الباب التاسع
مسلمات قابلية العد ومسلمات التباعد
Countability and Separatiuon Axioms

المفاهيم التي نحن بصدد دراستها الآن، على خلاف الترابط والإحكام، لا تظهر بصورة طبيعية من دراسة التحليل وحساب التفاضل. ولكن تظهر عند التعمق في دراسة التوبولوجي نفسه. مسائل مثل غمر فضاء معطى في فضاء قياس أو في فضاء هاوسدورف محكم هي أساسا مسائل في التوبولوجي وليست في التحليل. هذه المسائل الخاصة لها حلول تشتمل على مسلمات قابلية العد والتباعد. في هذا الباب سوف نقدم المسلمة الأولى والمسلمة الثانية لقابلية العد ومسلمة قابلية الفصل. أيضا نقدم مسلمات التباعد T_0 ، T_1 ، T_2 ، الفضاء المنتظم ، الفضاء العادي، فضاء T_3 ، فضاء T_4 والفضاء تام الانتظام.

٩-١ مسلمات قابلية العد Countability axioms

في الباب الأول ورد تعريف مسلمتي العد الأولى والثانية وفي الباب الثالث ورد تعريف قابلية الفصل. الآن نتعرض لهذه المفاهيم بصورة أوسع.

تعريف ٩-١. الفضاء التوبولوجي X يسمى **قابل للفصل** separable إذا كان يحتوي مجموعة جزئية قابلة للعد كثيفة في X. أي إذا وجدت مجموعة جزئية قابلة للعد A بحيث $\overline{A}=X$.

واضح أنه إذا كان $d(X)\le\aleph_0$ فإن الفضاء التوبولوجي X يكون قابل للفصل. الفضاء المتقطع X يكون قابل للفصل إذا وفقط إذا كان $|X|\le\aleph_0$.

مثال ٩-٢. $\mathbb{R}$ فضاء قابل للفصل، حيث أن $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد و $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

تعريف ٩-٣. الفضاء التوبولوجي الذي له أساس موضعي قابل للعد عند كل نقطة في الفضاء يسمى **فضاء عد من النوع الأول** first

أو يحقق **مسلمة العد الأولى** first axiom of countable space countability.

ملاحظة ٩-٤. نفرض أن $\mathscr{B}_p$ أساس موضعي قابل للعد عند النقطة $p \in X$. إذن يمكننا ترقيم عناصر $\mathscr{B}_p$ بالصورة $B_1, B_2, B_3, \ldots$. علاوة على ذلك إذا كان $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ فإن $\mathscr{B}_p$ يسمى **أساس موضعي متداخل** nested local base عند p.

مثال ٩-٥. كل فضاء قابل للقياس يكون فضاء عد من النوع الأول، حيث أن $\{B(x,1/n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ يكون أساس موضعي قابل للعد عند x.

أكبر حقيقة مفيدة بخصوص الفضاءات التي تحقق مسلمة العد الأولى هي حقيقة أنه في هذه الفضاءات، المتتابعات التقاربية كافية للكشف عن نقاط النهاية لمجموعة واختبار اتصال دالة. لاحظنا ذلك سابقا، الآن نصوغ ذلك بصورة رسمية في النظرية التالية.

نظرية ٩-٦. نفرض أن X فضاءا توبولوجيا يحقق مسلمة العد الأولى. إذن

(١) النقطة x تنتمي إلى $\overline{A}$ إغلاق المجموعة الجزئية A من X إذا وفقط إذا كان توجد متتابعة من نقاط A تتقارب إلى x.

(٢) الدالة $f : X \to Y$ تكون متصلة إذا وفقط إذا كان لكل متتابعة (x_n) في X تتقارب إلى x فإن $(f(x_n))$ تتقارب إلى $f(x)$.

البرهان هو تعميم مباشر للبرهان المعطي في الباب السادس تحت شرط قابلية القياس، لذلك لن نعيده هنا.

تعريف ٩-٧. الفضاء التوبولوجي X يسمى **فضاء عد من النوع الثاني** second countable space أو **يحقق مسلمة العد الثانية** satisfy the second axiom of countability إذا كان له أساس قابل للعد.

مثال ٩-٨. الفضاء التوبولوجي $\mathbb{R}$ له أساس قابل للعد ، تجمع كل الفترات المفتوحة (a,b) حيث a و b أعداد كسرية. لذلك $\mathbb{R}$ يكون فراغ عد من النوع الثاني. بالمثل $\mathbb{R}^n$ ، له أساس قابل للعد، تجمع كل حواصل ضرب الفترات المفتوحة التي نهاياتها أعداد كسرية.

واضح من التعريف أن كل فضاء عد من النوع الثاني يكون فضاء عد من النوع الأول. إذا كان $\mathscr{B}$ أساس قابل للعد للتوبولوجي على X، فإن المجموعة الجزئية من $\mathscr{B}$ التي تحتوي عناصر الأساس التي تحتوي نقطة x تكون أساس موضعي قابل للعد عند x.

ليس كل فضاء عد من الأول يكون فضاء عد من النوع الثاني كما يتضح من المثال التالي.

مثال ٩-٩. الفضاء التوبولوجي $\mathbb{R}_l$ يحقق المسلمة الأولى للعد ولكنه لا يحقق المسلمة الثانية للعد. نفرض $x \in \mathbb{R}_l$، مجموعة كل الفترات على الصورة $[x, x+1/n)$ تكون أساس موضعي قابل للعد عند x. لبيان أن $\mathbb{R}_l$ ليس له أساس قابل للعد، نفرض أن $\mathscr{B}$ أساس لـ $\mathbb{R}_l$. لكل x نختار B_x من $\mathscr{B}$ بحيث $x \in B_x \subset [x, x+1)$. إذا كان $x \neq y$، فإن $B_x \neq B_y$، حيث أن $x = \operatorname{glb} B_x$ و $y = \operatorname{glb} B_y$. لذلك، $\mathscr{B}$ يجب أن تكون غير قابلة للعد. أيضا $\mathbb{R}_l$ يكون قابل للفصل، حيث أن $\mathbb{Q}$ تكون كثيفة في $\mathbb{R}_l$.

كلا مسلمتي العد الأولى والثانية تسلكان بصورة جيدة بالنسبة لعمليات أخذ الفضاءات الجزئية وحاصل ضرب عدد قابل للعد من الفضاءات.

نظرية ٩-١٠. الفضاء الجزئي من فضاء عد من النوع الأول (الثاني) يكون فضاء عد من النوع الأول (الثاني). حاصل ضرب عدد قابل للعد من فضاءات عد من النوع الأول (الثاني) يكون فضاء عد من النوع الأول (الثاني).

البرهان: نعتبر حالة فضاء العد من النوع الثاني. إذا كان $\mathscr{B}$ أساس قابل للعد للفضاء X، فإن $\{B \cap A : B \in \mathscr{B}\}$ يكون أساس قابل للعد للفضاء الجزئي A من X. إذا كان $\mathscr{B}_i$ أساس قابل للعد للفضاء X_i، فإن تجمع كل حواصل الضرب $\prod_i U_i$، حيث $U_i \in \mathscr{B}_i$، لعدد منتهي من قيم i و $U_i = X_i$ لبقية قيم i الأخرى، يكون أساس قابل للعد لـ $\prod X_i$.

برهان حالة فضاء العد من النوع الأول يكون بالمثل.

نتيجتان لمسلمة العد الثانية سوف يكونا مفيدتان بعد ذلك، نوردهما في النظرية التالية.

نظرية ٩-١١. نفرض أن X فضاء عد من النوع الثاني. إذن

(١) كل غطاء مفتوح لـ X يحتوي تجمع جزئي قابل للعد يغطي X.

(٢) X يكون فضاء قابل للفصل.

البرهان: نفرض أن $\{B_n\}$ أساس قابل للعد للفضاء X.

