(x,1)\} \quad \text{حيث} \quad 0<x<1$$

$$\{(0,y),(1,y)\} \quad \text{حيث} \quad 0<y<1$$

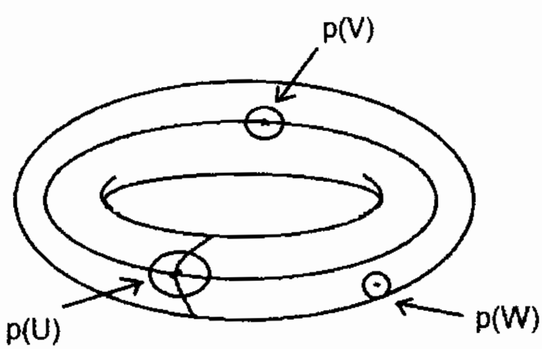
والمجموعة ذات النقاط الأربع

$$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

أنواع المجموعات المفتوحة في X على الصورة $p^{-1}(U)$ هي الموضحة في الرسم التالي بالمناطق المظللة ، كل منها تكون مجموعة مفتوحة في X تساوي اتحاد فصول تكافؤ.



صورة كل من هذه المجموعات تحت تأثير p تكون مجموعة مفتوحة في X، كما هو موضح في الرسم التالي. هذا الوصف لـ X^* هو الطريقة الرياضية للقول بأننا نعبر بالرسم عندما نلصق حروف المستطيل مع بعضها لتكون طوق.



الآن نستكشف العلاقة بين المفهوم الجديد، وهو توبولوجي القسمة، والمفاهيم التي عالجناها سابقا. من المهم ملاحظة أن العديد من هذه المفاهيم لا يسلك الطريق الذي قد نتمناه.

ليس من الصعب ملاحظة أن الفضاءات الجزئية لا تكون كذلك: إذا كان $p : X \to Y$ راسم قسمة و A فضاء جزئي من X فإن الراسم $q : A \to p(A)$ الذي نحصل عليه بتقييد كلا من نطاق ومدى p ليس بالضرورة أن يكون راسم قسمة. ومع ذلك، لدينا النظرية التالية:

نظرية ١٠-١١. نفرض أن $p : X \to Y$ راسم قسمة ونفرض أن A فضاءا جزئيا من X والذي يكون مشبع بالنسبة إلى p ؛ نفرض أن $q : A \to p(A)$ هو الراسم الذي نحصل عليه بتقييد p.

(١) إذا كانت A مجموعة مفتوحة أو مغلقة في X، فإن q يكون راسم قسمة.

(٢)* إذا كان p راسم مفتوح أو راسم مغلق، فإن q يكون راسم قسمة.

البرهان: خطوة١ . نتحقق أولا من المعادلتين:

$$q^{-1}(V) = p^{-1}(V) \qquad \text{إذا كان } V \subset p(A)$$

$$p(U \cap A) = p(U) \cap p(A) \qquad \text{إذا كان } U \subset X.$$

للتحقق من المعادلة الأولى، نلاحظ حيث أن $V \subset p(A)$ و A مشبعة، $p^{-1}(V)$ تكون محتواة في A. من ذلك ينتج أن كلا من $p^{-1}(V)$ و $q^{-1}(V)$ تساوي كل النقاط في A التي ترسم بواسطة p إلى V. للتحقق من المعادلة الثانية، نلاحظ أنه لأي مجموعتين جزئيتين U و A من X، يكون لدينا الاحتواء

$$p(U \cap A) \subset p(U) \cap p(A)$$

لإثبات الاحتواء العكسي، نفرض أن $y = p(u) = p(a)$، لـ $u \in U$ و $a \in A$. حيث أن A مشبعة، A تحتوي المجموعة $p^{-1}(p(a))$، لذلك على وجه الخصوص A تحتوي u. إذن $y = p(u)$، حيث $u \in U \cap A$.

خطوة ٢. الآن نفرض أن A مجموعة مفتوحة أو p راسم مفتوح. نعتبر المجموعة الجزئية V من $p(A)$، نفرض أن $q^{-1}(V)$ مفتوحة في A ونبين أن V تكون مفتوحة في $p(A)$.

نفرض أولا أن A تكون مفتوحة. حيث أن $q^{-1}(V)$ مفتوحة في A و A مفتوحة في X، المجموعة $q^{-1}(V)$ تكون مفتوحة في X. حيث أن $q^{-1}(V)=p^{-1}(V)$ ، $p^{-1}(V)$ تكون مجموعة مفتوحة في X ومن ثم V تكون مفتوحة في Y، لأن p راسم قسمة. على وجه الخصوص V تكون مفتوحة في $p(A)$.