(١) نفرض أن $\mathcal{A}$ غطاء مفتوح لـ X. لكل عدد صحيح ممكن n نختار عنصر A_n من $\mathcal{A}$ يحتوي عنصر أساس B_n. التجمع $\mathcal{C}$ المكون من المجموعات A_n يكون قابل للعد، حيث أنه مرقم بمجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة الموجبة. علاوة على ذلك يغطي X. لكل $x \in X$ يمكن اختيار عنصر A من $\mathcal{A}$ يحتوي x. حيث أن A مفتوحة، يوجد عنصر أساس B_n بحيث $x \in B_n \subset A$. حيث أن B_n تقع في عنصر من $\mathcal{A}$، المجموعة A_n تكون معرفة للدليل n، حيث أن A_n تحتوي B_n فإنها تحتوي x. لذلك $\mathcal{C}$ يكون تجمع جزئي قابل للعد من $\mathcal{A}$ يغطي X.

(٢) من كل عنصر أساس غير خالي B_n، نختار نقطة x_n. المجموعة $D = \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ تكون كثيفة في X، لكل $x \in X$، كل عنصر أساس يحتوي x يقطع المجموعة D.

الفضاء التوبولوجي X الذي له الخاصية أن كل غطاء مفتوح للفضاء يكون له تجمع جزئي قابل للعد يغطي X يسمى **فضاء ليندلوف** Lindelof space.

من ذلك يمكن صياغة العبارة (٢) من نظرية ٩-١١ كما يلي: كل فضاء عد من النوع الثاني يكون فضاء ليندلوف.

إذا كان X فضاء قابل للقياس فإن الخواص الثلاث الواردة في نظرية ٩-١١ تكون متكافئة.

تمهيدية ٩-١٢. كل فضاء قابل للقياس وقابل للفصل يكون فضاء عد من النوع الثاني.

البرهان: نفرض أن X فضاء قابل للقياس ويحتوي مجموعة قابلة للعد كثيفة $A \subset X$. التجمع $\{B(a,r): a \in A, r \in \mathbb{Q}^+\}$ من الكرات المفتوحة التي مراكزها نقاط A وأنصاف أقطارها أعداد كسرية موجبة تكون أساس قابل للعد للتوبولوجي على X. يكفي بيان أنه لأي كرة مفتوحة $B(x,\varepsilon)$ في X وأي $y \in B(x,\varepsilon)$، يوجد $a \in A$ و $r \in \mathbb{Q}^+$ بحيث يكون $y \in B(a,r) \subset B(x,\varepsilon)$.

نفرض أن r عدد كسري موجب بحيث $2r + d(x,y) < \varepsilon$ ونفرض أن $a \in A \cap B(y,r)$. إذن $y \in B(a,r)$، بالطبع، و $B(a,r) \subset B(x,\varepsilon)$، حيث إذا كان $d(a,z) < r$ فإن

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \le d(x,y) + d(y,a) + d(a,z)$$
$$< d(x,y) + 2r < \varepsilon$$

تمهيدية ٩-١٣. كل فضاء ليندلوف قابل للقياس يكون فضاء عد من النوع الثاني.

البرهان: نفرض أن X فضاء ليندلوف قابل للقياس. لكل عدد كسري موجب r نفرض أن A_r مجموعة جزئية من X قابلة للعد بحيث يكون $X = \bigcup_{a \in A_r} B(a,r)$. إذن $A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+} A_r$ تكون مجموعة جزئية كثيفة قابلة للعد. لأي كرة مفتوحة $B(x,\varepsilon)$ ولأي عدد كسري موجب $r < \varepsilon$ يوجد $a \in A_r$ بحيث $x \in B(a,r)$. لذلك $x \in B(x,r) \subset B(x,\varepsilon)$.

خصيصة النقطة character of the point x في الفضاء التوبولوجي (X,τ) تعرف بأنها أصغر عدد كاردينالي على الصورة $|\mathcal{B}_x|$ حيث $\mathcal{B}_x$ هو أساس موضعي لـ(X,τ) عند النقطة x، هذا العدد الكاردينالي يرمز له بالرمز $\chi(x,(X,\tau))$ أو اختصارا $\chi(x,X)$. **خصيصة الفضاء التوبولوجي** (X,τ) character of the space تعرف على أنها أصغر حد علوي supremum لكل الأعداد $\chi(x,(X,\tau))$ لكل $x \in X$؛ هذا العدد الكاردينالي يرمز له بالرمز $\chi((X,\tau))$ واختصارا بالرمز $\chi(X)$.

نظرية ٩-١٤. لأي فضاء توبولوجي X يكون $d(X) \leq w(X)$.

البرهان: نفرض أن $\mathcal{B}=\{B_s\}_{s\in S}$ أساس للفضاء التوبولوجي X يتكون مجموعات غير خالية بحيث أن $|S|=m=w(X)$. لكل $s\in S$ نختار نقطة $a_s \in B_s$. واضح أن المجموعة $A=\{a_s : s\in S\}$ تكون كثيفة في X. حيث أن $|A|\leq|S|=m$، فإن $d(X)\leq w(X)$.

إذا كان $\chi((X,\tau))\leq \aleph_0$، فإن الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاء عد من النوع الأول.

إذا كان $w((X,\tau))\leq \aleph_0$، فإن الفضاء التوبولوجي (X,τ) يكون فضاء عد من النوع الثاني.

تمارين ٩-١

١- بين أنه إذا كان X له أساس قابل للعد $\{B_n\}$، فإن كل أساس $\mathcal{C}$ لـ X يحتوي أساس قابل للعد لـ X. (إرشاد: لكل زوج من الأدلة n و m ممكن، نختار $C_{n,m}\in\mathcal{C}$ بحيث $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$.)

٢- نفرض أن X له أساس قابل للعد؛ نفرض A مجموعة جزئية من X غير قابلة للعد. بين أن عدد غير قابل للعد من عناصر A تكون نقاط نهاية لـ A.

٣- بين أن كل فضاء محكم قابل للقياس X يكون له أساس قابل للعد. (إرشاد: نفرض A غطاء منتهي لـ X بواسطة كرات-$\frac{1}{n}$.)

٤- (أ) بين أن كل فضاء قابل للقياس والذي يحتوي مجموعة قابلة للعد كثيفة، يكون له أساس قابل للعد.

(ب) بين أن كل فضاء ليندلوف قابل للقياس يكون له أساس قابل للعد.

٥- نفرض أن $f: X\to Y$ متصلة. بين أنه إذا كان X فضاء ليندلوف أو إذا كان X يحتوي مجموعة جزئية قابلة للعد كثيفة، فإن $f(X)$ يحقق نفس الشرط.

٦- نفرض أن $f: X \to Y$ متصلة مفتوحة. بين أنه إذا كان X يحقق مسلمة العد الأولى أو مسلمة العد الثانية، فإن $f(X)$ يحقق نفس المسلمة.

٧- بين أنه إذا كان X ليندلوف و Y محكم، فإن $X \times Y$ يكون ليندلوف.

٨- نفرض أن $\mathscr{B}_p = \{G_1, G_2, ...\}$ أساس موضعي قابل للعد عند النقطة p في الفضاء التوبولوجي X. بين أنه يوجد أساس موضعي متداخل عند p.

٩- نفرض أن τ هو توبولوجي المكملات المنتهية على $\mathbb{R}$. بين أن $(\mathbb{R}, \tau)$ لا يحقق مسلمة العد الأولى.

١٠- نفرض أن X فضاء توبولوجي يحقق مسلمة العد الأولى. بين أن الدالة $f: X \to Y$ تكون متصلة عند النقطة $p \in X$ إذا وفقط إذا كانت متصلة بالمتتابعات عند p.

١١- بين أن فضاء المكملات المنتهية يكون قابل للفصل.