الآن نفرض أن p راسم مفتوح. حيث أن $q^{-1}(V)=p^{-1}(V)$ و $q^{-1}(V)$ مفتوحة في A، فإن $p^{-1}(V)=U\cap A$ لمجموعة ما U مفتوحة في X. الآن $p(p^{-1}(V))=V$ لأن p فوقي؛ لذلك

$$V=p(p^{-1}(V))=p(U\cap A)=p(U)\cap p(A)$$

المجموعة $p(U)$ مفتوحة في Y لأن p راسم مفتوح؛ لذلك V تكون مفتوحة في $p(A)$.

خطوة ٣. البرهان في حالة كون A مجموعة مغلقة أو p راسم مغلق نحصل عليه باستبدال كلمة مفتوح بكلمة مغلق خلال خطوة ٢.

الآن نعتبر المفاهيم الأخرى التي قدمناها سلفا. تحصيل رواسم القسمة يسلك كما نحب. يمكن بسهولة التحقق من أن تحصيل راسمي قسمة يكون راسم قسمة، هذه الحقيقة تنتج من المعادلة

$$p^{-1}(q^{-1}(U))=(q\circ p)^{-1}(U)$$

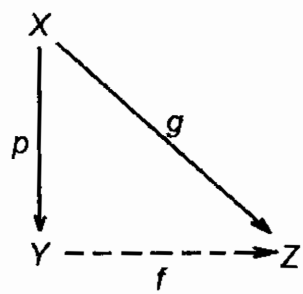
من جهة أخرى ، حاصل ضرب رواسم قسمة ليس بالضروري أن يكون راسم قسمة؛ الضرب الكارتيزي لراسمي قسمة ليس بالضرورة أن يكون راسم قسمة. نحتاج إلى شرط إضافي إما على الرواسم أو الفضاءات لكي تكون العبارة صحيحة. واحد من مثل هذه الشروط على الفضاءات، هو الإحكام الموضعي. شرط آخر على الرواسم هو الشرط أن كلا الراسمين p و q يكون راسم مفتوح. في تلك الحالات يمكن

بسهولة بيان أن $p \times q$ يكون أيضا راسم مفتوح، ومن ثم يكون راسم قسمة.

أخيرا، شرط الهاوسدورف لا يسلك كما نحب؛ حتى وإن كان X فضاء هاوسدورف، لا يوجد سبب يجعل فضاء القسمة X^* بالضرورة هاوسدورف. هناك شرط بسيط على X^*.

ربما تكون النتيجة الأكثر أهمية لدراسة فضاءات القسمة هو مسألة تكوين دوال متصلة على فضاءات القسمة. الآن نعتبر هذه المسألة. عندما تعرضنا بالدراسة لفضاءات حاصل الضرب، كان لدينا معيار لتحديد ما إذا كان الراسم $f : Z \to \prod X_\alpha$ إلى فضاء حاصل ضرب متصل. الجزء العكسي في نظرية فضاءات القسمة يكون معيار تحديد متى يكون الراسم $f : X^* \to Z$ الخارج من فضاء قسمة متصل. لدينا النظرية التالية.

نظرية ١٠-١٢. نفرض أن $p : X \to Y$ راسم قسمة. نفرض Z فضاء توبولوجي و $g : X \to Z$ دالة متصلة بحيث تكون ثابتة على كل مجموعة $p^{-1}(\{y\})$، لكل $y \in Y$. إذن g تنتج دالة متصلة $f : Y \to Z$ بحيث $f \circ p = g$. الدالة الناتجة f تكون متصلة إذا وفقط إذا كانت g متصلة؛ f تكون راسم قسمة إذا وفقط إذا كانت g راسم قسمة.



البرهان: لكل $y \in Y$، المجموعة $g(p^{-1}(\{y\}))$ تكون مجموعة بنقطة واحدة في Z (حيث أن g تكون ثابتة على $p^{-1}(\{y\})$). إذا فرضنا أن $f(y)$ هي هذه النقطة، نكون قد عرفنا الراسم $f : Y \to Z$ بحيث لكل $x \in X$، $f(p(x)) = g(x)$. إذا كانت f متصلة، فإن

$g = f \circ p$ تكون متصلة. وعلى العكس نفرض أن g متصلة. لبيان أن f متصل ، نفرض أن V مجموعة مفتوحة في Z. اتصال g يؤدي إلى

$$g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$$

تكون مفتوحة في X. لأن p يكون راسم قسمة، $f^{-1}(V)$ يجب أن تكون مفتوحة في Y. ومن ثم f تكون متصلة.

إذا كانت f راسم قسمة، فإن g تكون تحصيلي راسم قسمة وبالتالي تكون راسم قسمة. في الاتجاه الآخر، نفرض أن g راسم قسمة. حيث أن g فوقي، كذلك يكون f. نفرض أن V مجموعة جزئية من Z؛ سوف نبين أن V مجموعة مفتوحة في Z إذا كانت $f^{-1}(V)$ مفتوحة في Y. المجموعة $p^{-1}(f^{-1}(V))$ تكون مفتوحة في X لأن p متصلة. حيث أن هذه تساوي $g^{-1}(V)$ ، الأخيرة مفتوحة في X. إذن، لأن g راسم قسمة، V تكون مفتوحة في Z.

نتيجة ١٠-١٣. نفرض أن $g : X \to Z$ راسم فوقي متصل. نفرض X^* هو التجمع التالي من المجموعات الجزئية من X:

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) : z \in Z\}$$

نعرف على X^* توبولوجي القسمة.

(أ) الراسم g يولد راسم تناظر أحادي متصل $f : X^* \to Z$، يكون تشاكل توبولوجي إذا وفقط إذا كان g راسم قسمة.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^* \arrow[r, dashed, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

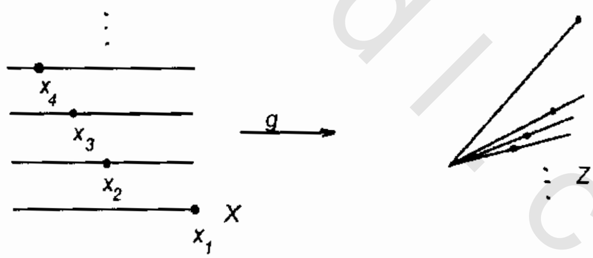
(ب) إذا كان Z هاوسدورف فإن X^* يكون كذلك.

البرهان: من النظرية السابقة، g يولد راسم متصل $f : X^* \to Z$ ، واضح أن f يكون تناظر أحادي. نفرض أن f تشاكل. إذن كلا من f

و راسم القسمة $p: X \to X^*$ تكون رواسم قسمة، وبالتالي تحصيلهما q يكون راسم قسمة. من جهة أخرى نفرض أن g راسم قسمة. من النظرية السابقة ينتج أن f يكون راسم قسمة. لكون f تناظر أحادي، f يكون تشاكل.

نفرض أن Z فضاء هاوسدورف. نعتبر نقطتين مختلفتين في X^*، صورتيهما تحت تأثير f تكونا مختلفتين ومن ثم يكون لهما جواران غير متقاطعان U و V. إذن $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ يكونا جواران غير متقاطعان للنقطتين في X^*.

مثال ١٠-١٤. نفرض أن X هو الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^2$ الذي يكون اتحاد القطع المستقيمة $[0,1]\times\{n\}$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$ و نفرض أن Z هو الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المكون من كل النقاط على الصورة $(x,x/n)$ حيث $x\in[0,1]$ و $n\in\mathbb{Z}^+$. إذن X يكون اتحاد عدد قابل للعد من القطع المستقيمة غير المتقاطعة، و Z تكون اتحاد عدد قابل للعد من القطع المستقيمة التي لها نقطة بداية مشتركة. أنظر الشكل التالي.



نعرف الراسم $g: X \to Z$ بالمعادلة $g((x,n)) = (x,x/n)$ ؛ إذن g يكون راسم فوقي متصل. فضاء القسمة X^* الذي عناصره هي المجموعات $g^{-1}(\{z\})$ هو ببساطة الفضاء الذي نحصل عليه من X بمطابقة المجموعة الجزئية $\{0\}\times\mathbb{Z}^+$ إلى نقطة. الراسم g يولد راسم تناظر أحادي متصل $f: X^* \to Z$. ولكن f ليس تشاكل.

للتأكد من ذلك، يكفي بيان أن g ليس راسم قسمة. نعتبر المتتابعة $x_n = (1/n, n)$ في X. المجموعة $A=\{x_n\}$ تكون مغلقة في لأن ليس لها نقطة نهاية. أيضا، هي مشبعة بالنسبة إلى g. من جهة أخرى،

المجموعة $g(A)$ ليست مغلقة في Z، حيث أنها تتكون من النقاط $z_n = (1/n, 1/n^2)$ ؛ هذه المجموعة لها نقطة الأصل نقطة نهاية.