٩-٢ مسلمات التباعد Separation axioms

العديد من الخواص للفضاء التوبولوجي X تعتمد على توزيع المجموعات المفتوحة. بصورة تقريبية الفضاء يكون أقرب إلى أن يكون قابل للفصل، فضاء عد من النوع الأول أو النوع الثاني، إذا كان يحتوي عدد قليل من المجموعات المفتوحة. من جهة أخرى، دالة اختيارية على X أقرب إلى أن تكون متصلة أو متابعة يكون لها نهاية وحيدة إذا كان الفضاء يحتوي عدد كبير من المجموعات المفتوحة.

مسلمات التباعد، التي سوف نناقشها فيما يلي، تقترح وجود كم كاف من المجموعات المفتوحة.

تعريف ٩-١٥. الفضاء التوبولوجي X يسمى **فضاء** T_0 -space T_0 إذا كان لكل نقطتين $x, y \in X$ بحيث $x \neq y$ يوجد مجموعة مفتوحة $U \subset X$ بحيث U تحتوي إحدى النقطتين ولا تحتوي الأخرى.

واضح أن خاصية أن الفضاء T_0 تكون خاصية توبولوجية.

مثال ٩-١٦. كل فضاء توبولوجي متقطع يكون فضاء T_0 في حين أن أي فضاء غير متقطع يحتوي أكثر من نقطة لا يكون فضاء T_0.

تعريف ٩-١٧. الفضاء التوبولوجي X يسمى **فضاء** T_1 T_1-space إذا كان لكل نقطتين $x, y \in X$ بحيث $x \neq y$ يوجد مجموعة مفتوحة $U \subset X$ بحيث $x \in U$ و $y \notin U$.

واضح أن خاصية أن الفضاء T_1 خاصية توبولوجية وخاصية ضربية، أي أن حاصل ضرب عدد من فضاءات T_1 يكون فضاء T_1. أيضا كل فضاء T_1 يكون فضاء T_0.

مثال ٩-١٨. المجموعة $\{0,1\}$ مع التوبولوجي $\{\phi, \{0\}, \{0,1\}\}$ يسمى **فضاء سيربينسكي** Sierpinski space. هذا الفضاء يكون فضاء T_0 ولكنه ليس فضاء T_1.

نظرية ٩-١٩. الفضاء التوبولوجي X يكون فضاء T_1 إذا وفقط إذا كان $\{x\}$ مجموعة مغلقة لكل $x \in X$.

البرهان: بسيط ويترك للقارئ.

حيث أن اتحاد عدد منتهي من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة فإنه في فضاء T_1 كل مجموعة منتهية تكون مغلقة ومن ثم نحصل على النتيجة التالية:

نتيجة ٩-٢٠. الفضاء التوبولوجي (X, τ) يكون فضاء T_1 إذا وفقط إذا كان τ يحتوي توبولوجي المكملات المنتهية على X.

دعنا نلاحظ أن الفضاء X يكون فضاء T_1 إذا وفقط إذا كان كل نقطة $x \in X$ تساوي تقاطع كل المجموعات المفتوحة التي تحتويها. هذا يؤدي على وجه الخصوص إلى أن كل مجموعة جزئية مكونة من نقطة واحدة في فضاء العد من النوع الأول T_1 تكون مجموعة G_δ.

تعريف ٩-٢١. الفضاء التوبولوجي X يسمى **فضاء** T_2 أو **فضاء هاوسدورف** Hausdorff space إذا كان لأي نقطتين $x, y \in X$ بحيث $x \neq y$ يوجد مجموعتين مفتوحتين $U, V \subset X$ بحيث $x \in U$، $y \in V$ و $U \cap V = \phi$.

دعنا نلاحظ أن الفضاء X يكون فضاء T_2 إذا وفقط إذا كانت كل نقطة $x \in X$ تساوي تقاطع إغلاق كل المجموعات المفتوحة التي تحتويها.
واضح أن كل فضاء T_2 يكون فضاء T_1 ولكن العكس ليس صحيحا كما يتضح من المثال التالي.
مثال ٩-٢٢. نعتبر فضاء المكملات المنتهية على المجموعة X. إذا كانت X منتهية فإن هذا الفضاء يكون هو الفضاء المتقطع. على أي حال X يكون فضاء T_1 ولكن إذا كانت X لانهائية فإن فضاء المكملات المنتهية لا يكون T_2.
مثال ٩-٢٣. كل فضاء قياس يكون فضاء هاوسدورف. نفرض أن X فضاء قياس و $x, y \in X$ بحيث $x \neq y$. إذن $d(x, y) = \varepsilon > 0$. نعتبر الكرتين المفتوحتين $G = B(x, \frac{1}{3}\varepsilon)$ و $H = B(y, \frac{1}{3}\varepsilon)$، واضح أن $x \in G$ و $y \in H$. لبيان أن $G \cap H = \phi$، نفرض أن $z \in G \cap H$. إذن $d(x,z) < \frac{1}{3}\varepsilon$ و $d(z,y) < \frac{1}{3}\varepsilon$ ومن ثم، من متباينة المثلث،

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \tfrac{2}{3}\varepsilon$$

وهذا يناقض حقيقة أن $d(x,y) = \varepsilon$. لذلك $G \cap H = \phi$ ويكون الفضاء X هاوسدورف.
نظرية ٩-٢٤. (أ) الفضاء الجزئي من فضاء هاوسدورف يكون فضاء هاوسدورف. (ب) حاصل ضرب فضاءات هاوسدورف يكون فضاء هاوسدورف.
البرهان: (أ) يترك كتمرين للقارئ. لإثبات (ب) نفرض أن $\{X_\alpha\}$ عائلة من فضاءات هاوسدورف. نفرض أن $x = (x_\alpha)$ و $y = (y_\alpha)$ نقطتان مختلفتان في فضاء حاصل الضرب $\prod X_\alpha$. حيث أن $x \neq y$، يوجد دليل β بحيث $x_\beta \neq y_\beta$. نختار مجموعتين غير متقاطعتين U و V مفتوحتين في X_β بحيث $x_\beta \in U$ و $y_\beta \in V$. المجموعتان $\pi_\beta^{-1}(U)$ و $\pi_\beta^{-1}(V)$ غير

متقاطعتان مفتوحتان في $\prod X_\alpha$ تحتويان x و y ، على الترتيب. ومن ثم $\prod X_\alpha$ يكون فضاء هاوسدورف.

نظرية ٩-٢٥. في فضاء هاوسدورف كل متتابعة تقاربية يكون لها نهاية وحيدة.

البرهان: نفرض أن X فضاء هاوسدورف ونفرض أن (x_n) متتابعة تتقارب إلى نقطتين مختلفتين x و y. إذا توجد مجموعتان مفتوحتان U و V بحيث $x \in U$ ، $y \in V$ و $U \cap V = \phi$. من تعريف تقارب المتتابعة يوجد N_1 و N_2 بحيث $x_n \in U$ لكل $n \geq N_1$ و $x_n \in V$ لكل $n \geq N_2$. بوضع $N = \max\{N_1, N_2\}$ نجد أن $x_n \in U \cap V$ لكل $n \geq N$ ، وهذا تناقض. إذن المتتابعة لا يمكن أن تتقارب إلى أكثر من نقطة واحدة.

عكس النظرية السابقة ليس صحيحا دائما، ولكن إذا كان X يحقق مسلمة العد الأولى فإن العكس يكون صحيحا.

نظرية ٩-٢٦. نفرض أن X و Y فضاءان توبولوجيان و $f, g : X \to Y$ دالتان متصلتان حيث Y فضاء هاوسدورف. المجموعة $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ تكون مغلقة.

البرهان: نفرض أن $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ و $x \in A$. حيث أن $f(x) \neq g(x)$ ، توجد مجموعتان U و V مفتوحتان في Y بحيث $f(x) \in U$ ، $g(x) \in V$ و $U \cap V = \phi$. نفرض أن $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$، إذن W تكون مجموعة مفتوحة في X تحتوي x. علاوة على ذلك $W \subset A$. لذلك A تكون مفتوحة ومن ثم $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ تكون مغلقة.

تعريف ٩-٢٧. الفضاء التوبولوجي X يسمى فضاء **منتظم** regular إذا كان لكل مجموعة F مغلقة في X و $x \in X \setminus F$ توجد مجموعتان مفتوحتان U و V بحيث $x \in U$ ، $F \subset V$ و $U \cap V = \phi$.

الفضاء المنتظم ليس بالضرورة أن يكون فضاء T_1 كما يتضح من المثال التالي:

مثال ٩-٢٨. نعتبر التوبولوجي $\tau = \{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ على المجموعة $X = \{a,b,c\}$. لاحظ أن المجموعات المغلقة في X هي X، ϕ، $\{a\}$ و $\{b,c\}$. (X,τ) يكون فضاء منتظم ولكنه ليس فضاء T_1، حيث، على سبيل المثال، $\{b\}$ ليست مجموعة مغلقة.

تعريف ٩-٢٩. الفضاء التوبولوجي الذي يكون منتظم ويكون أيضا فضاء T_1 يسمى **فضاء** T_3.

مبرهنة ٩-٣٠. كل فضاء T_3 يكون فضاء T_2.

البرهان: نفرض أن X فضاء T_3، إذن X يكون فضاء T_1 ومن ثم كل مجموعة منفردة تكون مغلقة. نفرض أن $x, y \in X$ بحيث $x \neq y$. لذلك $\{y\}$ تكون مغلقة و $x \notin \{y\}$، لأن الفضاء منتظم، توجد مجموعتان U و V مفتوحتان في X بحيث $x \in U$ ، $\{y\} \subset V$ و $U \cap V = \phi$ ومن ثم يكون X فضاء T_2.

نظرية ٩-٣١. الفضاء التوبولوجي X يكون منتظم إذا وفقط إذا كان لكل $x \in X$ وكل مجموعة مفتوحة U تحتوي x توجد مجموعة مفتوحة V تحتوي x بحيث $\overline{V} \subset U$.

البرهان: نفرض أن X فضاء منتظم وأن $x \in X$ و U مجموعة مفتوحة تحتوي x. إذن $X \setminus U$ تكون مجموعة مغلقة لا تحتوي x ومن ثم توجد مجموعتان مفتوحتان V و W بحيث $x \in V$ ، $X \setminus U \subset W$ و $V \cap W = \phi$. لذلك $V \subset X \setminus W$ و $X \setminus W \subset U$. وحيث أن $X \setminus W$ مجموعة مغلقة فإن $\overline{V} \subset X \setminus W$ وبالتالي $\overline{V} \subset U$.

في الاتجاه العكسي، نفرض أن $x \in X$ و F مجموعة مغلقة لا تحتوي x. إذن $X \setminus F$ تكون مجموعة مفتوحة تحتوي x. من الفرض، توجد مجموعة مفتوحة V تحتوي x بحيث $\overline{V} \subset X \setminus F$. ومن ثم $F \subset X \setminus \overline{V}$ ، وحيث أن $X \setminus \overline{V}$ تكون مجموعة مفتوحة و $V \cap X \setminus \overline{V} = \phi$ فإن الفضاء يكون منتظم.

نظرية ٩-٣٢. (أ) الفضاء الجزئي من فضاء T_3 يكون فضاء T_3،

(ب) حاصل ضرب فضاءات T_3 يكون فضاء T_3.

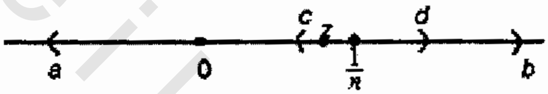
البرهان: (أ) نفرض أن X فضاء T_3 وأن Y فضاء جزئي من X. إذن Y يكون فضاء T_1 ومن ثم $\{x\}$ تكون مجموعة مغلقة في Y لكل $x \in Y$. نفرض $x \in Y$ و B مجموعة مغلقة في Y بحيث $x \notin F$. الآن $Cl_X B \cap Y = Cl_Y B = B$. لـذلك $x \notin Cl_X B$. حيـث أن X فراغ منتظم، توجد مجموعتان U و V مفتوحتان في X بحيث $x \in U$، $Cl_X B \subset V$ و $U \cap V = \phi$. إذن $U \cap Y$ و $V \cap Y$ تكونـــا مجموعتــان مفتوحتــان فــي Y غيــر متقاطعتــان و $x \in U \cap Y$ و $B \subset V \cap Y$.

(ب) نفــرض أن $\{X_\alpha\}$ عائلـــة مـــن فـــضاءات T_3 ونفـــرض أن $X = \prod X_\alpha$. من (أ)، X يكون فضاء T_2 ، لذلك مجموعات النقطة الواحدة تكون مغلقة في X. سوف نستخدم نظرية ٩-٣٠ لإثبات أن X فضاء منتظم. نفرض أن $x = (x_\alpha)$ نقطة في X و U مجموعة مفتوحة في X تحتوي x. نختار عنصر أساس $\prod U_\alpha$ يحتوي x ومحتوى في U. لكل α ، نختار مجموعة V_α مفتوحة في X_α تحتوي x_α، بحيث $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. إذا حدث أن $U_\alpha = X_\alpha$ نختار $V_\alpha = X_\alpha$. إذن $V = \prod V_\alpha$ يكون مجموعة مفتوحة في X تحتوي x. حيث أن $\overline{V} = \prod \overline{V_\alpha}$ ، ينتج أن $\overline{V} \subset \prod U_\alpha \subset U$ ومن ثم X يكون منتظم.

مثال ٩-٣٣. التوبولوجي على $\mathbb{R}$ الذي أساسه كل الفترات المفتوحة (a,b) وكل المجموعات على الصورة $(a,b) - K$ حيث $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ يرمز له بالرمز $\mathbb{R}_K$. هذا الفضاء يكون فضاء هاوسدورف، لأن أي نقطتين مختلفتين يكون لهما فترتان مفتوحتان غير متقاطعتان تحتويهما.

ولكن هذا الفضاء ليس فضاء T_3 . المجموعة K تكون مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}_K$ ولا تحتوي النقطة 0. نفرض أنه توجد مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان U و V تحتويان 0 و K ، على الترتيب. نختار

عنصر أساس يحتوي 0 ومحتوى في U. هذا العنصر يجب أن يكون على الصورة $(a,b)-K$، لأن كل عنصر أساس على الصورة (a,b) يحتوي 0 سوف يقطع K. نختار n كبيرة بصورة كافية بحيث $1/n \in (a,b)$. ثم نختار عنصر أساس يحتوي $1/n$ ومحتوى في V؛ هذا يجب أن يكون على الصورة (c,d). أخيرا نختار z بحيث $z < 1/n$ و $z > \max\{c, 1/(n+1)\}$. إذن z ينتمي إلى كل من U و V، ومن ثم تكونا غير متقاطعتان. أنظر الشكل



تعريف ٩-٣٤. الفضاء التوبولوجي X يسمى **فضاء عادي (طبيعي)** normal إذا كان لكل زوج من المجموعات F_1 و F_2 المغلقة في X غير المتقاطعة، يوجد مجموعتان U و V مفتوحتان في X بحيث $F_1 \subset U$ و $F_2 \subset V$ و $U \cap V = \phi$.

نظرية ٩-٣٥. الفضاء التوبولوجي X يكون فضاء عادي إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مغلقة F وكل مجموعة مفتوحة H تحتوي F توجد مجموعة مفتوحة G بحيث $F \subset G \subset \overline{G} \subset H$.