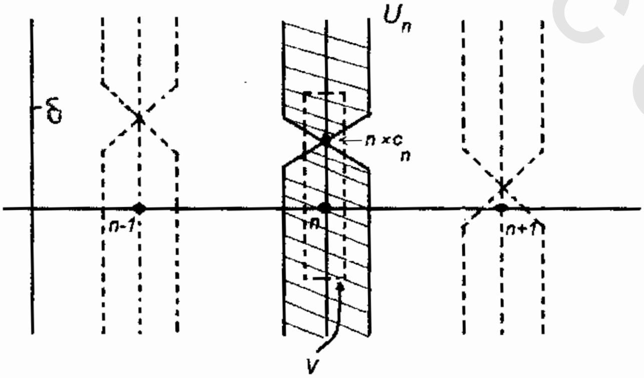
مثال ١٠-١٥. حاصل ضرب راسمي قسمة ليس بالضرورة يكون راسم قسمة.

نفرض $X = \mathbb{R}$ ونفرض أن X^* هو فضاء القسمة الذي نحصل عليه من X بمطابقة المجموعة $\mathbb{Z}^+$ للنقطة b؛ نفرض $p : X \to X^*$ راسم القسمة. نفرض أن $\mathbb{Q}$ الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}$ المكون من الأعداد الكسرية ونفرض أن $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ هو راسم الوحدة. سوف نبين أن

$$(p,i) : X \times \mathbb{Q} \to X^* \times \mathbb{Q}$$

لا يكون راسم قسمة.

لكل n، نفرض أن $c_n = \sqrt{2}/n$، ونعتبر الخطوط المستقيمة في $\mathbb{R}^2$ التي ميلها 1 و 1- على الترتيب، التي تمر بالنقطة (n, c_n). نفرض أن U_n تتكون من كل النقاط في $X \times \mathbb{Q}$ التي تقع أعلى كلا من الخطين أو تحت كلاهما، وأيضا بين الخطين الرأسيين $x = n - 1/4$ و $x = n + 1/4$. إذن U_n تكون مفتوحة في $X \times \mathbb{Q}$، هي تحتوي المجموعة $\{n\} \times \mathbb{Q}$ لأن c_n ليس قياسي. أنظر الشكل.



نفرض أن U هي اتحاد المجموعات U_n، إذن U تكون مفتوحة في $X \times \mathbb{Q}$. هي مشبعة بالنسبة إلى (p,i) لأنها تحتوي كل المجموعة

$\mathbb{Z}^+ \times \{q\}$ لكل $q \in \mathbb{Q}$. سوف نفترض أن $U' = (p,i)(U)$ تكون مفتوحة في $X^* \times \mathbb{Q}$ ونصل إلى تناقض.

لأن U تحتوي، على وجه الخصوص، المجموعة $\mathbb{Z}^+ \times \{0\}$، المجموعة U' تحتوي النقطة $(b,0)$. لذلك U' تحتوي مجموعة مفتوحة على الصورة $W \times I_\delta$، حيث W جوار لـ b في X^* و I_δ تحتوي كل الأعداد الكسرية y حيث $|y| < \delta$. إذن

$$p^{-1}(W) \times I_\delta \subset U$$

نختار n كبيرة بصورة بحيث $c_n < \delta$. إذن، حيث أن $p^{-1}(W)$ مفتوحة في X وتحتوي $\mathbb{Z}^+$، يمكننا اختيار $\varepsilon < 1/4$ بحيث أن الفترة $(n-\varepsilon, n+\varepsilon)$ تكون محتواة في $p^{-1}(W)$. إذن U تحتوي المجموعة الجزئية $V = (n-\varepsilon, n+\varepsilon) \times I_\delta$ من $X \times \mathbb{Q}$. ولكن الشكل يوضح أنه يوجد عدة نقاط (x, y) من V لا تقع في U! (واحدة من هذه النقاط (y, y)، حيث $x = n + \frac{1}{2}\varepsilon$ و y كسري بحيث $|y - c_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$).

تعريف ١٠-١٦. علاقة التكافؤ $\sim$ على الفضاء التوبولوجي X تسمى **مفتوحة** open إذا كان كلما كانت A مجموعة مفتوحة في X فإن المجموعة $[A] = \bigcup_{a \in A} [a]$ تكون مفتوحة في الفضاء التوبولوجي X.

بالمثل يمكن تعريف العلاقة المغلقة.

تمهيدية ١٠-١٧. علاقة التكافؤ $\sim$ على الفضاء التوبولوجي X تكون مفتوحة (مغلقة) إذا وفقط إذا كان $p : X \to X^*$ راسم مفتوح (مغلق).