البرهان: نفرض أن X فضاء عادي. نفرض أن F مجموعة مغلقة في X و H مجموعة مفتوحة بحيث $F \subset H$. إذن $X \setminus H$ تكون مجموعة مغلقة في X و $F \cap (X \setminus H) = \phi$ ومن ثم توجد مجموعات مفتوحتان U و G بحيث $F \subset G$، $X \setminus H \subset U$ و $U \cap G = \phi$. ولكن $U \cap G = \phi$ يؤدي إلى $G \subset X \setminus U$ و $X \setminus H \subset U$ يؤدي إلى $X \setminus U \subset H$. علاوة على ذلك $X \setminus U$ تكون مغلقة ومن ثم $F \subset G \subset \overline{G} \subset X \setminus U \subset H$.

من جهة أخرى نفرض أن الشرط محقق والمطلوب إثبات أن الفضاء X يكون عادي. نفرض أن F_1 و F_2 مجموعتان مغلقتان في X غير متقاطعتان. إذن $F_1 \subset X \setminus F_2$ و $X \setminus F_2$ مجموعة مفتوحة.

لذلك توجد مجموعة مفتوحة G بحيث $F_1 \subset G \subset \overline{G} \subset X \setminus F_2$.
ولكن $\overline{G} \subset X \setminus F_2$ يؤدي إلى $F_2 \subset X \setminus \overline{G}$، كذلك $G \subset \overline{G}$ يؤدي إلى $G \cap (X \setminus \overline{G}) = \phi$. علاوة على ذلك $X \setminus \overline{G}$ تكون مجموعة مفتوحة. لذلك $F_1 \subset G$ ، $F_2 \subset X \setminus \overline{G}$ و G و $X \setminus \overline{G}$ مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان، ومن ثم الفضاء يكون عادي.

مثال ٩-٣٦. نعتبر التوبولوجي $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ على المجموعة $X = \{a,b,c\}$. المجموعات المغلقة هي X، ϕ ، $\{b,c\}$، $\{a,b\}$ و $\{c\}$. واضح أن (X,τ) يكون فضاء عادي. ولكن (X,τ) ليس فضاء T_1 حيث أن $\{a\}$ ليست مغلقة، أيضا (X,τ) ليس منتظم، حيث أن $a \notin \{c\}$ والمجموعة الوحيدة المفتوحة التي تحتوي $\{c\}$ هي X وهي أيضا تحتوي a.

تعريف ٩-٣٧. الفضاء التوبولوجي الذي يكون عادي و يكون أيضا فضاء T_1 يسمى **فضاء** T_4.

مثال ٩-٣٨. الفضاء $\mathbb{R}_l$ يكون فضاء T_4. كل مجموعة من نقطة واحدة تكون مغلقة. لبيان أنه عادي، نفرض أن A و B مجموعتان مغلقتان غير متقاطعتان في $\mathbb{R}_l$. لكل نقطة a في A نختار عنصر أساس $[a, x_a)$ لا يقطع B، ولكل نقطة b في B نختار عنصر أساس $[b, x_b)$ لا يقطع A. المجموعتان المفتوحتان

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a) \quad \text{و} \quad V = \bigcup_{b \in B} [b, x_b)$$

تكونا غير متقاطعتان تحتويان A و B على الترتيب.

مبرهنة ٩-٣٩. كل فضاء T_4 يكون أيضا فضاء T_3.

البرهان: نفرض أن X فضاء T_4 ، F مجموعة جزئية مغلقة في X و $x \in X \setminus F$. حيث أن X فضاء T_4، إذن X يكون فضاء T_1 وعادي ومن ثم $\{x\}$ تكون مجموعة جزئية مغلقة. حيث أن $\{x\} \cap F = \phi$، توجد مجموعتان U و V مفتوحتان في X بحيث $F \subset U$،

$V \supset \{x\} \ni x$ و $U \cap V = \phi$ ومن ثم يكون X فضاء منتظم وبالتالي يكون T_3.

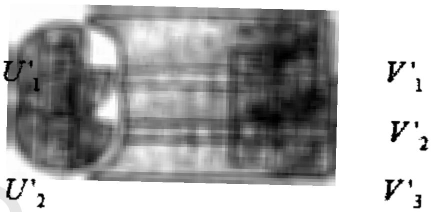
نظرية ٩-٤٠. كل فضاء منتظم له أساس قابل للعد يكون عادي.

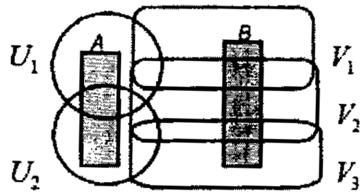
البرهان: نفرض أن X فضاء منتظم له أساس قابل للعد $\mathscr{B}$. نفرض أن A و B مجموعتان مغلقتان غير متقاطعتان في X. لكل نقطة $x \in A$ توجد مجموعة مفتوحة U تحتوي x ولا تقطع B. باستخدام خاصية الانتظام للفضاء X، نختار مجموعة مفتوحة V تحتوي x بحيث $\overline{V} \subset U$. أخيرا نختار عنصر أساس من $\mathscr{B}$ يحتوي x محتوى في V. باختيار عنصر الأساس لكل $x \in A$، نكون غطاء قابل للعد لـ A بمجموعات مفتوحة إغلاقها لا يقطع B. حيث أن هذا الغطاء لـ A قابل للعد، دعنا نرمز له بالرمز $\{U_n\}$.

بالمثل، نختار تجمع قابل للعد $\{V_n\}$ من مجموعات مفتوحة تغطي B، بحيث أن كل $\overline{V_n}$ لا يقطع A. المجموعتان $U = \bigcup U_n$ و $V = \bigcup V_n$ مفتوحتان تحتويان A و B على الترتيب. الآن نجري الحيلة التالية لتكوين مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان. نفرض n، نعرف

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \quad \text{و} \quad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$$

لاحظ أن كل مجموعة U'_n تكون مفتوحة، لكونها الفرق بين مجموعة مفتوحة U_n ومجموعة مغلقة $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$. بالمثل، كل مجموعة V'_n تكون مفتوحة. التجمع $\{U'_n\}$ يغطي A، لأن كل x من A تنتمي إلى U_n لبعض n، و x لا تنتمي إلى أي من $\overline{V_i}$. بالمثل التجمع $\{V'_n\}$ يغطي B. أنظر الشكل التالي





أخيرا، المجموعتان المفتوحتان

$$V'=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}V'_n \quad \text{و} \quad U'=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}U'_n$$

غير متقاطعتان. حيث إذا كان $x\in U'\cap V'$ فإن $x\in U'_j\cap V'_k$ لبعض j و k. نفرض أن $j\le k$. ينتج من تعريف U'_j أن $x\in U_j$، وحيث أن $j\le k$ ينتج من تعريف V'_k أن $x\notin \overline{U_j}$. تناقض مماثل يظهر إذا كان $j\ge k$.

نظرية ٩-٤١. كل فضاء قابل للقياس يكون فضاء عادي ومن ثم يكون T_4.

البرهان: نفرض أن X فضاء قابل للقياس بالقياس d. نفرض أن A و B مجموعتان جزئيتان مغلقتان غير متقاطعتان في X. لكل $a\in A$، نختار ε_a بحيث أن الكرة $B(a,\varepsilon_a)$ لا تقطع B. بالمثل، لكل $b\in B$، نختار ε_b بحيث أن الكرة $B(b,\varepsilon_b)$ لا تقطع A. نعرف

$$V=\bigcup_{b\in B}B(b,\varepsilon_b/2) \quad \text{و} \quad U=\bigcup_{a\in A}B(a,\varepsilon_a/2)$$

إذن U و V تكونا مجموعتان مفتوحتان تحتويان A و B على الترتيب. علاوة على ذلك، إذا كان $z\in U\cap V$ ، فإن

$$z\in B(a,\varepsilon_a/2)\bigcap B(b,\varepsilon_b/2)$$

لبعض $a\in A$ و $b\in B$. بتطبيق متباينة المثلث، نحصل على $d(a,b)<(\varepsilon_a+\varepsilon_b)/2$. إذا كان $\varepsilon_a\le\varepsilon_b$ ، فإن $d(a,b)<\varepsilon_b$، ومن ثم الكرة $B(b,\varepsilon_b)$ تحتوي النقطة a. إذا كانت $\varepsilon_b\le\varepsilon_a$، فإن $d(a,b)<\varepsilon_a$، ومن ثم الكرة $B(a,\varepsilon_a)$ تحتوي النقطة b. في كلتا الحالتين نحصل على تناقض ومن ثم U و V تكونا غير متقاطعتان.

نظرية ٩-٤٢. كل فضاء هاوسدورف محكم يكون فضاء عادي ومن ثم T_4.

البرهان: نفرض أن X فضاء هاوسدورف محكم. سوف نبرهن أن X يكون فضاء منتظم. نفرض أن $x \in X$ نقطة و B مجموعة مغلقة في X لا تحتوي x. إذن B تكون مجموعة محكمة في X ومن تمهيدية ٨-٩ توجد مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان تحتويان x و B على الترتيب.

نفس الأسلوب يمكن استخدامه في إثبات أن X يكون فضاء عادي. نفرض أن A و B مجموعتان مغلقتان غير متقاطعتان في X. لكل $a \in A$ توجد مجموعتان مفتوحتان U_a و V_a غير متقاطعتان تحتويان a و B على الترتيب. التجمع $\{U_a\}$ يكون غطاء مفتوح للمجموعة A، وحيث أن A محكمة لكونها مغلقة في فضاء محكم، يوجد تجمع جزئي منتهي $\{U_{a_1},...,U_{a_n}\}$ يغطي A. المجموعتان $U = U_{a_1} \cup ... \cup U_{a_n}$ و $V = V_{a_1} \cap ... \cap V_{a_n}$ تكونا مفتوحتان غير متقاطعتان تحتويان A و B على الترتيب.

نظرية ٩-٤٣. كل مجموعة مرتبة X تكون فضاء عادي مع التوبولوجي المرتب.

البرهان: نفرض أن X مجموعة مرتبة. كل فترة على الصورة $(x, y]$ تكون مفتوحة في X. إذا كانت X لها عنصر أكبر وكان y هو هذا العنصر، فإن $(x, y]$ تكون هي عنصر أساس حول y. إذا كان y ليس العنصر الأكبر في X، إذن $(x, y]$ تساوي المجموعة المفتوحة (x, y')، حيث y' هو العنصر السابق مباشرة لـ y.

الآن نفرض أن A و B مجموعتان جزئيتان من X مغلقتان غير متقاطعتان، نفترض لحظيا أن أيا من A و B لا تحتوي العنصر الأصغر a_0 في X. لكل $a \in A$، يوجد عنصر أساس يحتوي a ولا يقطع B، يحتوي فترة على الصورة $(x, a]$. (هنا حيث استخدمنا حقيقة أن a ليست العنصر الأصغر في X.) لكل $a \in A$ نختار مثل

هذه الفترة $(x_a,a]$ التي لا تقطع B. بالمثل، لكل $b\in B$، نختار فترة $(y_b,b]$ لا تقطع A. المجموعتان

$$U=\bigcup_{a\in A}(x_a,a] \quad \text{و} \quad V=\bigcup_{b\in B}(y_b,b]$$

تكونا مفتوحتان تحتويان A و B على الترتيب. سوف نوضح أنهما غير متقاطعتان. إذا كان $z\in U\cap V$ فإن $z\in(x_a,a]\cap(y_b,b]$ لبعض $a\in A$ ولبعض $b\in B$. نفرض أن $a<b$. إذا كان $a\le y_b$، فإن الفترتان تكونا غير متقاطعتان، بينما إذا كان $a>y_b$، فإن $a\in(y_b,b]$ ، على عكس حقيقة أن $(y_b,b]$ لا تقطع A. تناقض مماثل نحصل عليه إذا كان $b<a$.

أخيرا، نفرض أن A و B مجموعتان جزئيتان من X مغلقتان غير متقاطعتان ونفرض أن A تحتوي العنصر الأصغر a_0 في X. المجموعة $\{a_0\}$ تكون مفتوحة ومغلقة في X. من الفقرة السابقة توجد مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان U و V تحتويان المجموعتان المغلقتان $A\setminus\{a_0\}$ و B على الترتيب. إذن $U\cup\{a_0\}$ و V تكونا مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان تحتويان A و B على الترتيب.

٣-٨ تمهيدية يوريسون والفضاء تام الانتظام

الآن نصل إلى أكثر نظريات هذا الكتاب عمقا، والتي تسمى تمهيدية يوريسون. هذه النظرية تقرر وجود دوال متصلة معينة ذات قيم حقيقية على فضاء عادي X.

نظرية ٩-٤٤.(تمهيدية يوريسون Urysohn lemma) نفرض أن X فضاء عادي و A و B مجموعتان جزئيتان مغلقتان غير متقاطعتان في X. نفرض أن $[a,b]$ فترة مغلقة في الخط الحقيقي. إذن توجد دالة متصلة

$$f:X\to[a,b]$$

بحيث $f(x)=a$ لكل $x\in A$ و $f(x)=b$ لكل $x\in B$.

البرهان: سوف نبرهن النظرية في حالة الفترة $[0,1]$ ومنها تنتج الحالة العامة. الخطوة الأولى في البرهان هو استخدام خاصية أن الفضاء عادي لتكوين عائلة معينة U_p من المجموعات المفتوحة في X، مرقمة بالأعداد الكسرية. ومن ثم نستخدم هذه المجموعات في تعريف الدالة المتصلة f.

خطوة ١. نفرض أن P هي مجموعة كل الأعداد الكسرية في الفترة $[0,1]$. لكل $p \in P$، سوف نعرف مجموعة U_p مفتوحة في X، بطريقة بحيث كلما كان $p < q$، نحصل على $\overline{U_p} \subset U_q$. لذلك المجموعات U_p سوف تكون مرتبة ترتيبا بسيطا بعلاقة الاحتواء بنفس الطريقة المرتبة بها الأدلة بالترتيب العادي على الخط الحقيقي.

لأن P قابلة للعد، يمكننا استخدام الاستنتاج في تعريف المجموعات U_p (أو مبدأ التعريف الارتدادي). نرتب عناصر P في متتابعة لانهائية بطريقة ما، للملائمة نفرض أن العددين 1و 0 هما أو عنصران في المتتابعة.

الآن نعرف المجموعات U_p كما يلي: أولا نعرف $U_1 = X \setminus B$.

ثانيا، لأن A مغلقة محتواة في مجموعة مفتوحة U_1، من خاصية أن الفضاء X عادي، نختار مجموعة مفتوحة U_0 بحيث

$$\overline{U_0} \subset U_1 \text{ و } A \subset U_0$$

على وجه العموم نفرض أن P_n ترمز إلى المجموعة التي تتكون من n عدد كسري الأولى في المتتابعة. نفرض أن U_p معرفة لكل الأعداد الكسرية p التي تنتمي المجموعة P_n، تحقق الشرط

$$p < q \;\Rightarrow\; \overline{U_p} \subset U_q \qquad (*)$$

نفرض أن r هو العدد الكسري التالي في المتتابعة، ونرغب في تعيين U_r.