البرهان: نفرض أن p راسم مفتوح وأن A مجموعة جزئية مفتوحة في X. إذا لكون $[A] = p^{-1}(p(A))$ ولكون $p(A)$ مجموعة جزئية مفتوحة في X^*، نجد أن $[A]$ تكون مجموعة جزئية مفتوحة في X. لذلك $\sim$ تكون علاقة مفتوحة على X. في الاتجاه الآخر

نفرض أن $\sim$ علاقة مفتوحة على X وأن A مجموعة جزئية مفتوحة في X. إذن لكون $[A]$ مفتوحة و $[A]=p^{-1}(p(A))$ و p راسم قسمة، فإن $p(A)$ تكون مفتوحة وهذا يبرهن أن p راسم مفتوح. بالمثل يمكن إثبات الحالة مغلقة.

نظرية ١٠-١٨. نفرض أن $\sim$ علاقة تكافؤ على الفضاء التوبولوجي X. إذن $R=\{(x,y):x\sim y\}$ تكون فضاء جزئي مغلق من $X\times X$ إذا وفقط إذا كان فضاء القسمة X^* فضاء هاوسدورف.

البرهان: نفرض أن فضاء القسمة X^* فضاء هاوسدورف وأن $x,y\in X$ بحيث أن $(x,y)\notin R$. إذن لكون $p(x)\neq p(y)$، حيث $p:X\to X^*$ هو المسقط، توجد مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان $U,V\in X^*$ بحيث $p(x)\in U$ و $p(y)\in V$. نضع $U^*=p^{-1}(U)$ و $V^*=p^{-1}(V)$. واضح أن $x\in U^*$ و $y\in V^*$. إذا كانت المجموعة المفتوحة $U^*\times V^*$ التي تحتوي النقطة (x,y) تقطع R فإنها سوف تحتوي نقطة (a,b) من R والتي تحقق أن $a\sim b \Leftarrow p(a)=p(b)$، وهذا يؤدي إلى $p(a)=p(b)\in U\cap V$ وهو ما يناقض الفرض بأن U و V غير متقاطعتان. لذلك $U^*\times V^*$ لا تقطع R ومن ثم $X\times X\setminus R$ تكون مفتوحة وبالتالي R تكون مغلقة.

في الاتجاه العكسي نفرض أن R مغلقة في $X\times X$. إذن لأي نقطتين مختلفتين $p(x),p(y)\in X^*$ توجد مجموعة مفتوحة على الصورة $U^*\times V^*$ تحتوي النقطة (x,y) ولا تحتوي أي نقاط من R (حيث أن $p(x)\neq p(y)$، أي أن $(x,y)\notin R$ و $X\times X\setminus R$ تكون مفتوحة). نضع $U=p(U^*)$ و $V=p(V^*)$ والذي يؤدي من الفرض والتمهيدية السابقة إلى أنهما مجموعتان مفتوحتان في X^* تحتويان $p(x)$ و $p(y)$ على الترتيب. نفرض أن $[a]\in U\cap V$

والـــذي يــؤدي إلـــى وجـــود $b \in U^*$ و $c \in V^*$ بحيـــث أن $p(b) = p(c) = [a]$ وهـذا يـؤدي إلـى $(b,c) \in R$ وهـذا ينـاقض اختيـار $U^* \times V^*$. لـذلك $U \cap V = \phi$ وهـذا يبـرهن أن X^* يكـون فضاء هاوسدورف.

ملاحظة ١٠-١٩. لاحظ أن فضاء القسمة X^* يمكن أن يكون فضاء هاوسدورف بدون أن يكون X فضاء هاوسدورف. علـى سبيل المثـال، $X = (\mathbb{R}^2, \tau)$ فـي تمـرين٨ فـي مجموعـة تمـارين١، لـيس فـضاء هاوســدورف مــع أن فـضاء القــسمة X^* المعطـى براســم القــسمة $\pi_1 : X \to \mathbb{R}$ يكون متشاكل مع $\mathbb{R}$ ومن ثم يكون هاوسدورف. في النظرية السابقة لم نتطلب أن يكون X هاوسدورف. الشرط على العلاقة في النظرية السابقة لا يمكن استبداله بعلاقة مغلقة، كما في التمارين.

تمارين محلولة

تمــرين ١. نفـرض أن $f : X \to Y$ راســم فــوقي بــين فــضاءين توبولوجيين. بين أنه إذا كان f راسم مفتوح أو راسم مغلق فإنـه يكـون راسم قسمة.