نعتبر المجموعة $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. هذه مجموعة منتهية من الفترة $[0,1]$، وهي مرتبة بالترتيب البسيط المشتق من الترتيب العادي $<$

على الخط الحقيقي. في المجموعة المنتهية المرتبة ترتيبا بسيطا كل عنصر (عدا أصغر عنصر وأكبر عنصر) يكون له سابق مباشر وتالي مباشر. العدد 0 هو العنصر الأصغر، و 1 هو العنصر الأكبر في المجموعة المرتبة ترتيبا بسيطا P_{n+1}، و r ليست 0 أو 1. لذلك r يكون لها سابق مباشر p في P_{n+1} و تالي مباشر q في P_{n+1}.
المجموعتان U_p و U_q الآن بالفعل معرفتان، و $\overline{U_p} \subset U_q$، من فرض الاستنتاج. باستخدام خاصية أن الفضاء X عادي، يمكننا إيجاد مجموعة مفتوحة U_r في X بحيث يكون

$$\overline{U_r} \subset U_q \text{ و } \overline{U_p} \subset U_r$$

الآن نؤكد أن (*) تكون محققة لكل زوج من عناصر P_{n+1}. إذا كان كلا العنصرين واقع في P_n، (*) تتحقق من فرض الاستنتاج. إذا كان أحد العنصرين هو r والآخر نقطة s من P_n، فإنه إما $s \le p$، وفي هذه الحالة

$$\overline{U_s} \subset \overline{U_p} \subset U_r$$

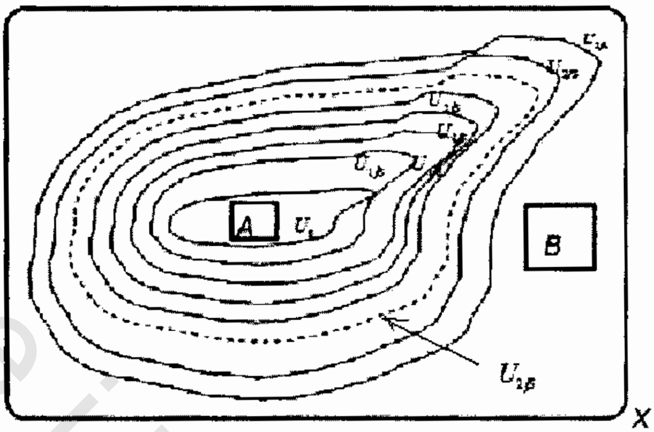
أو $s \ge q$، وفي هذه الحالة

$$\overline{U_r} \subset U_q \subset U_s$$

لذلك لكل زوج من نقاط P_{n+1}، العلاقة (*) تكون محققة.
من الاستنتاج يكون لدينا U_p معرفة لكل $p \in P$.
للتوضيح، نفرض أننا بدأنا بالطريقة القياسية لترتيب عناصر P في متتابعة لانهائية

$$P = \{1, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \ldots\}$$

بعد تعريف U_0 و U_1، سوف نعرف $U_{1/2}$ بحيث $\overline{U_0} \subset U_{1/2}$ و $\overline{U_{1/2}} \subset U_1$. بعد ذلك ندخل $U_{1/3}$ بين U_0 و $U_{1/2}$، و $U_{2/3}$ بين $U_{1/2}$ و U_1. وهكذا. في الخطوة الثامنة من البرهان سوف يكون لدينا الوضع الموضح بالرسم التالي



الخطوة التاسعة سوف تتكون من اختيار مجموعة مفتوحة $U_{2/5}$ لتحشر بين $U_{1/3}$ و $U_{1/2}$. وهكذا

خطوة ٢. الآن عرفنا U_p لكل الأعداد الكسرية p في الفترة $[0,1]$. نمد هذا التعريف إلى كل الأعداد الكسرية في $\mathbb{R}$ بتعريف

$$U_p = \phi \quad \text{إذا كان} \quad p < 0$$

$$U_p = X \quad \text{إذا كان} \quad p > 1$$

يظل صحيحا (كما يمكن التأكد من ذلك) أنه لأي زوج من الأعداد الكسرية p و q،

$$\overline{U_p} \subset U_q \quad \Leftarrow \quad p < q$$

خطوة ٣. إذا كانت x نقطة في X، نعرف $\mathbb{Q}(x)$ على أنها مجموعة الأعداد الكسرية p بحيث أن المجموعة المفتوحة المناظرة U_p تحتوي x،

$$\mathbb{Q}(x) = \{p : x \in U_p\}$$

هذه المجموعة لا تحتوي أي عدد أقل من 0، حيث لا توجد x تنتمي إلى U_p لقيم $p < 0$. أيضا هي تحتوي كل الأعداد أكبر من 1 ، حيث أن كل x تكون في U_p لكل $p > 1$. لذلك $\mathbb{Q}(x)$ تكون محددة من أسفل، وأكبر حد أدنى لها يكون نقطة في الفترة $[0,1]$. نعرف

$$f(x)=\inf\mathbb{Q}(x)=\inf\{p:x\in U_p\}$$

خطوة ٤. نبين أن f هي الدالة المطلوبة. إذا كانت $x\in A$ ، فإن $x\in U_p$ لكل $p\geq 0$ ، لذلك $\mathbb{Q}(x)$ تساوي مجموعة كل الأعداد الكسرية غير السالبة، و $f(x)=\inf\mathbb{Q}(x)=0$. بالمثل إذا كانت $x\in B$ ، فإنه لا يوجد $p\leq 1$ بحيث $x\in U_p$، لذلك $\mathbb{Q}(x)$ تتكون من كل الأعداد الكسرية أكبر من 1، و $f(x)=1$.

ما تبقى الآن هو إثبات أن f تكون متصلة. من أجل ذلك نبرهن ما يلي:

(١) $x\in\overline{U_r}$ يؤدي إلى $f(x)\leq r$.

(٢) $x\notin U_r$ يؤدي إلى $f(x)\geq r$.

لإثبات (١)، لاحظ أنه إذا كان $x\in\overline{U_r}$، فإن $x\in U_s$ لكل $s>r$. لذلك $\mathbb{Q}(x)$ تحتوي كل الأعداد الكسرية أكبر من r ، ومن ثم من التعريف يكون

$$f(x)=\inf\mathbb{Q}(x)\leq r$$

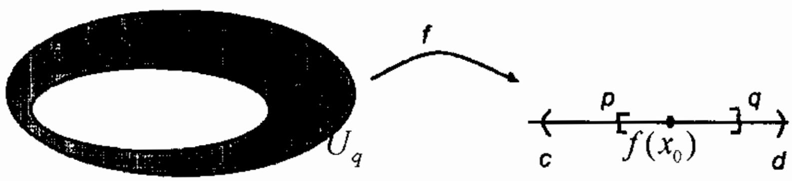
لإثبات (٢)، لاحظ أنه إذا كان $x\notin U_r$، فإن x لا تنتمي إلى U_s لأي $s<r$. لذلك، $\mathbb{Q}(x)$ تحتوي كل الأعداد الكسرية أصغر من r ، ومن ثم

$$f(x)=\inf\mathbb{Q}(x)\geq r$$

الآن نبرهن على اتصال f. نفرض نقطة x_0 في X وفترة مفتوحة (c,d) في $\mathbb{R}$ تحتوي النقطة $f(x_0)$ ، ونرغب في إيجاد جوار U للنقطة x_0 بحيث يكون $f(U)\subset(c,d)$. نختار عددين كسريين p و q بحيث

$$c<p<f(x_0)<q<d$$

الآن نؤكد أن المجموعة المفتوحة $U=U_q-\overline{U_p}$ تكون هي الجوار المطلوب لـ x_0. أنظر الشكل التالي



أولا، لاحظ أن $x_0 \in U$. حيث حقيقة أن $f(x_0) < q$ تؤدي من الشرط (٢) إلى أن $x_0 \in U_q$ ، بينما حقيقة أن $f(x_0) > p$ تؤدي من (١) إلى أن $x_0 \notin \overline{U_p}$.

ثانيا، نبين أن $f(U) \subset (c,d)$. نفرض $x \in U$. إذن $x \in U_q \subset \overline{U_q}$، لذلك $f(x) \leq q$ ، من (١). و $x \notin \overline{U_p}$، لذلك $x \notin U_p$ و $f(x) \geq p$ ، من (٢). لذلك $f(x) \in [p,q] \subset (c,d)$ ، كما هو مطلوب.

تعريف ٩-٤٥. إذا كان A و B مجموعتان جزئيتان من الفضاء التوبولوجي X وإذا كانت توجد دالة متصلة $f : X \to [0,1]$ بحيث يكون $f(A) = \{0\}$ و $f(B) = \{1\}$ ، نقول أن A و B **يمكن فصلهما** بدالة متصلة can be separated.