الحل: أولا نفرض أن f راسم مفتوح. نفرض O مجموعة جزئية من Y بحيـث أن $f^{-1}(O)$ تكـون مفتوحـة. حيـث أن f فـوقي، يكـون $f(f^{-1}(O)) = O$. لـذلك O تكــون مفتوحــة إذا وفقــط إذا كــان $f^{-1}(O)$ مفتوحة وهو ما يبين أن f يكون راسم قسمة.

الآن نفرض أن f راسم مغلق. نفرض O مجموعة جزئية من Y بحيــــث أن $f^{-1}(O)$ تكـــــون مفتوحـــــة. حيـــــث أن $f^{-1}(X \setminus O) = X \setminus f^{-1}(O)$، $f^{-1}(X \setminus O)$ تكـون مغلقـة. ولكـن، حيث أن f فوقي، يكون $f(f^{-1}(X \setminus O)) = X \setminus O$. لذلك $X \setminus O$ تكون مغلقة ومن ثم O تكون مفتوحة. أيضا هذا يبين أن f يكـون راسم قسمة.

المثالين التاليين يوضحان أن راسم القسمة ليس بالضروري أن يكون مفتوح أو مغلق.

مثال ١٠-٢٠. نعتبر التجزيء لـ $\mathbb{R}$ المعطى كما يلي

$$\mathscr{P}=\{(0,1)\}\cup\{\{x\}: x\le 0 \text{ or } x\ge 1\}$$

ونعرف على $\mathscr{P}$ توبولوجي القسمة. المجموعة $(0,1)$ في $\mathbb{R}$ تصبح نقطة في $\mathscr{P}$ وفي توبولوجي القسمة، المجموعة ذات النقطة الواحدة $\{(0,1)\}$ تكون مفتوحة. النقطة $\{0\}\in\mathscr{P}$ يكون لها الخاصية أن كل جوار لها يحتوي النقطة $(0,1)$ من $\mathscr{P}$. على وجه الخصوص هذا يبين أن المجموعة ذات النقطة الواحدة $\{(0,1)\}$ ليست مغلقة ولكن راسم القسمة $q:\mathbb{R}\to\mathscr{P}$ يرسل المجموعة المغلقة $\{\frac{1}{2}\}$ إلى المجموعة $\{(0,1)\}$، التي ليست مغلقة. لذلك q لا يكون مغلق.

مثال ١٠-٢١. نعتبر التجزيء لـ $\mathbb{R}$ المعطى كما يلي

$$\mathscr{P}=\{[0,1]\}\cup\{\{x\}: x< 0 \text{ or } x> 1\}$$

ونعرف على $\mathscr{P}$ توبولوجي القسمة. المجموعة $[0,1]$ في $\mathbb{R}$ تصبح نقطة في $\mathscr{P}$ وفي توبولوجي القسمة، المجموعة ذات النقطة الواحدة $\{[0,1]\}$ تكون مفتوحة. النقطة $\{0\}\in\mathscr{P}$ يكون لها الخاصية أن كل جوار لها يحتوي النقطة $[0,1]$ من $\mathscr{P}$. على وجه الخصوص هذا يبين أن المجموعة ذات النقطة الواحدة $\{[0,1]\}$ ليست مفتوحة ولكن راسم القسمة $q:\mathbb{R}\to\mathscr{P}$ يرسل المجموعة المفتوحة $[0,1]$ إلى المجموعة $\{(0,1)\}$، التي ليست مفتوحة. لذلك q لا يكون مفتوح.

تمرين ٢. نفرض أن X فضاء توبولوجي، Y مجموعة، $f:X\to Y$ راسم فوقي ونفرض أن Y أعطيت توبولوجي القسمة المولد بـ f. بين أنه لأي فضاء توبولوجي Z وراسم $g:Y\to Z$ ، g يكون متصل إذا وفقط إذا كان $g\circ f:X\to Z$ متصل.

الحل: إذا كان g راسم متصل، فإنه من البديهي أن يكون $g\circ f$ متصل. في الاتجاه العكسي، نفرض أن $g\circ f$ راسم متصل. نفرض أن A أي مجموعة مفتوحة في Z ، لذلك $(g\circ f)^{-1}(A)$ تكون مجموعة

مفتوحة في X. إذن $f^{-1}(g^{-1}(A))$ تكون مجموعة مفتوحة في X. باستدعاء تعريف توبولوجي القسمة نجد أن $g^{-1}(A)$ يجب أن تكون مفتوحة في Y وهو ما يعني أن g يكون متصل.

تمرين ٣. برهن أن توبولوجي القسمة على Y بالنسبة للراسم $f : X \to Y$ يكون أقوى (أدق) توبولوجي على Y بحيث يكون $f : X \to Y$ متصل.

الحل: من التعريف ينتج أن f يكون متصل بالنسبة لتوبولوجي القسمة. الآن نفرض أن τ توبولوجي آخر على Y بحيث يجعل f متصل. نفرض أن $U \in \tau$. إذن $f^{-1}(U)$ تكون مفتوحة في X، ومن التعريف U أيضا تكون مفتوحة في توبولوجي القسمة. لذلك τ يكون أصغر (أخشن) من توبولوجي القسمة.

تمرين ٤. نفرض أن X و Y فضاءان توبولوجيان و $f : X \to Y$ راسم فوقي متصل (مفتوح أو مغلق). بين أن توبولوجي القسمة على Y المولد بـ f يكون منطبق مع التوبولوجي المعرف على Y.

الحل: توبولوجي القسمة على Y يكون أقوى (أدق) من التوبولوجي المعطى. للحصول على الاحتواء العكسي، نفرض أن f راسم متصل مفتوح و $A \subset Y$ مجموعة مفتوحة في Y بالنسبة إلى توبولوجي القسمة المولد بـ f والذي يعني أن $f^{-1}(A)$ تكون مفتوحة في X والذي بواسطته $f(f^{-1}(A))$ تكون مفتوحة في Y في التوبولوجي المعطى حيث أن f مفتوح. ولكن حيث أن f فوقي، $f(f^{-1}(A)) = A$ ومن ثم نستنتج أن A تكون مفتوحة في التوبولوجي المعطى كذلك.

الآن نعتبر الراسم الفوقي المتصل المغلق $f : X \to Y$. مرة أخرى نوضح فقط أن التوبولوجي المعطى على Y يكون أقوى من توبولوجي القسمة على Y، حيث أن الاحتواء العكسي بديهي. من أجل ذلك نفرض أن A مجموعة مفتوحة في Y بالنسبة لتوبولوجي القسمة المولد بواسطة f. من التعريف $f^{-1}(A)$ تكون مفتوحة في X، أو بتعبير آخر $X \setminus f^{-1}(A)$ تكون مغلقة في X. حيث أن f مغلق

$f(X \setminus f^{-1}(A)) = Y \setminus A$ تكون مغلقة في Y بالنسبة للتوبولوجي المعطى على Y، وهذا يعني أن A تكون مفتوحة Y بالنسبة التوبولوجي المعطى كذلك.

تمارين ١٠-١

١- إذا كان τ أي توبولوجي على Y بحيث أن $p : X \to Y$ يكون راسم متصل بالنسبة إلى τ، فإن $\tau \subset \tau_Y$.

٢- برهن أن التوبولوجي τ_Y يكون وحيد، بمعنى أنه إذا كان τ توبولوجي على Y بحيث أن $p : X \to Y$ يكون راسم قسمة بالنسبة إلى τ ، فإن $\tau = \tau_Y$.

٣- إذا كان $f : X \to Y$ راسم مفتوح(أو مغلق) فوقي متصل، فإن f يكون راسم قسمة. ومع ذلك العكس ليس صحيحا.

٤- نفرض أن $f : X \to Y$ راسم متصل. إذا كانت توجد دالة متصلة $g : Y \to X$ بحيث أن $f \circ g = i_Y$ راسم الوحدة على Y، فبرهن أن f يكون راسم قسمة.

٥- برهن أن تحصيل راسمي قسمة يكون أيضا راسم قسمة.

٦- نفرض أن $p : X \to Y$ راسم قسمة. برهن أن p يكون مفتوح (أو مغلق) إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مفتوحة (أو مغلقة) U في X ، المجموعة $p^{-1}(p(U))$ تكون مفتوحة (أو مغلقة) في X.

٧- نفرض أن $p : X \to Y$ راسم قسمة و $f : Y \to Z$ أي دالة. برهن أن الدالة f تكون متصلة إذا وفقط إذا كان $f \circ p$ متصلة.

٨- أعط مثال لكل مما يلي:

(أ) راسم متصل ولكنه ليس راسم قسمة.

(ب) راسم قسمة ليس مفتوح.

(ج) راسم قسمة ليس مغلق.

(د) راسم قسمة ليس مفتوح وليس مغلق.

(هـ) راسم مفتوح وليس تشاكل.
(و) راسم مغلق ليس تشاكل.