تمهيدية يوريسون تقول أنه إذا كان كل زوج من المجموعات المغلقة غير المتقاطعة في الفضاء X يمكن فصلهما بمجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين، فإن كل زوج من مثل هذه المجموعات يمكن فصلهما بدالة متصلة. العكس بديهي، حيث إذا كانت $f : X \to [0,1]$ هي الدالة، فإن $f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ و $f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ تكونا مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان تحتويان A و B على الترتيب.

هذه الحقيقة تؤدي إلى السؤال التالي: لماذا لا يمكن تعميم برهان تمهيدية يوريسون لبيان أنه في الفضاء المنتظم، حيث يمكن فصل نقطة عن مجموعة مغلقة لا تحتويها بمجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين، يمكننا أيضا فصل نقاط عن مجموعات مغلقة بدوال متصلة؟

للوهلة الأولى، يبدو أن برهان تمهيدية يوريسون يمكن أن يمضي. نأخذ نقطة a ومجموعة مغلقة B لا تحتوي a ، نبدأ البرهان تماما كما

سبق بتعريف $U_1 = X \setminus B$ ونختار U_0 على أنها المجموعة المفتوحة حول a إغلاقها محتوى في U_1 (باستخدام خاصية الانتظام للفضاء X). ولكن في الخطوة التالية من البرهان، نتجه نحو الصعوبة. نفرض أن p هي العدد الكسري التالي في المتتابعة بعد 0 و 1. نود أن نوجد مجموعة مفتوحة U_p بحيث أن $\overline{U_0} \subset U_p$ و $\overline{U_p} \subset U_1$. الانتظام لا يكفي لفعل ذلك.

متطلب فصل نقطة عن مجموعة مغلقة بواسطة دالة متصلة، في الواقع، يكون أقوى من متطلب فصلهما بمجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين. هذا المتطلب نضعه في مسلمة فصل جديدة.

تعريف ٩-٤٦. الفضاء التوبولوجي X يسمى **تام الانتظام** completely regular إذا كان لكل مجموعة مغلقة A في X ونقطة $x_0 \in X \setminus A$، توجد دالة متصلة $f : X \to [0,1]$ بحيث $f(x_0) = 1$ و $f(A) = \{0\}$.

مبرهنة ٩-٤٧. الفضاء تام الانتظام X يكون أيضا فضاء منتظم.

البرهان: نفرض أن A مجموعة مغلقة في X وأن $x_0 \in X$ نقطة لا تنتمي إلى A. حيث أن X تام الانتظام، توجد دالة متصلة $f : X \to [0,1]$ بحيث $f(x_0) = 1$ و $f(A) = \{0\}$. ولكن $\mathbb{R}$ وفضاءها الجزئي $[0,1]$ يكونا هاوسدورف، لذلك توجد مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان G و H تحتويان 0 و 1 على الترتيب. تبعا لذلك المجموعتان $f^{-1}(G)$ و $f^{-1}(H)$ تكونا مفتوحتان غير متقاطعتان تحتويان x_0 و A على الترتيب. بتعبير آخر، X يكون فضاء منتظم.

الفضاء تام الانتظام الذي يكون أيضا فضاء T_1 يسمى **فضاء تيخونوف** Tychonoff space (أو **فضاء** $T_{3\frac{1}{2}}$). من تمهيدية يوريسون نجد أن كل فضاء T_4 يكون فضاء تيخونوف. ومن مبرهنة ٩-٤٦ كل فضاء تام الانتظام يكون منتظم.

نظرية ٩-٤٨. خاصية أن الفضاء تام الانتظام تكون خاصية وراثية. أي أن الفضاء الجزئي من الفضاء تام الانتظام يكون تام الانتظام.

البرهان: نفرض أن X فضاء تام الانتظام وأن Y فضاء جزئي من X. نفرض x_0 نقطة في Y و A مجموعة مغلقة في Y لا تحتوي x_0. الآن لدينا $A = \overline{A} \cap Y$. لذلك $x_0 \notin \overline{A}$. وحيث أن X تام الانتظام، توجد دالة متصلة $f : X \to [0,1]$ بحيث أن $f(x_0) = 1$ و $f(\overline{A}) = \{0\}$. تقييد f على Y يكون هو الدالة المتصلة المطلوبة على Y.

تمارين ٩-٢

١- نفرض أن A مجموعة جزئية محكمة من فضاء هاوسدورف X. بين أنه إذا كان $p \notin A$ ، فإنه يوجد مجموعة مفتوحة U بحيث $p \in G \subset X \setminus A$.

٢- نفرض أن A و B مجموعتان جزئيتان محكمتان غير متقاطعتان في فضاء هاوسدورف X. برهن على أنه يوجد مجموعتان مفتوحتان غير متقاطعتان G و H بحيث يكون $A \subset G$ و $B \subset H$.

٣- بين أن الفضاء الجزئي من فضاء T_i يكون فضاء T_i، $i = 0,1,2$.

٤- بين أن المجموعة الجزئية المنتهية من فضاء T_1 ليس لها نقاط نهاية.

٥- نفرض أن X فضاء T_1، $A \subset X$ و $p \in X$. بين أن p تكون نقطة نهاية لـ A إذا وفقط إذا كان كل مجموعة مفتوحة تحتوي p تحتوي عدد لا نهائي من نقاط A.

٦- نفرض أن X فضاء T_1 و $\mathcal{B}_p$ أساس موضعي عند $p \in X$. بين أنه إذا كانت $q \in X$ نقطة تختلف عن q فإن أحد عناصر $\mathcal{B}_p$ لا يحتوي q.

٧- نفرض أن X فضاء T_1 يحقق مسلمة العد الأولى. بين أنه إذا كانت $p \in X$ نقطة نهاية للمجموعة $A \subset X$، فإنه توجد متتابعة من نقاط A المختلفة تتقارب إلى p.

٨- نفرض أن τ هو التوبولوجي على $\mathbb{R}$ المولد بالفترات المغلقة المفتوحة $[a,b)$. بين أن $(\mathbb{R},\tau)$ يكون فضاء هاوسدورف.

٩- نفرض أن $\mathcal{B}$ أساس لفضاء T_1 العادي X. بين أنه لكل $G_i \in \mathcal{B}$ و $p \in G_i$ يوجد $G_j \in \mathcal{B}$ بحيث $p \in \overline{G_j} \subset G_i$.

١٠- بين أن المجموعة المرتبة ترتيبا بسيطا تكون فضاء هاوسدورف مع التوبولوجي المرتب.

١١- بين أن الفضاء التوبولوجي X يكون هاوسدورف إذا وفقط إذا كان القطر $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ مغلق في $X \times X$.

١٢- بين أنه إذا كان X فضاء T_3 فإن كل زوج من النقاط المختلفة x و y في X يوجد مجموعتان مفتوحتان U و V بحيث $x \in U$، $y \in V$ و $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$.

١٣- بين أنه إذا كان X فضاء T_4 فإنه لأي مجموعتان مغلقتان غير متقاطعتان A و B في X، يوجد مجموعتان مفتوحتان U و V بحيث $A \subset U$، $B \subset V$ و $\overline{U} \cap \overline{V} = \phi$.

١٤- بين أن كل توبولوجي مرتب يكون منتظم.

١٥- نفرض أن X و X' هما نفس المجموعة مع التوبولوجيان τ و τ' على الترتيب، بفرض أن $\tau' \supset \tau$. إذا كان أحد الفضاءين هاوسدورف (أو T_3 أو T_4) فماذا يكون الحال بالنسبة للآخر؟

١٦- نفرض أن $f, g : X \to Y$ دالتان متصلتان وأن Y فضاء هاوسدورف. بين أن المجموعة $\{x : f(x) = g(x)\}$ تكون مغلقة في X.