٩- بين أن الراسم المتصل من فضاء محكم فوق فضاء هاوسدورف يكون راسم قسمة. بين أن الشرط هاوسدورف لا يمكن حذفه.

١٠- نفرض أن $X=[0,1]$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}$ و $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ هي دائرة الوحدة كفضاء جزئي من $\mathbb{R}$. نعرف $f:[0,1]\to S^1$ بالصورة $f(t)=e^{2\pi ti}$. بين أن f يكون راسم قسمة.

١١- نفرض أن (X,d) و (Y,d') فضاءي قياس و $f:X\to Y$ دالة تحفظ المسافة، أي أن $d'(f(x),f(y))=d(x,y)$ تكون محققة. بين أن f يكون راسم قسمة.

١٢- هل راسم القسمة الأحادي يكون تشاكل.

١٣- بين أن تقييد راسم القسمة على مجموعة مفتوحة ليس بالضرورة أن يكون راسم قسمة.

١٤- نفرض أن $\pi_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ هو راسم الإسقاط على الاحداثي الأول وأن Y هو الفضاء الجزئي $(\{0\}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\{0\})$ من $\mathbb{R}^2$. نفرض أن p هو تقييد π_1 على Y. بين أن p يكون راسم قسمة. هل p راسم مفتوح؟ هل p راسم مغلق؟

١٥- نفرض أن $\pi_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ هو راسم الإسقاط على الاحداثي الأول و $\beta=\{\pi_1^{-1}\{(a,b)\}: a,b\in\mathbb{R}\}$ تجمع من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}^2$. بين أن β يكون أساس لتوبولوجي τ على $\mathbb{R}^2$. قارن τ مع التوبولوجي القياسي على $\mathbb{R}^2$ وضع $X=(\mathbb{R}^2,\tau)$. هل $\pi_1:X\to\mathbb{R}$ يكون راسم قسمة؟ هل X يكون هاوسدورف؟

١٦- بين أن الراسم $p:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرف بالصورة $p(x,y)=x^2+y^2$ يكون راسم قسمة.

١٧- نعرف علاقة $\sim$ على $\mathbb{R}^2$ تتطلب أن أي نقطتين في $\mathbb{R}^2$ ترتبطان بالعلاقة $\sim$ إذا كان لهما نفس الإحداثي الأول. بين أن $\sim$ تكون علاقة تكافؤ وأن فضاء القسمة الناتج يكون متشاكل مع $\mathbb{R}$.

١٨- نعرف علاقة $\sim$ على $X=\mathbb{R}$ حيث $x \sim y$ إذا وفقط إذا كان $x-y$ عدد صحيح. بين أن فضاء القسمة X^* يكون متشاكل مع S^1.

١٩- نعرف علاقة $\sim$ على $X=\mathbb{R}^2$ حيث $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ إذا وفقط إذا كان $x_1+y_1^2=x_2+y_2^2$. بين أن $\sim$ تكون علاقة تكافؤ وصف فضاء القسمة X^* ببيان أنه متشاكل مع فضاء معروف. ما هو هذا الفضاء.

٢٠- نفرض أن $A=(0,1)$ هي الفترة المفتوحة في $X=\mathbb{R}$ وأن X^* هو تجزيء X الذي يتكون من كل مجموعات النقطة الواحدة $\{x\}$ حيث $x \in \mathbb{R}\setminus(0,1)$ والمجموعة A. صف توبولوجي القسمة على X^*. بين أن أي مجموعة مفتوحة في X^* تحتوي إما 0 أو 1 يجب أن تحتوي المجموعة A. هل المجموعة $\{A\}$ تكون مفتوحة في X^*؟ هل X^* يكون هاوسدورف؟

٢١- نفرض أن $X=[0,1]$ الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}$ ونعرف $\sim$ على X بالصورة $x \sim y$ إذا وفقط إذا كان $x-y$ عدد كسري. بين أن فضاء القسمة X^* ليس هاوسدورف.

٢٢- نعتبر راسم الإسقاط $\pi_1:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ على الاحداثي الأول والمجموعة المغلقة $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=1\}$ في $\mathbb{R}^2$. بين أن الاتحاد $\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \pi_1^{-1}(x)$ ، بحيث أن $\pi_1^{-1}(x)\cap F \neq \phi$

ليست مغلقة في $\mathbb{R}^2$.(لاحظ أن $\pi_1^{-1}(x)$ تكون فصول تكافؤ) هذا يبين أن العلاقة المولدة على $\mathbb{R}^2$ بواسطة π_1 ليست مغلقة.