الفصل الثامن
الإحكام
Compactness

مفهوم الإحكام ليس قريبا من أن يكون طبيعيا مثل الترابط. من بداية التوبولوجي كان واضحا أن الفترة المغلقة على الخط الحقيقي تكون لها خاصية معينة كانت حاسمة في إثبات نظريات مثل نظرية القيمة العظمى ونظرية الاتصال المنتظم. ولكن خلال وقت طويل لم يكن واضحا كيف يمكن إعادة صياغة هذه الخاصية للفضاء التوبولوجي العام. كان يعتقد أن هذه الخاصية الحاسمة للفترة $[a,b]$ كانت حقيقة أن كل مجموعة لانهائية من $[a,b]$ يكون لها نقطة نهاية، وهذه الخاصية كانت قد تم وصمها بالإحكام.

في هذا الباب نقدم تعريف الإحكام وأمثلة للفضاءات المحكمة وخواص الفضاءات المحكمة. كما نقدم الفضاءات الجزئية المحكمة في خط الأعداد. أيضا نقدم مفهوم الترابط الموضعي وإحكام النقطة الواحدة.

٨-١ الفضاءات المحكمة

تعريف ٨-١. التجمع $\mathcal{C}$ من المجموعات الجزئية من الفضاء التوبولوجي X يسمى **غطاء** cover لـ X، إذا كان اتحاد عناصر $\mathcal{C}$ يساوي X. هذا الغطاء يسمى **غطاء مفتوح** open cover إذا كانت عناصره مجموعات مفتوحة في X.

تعريف ٨-٢. الفضاء التوبولوجي X يسمى **محكم** (متراص) compact إذا كان كل غطاء مفتوح $\mathcal{C}$ لـ X يحتوي تجمع جزئي منتهي بحيث يكون أيضا غطاء لـ X.

مثال ٨-٣. الخط الحقيقي $\mathbb{R}$ ليس محكما. غطاء $\mathbb{R}$ بالفترات المفتوحة

$$\mathcal{C}=\{(n,n+2):n\in\mathbb{Z}\}$$

لا يحتوي أي تجمع جزئي منتهي يغطي $\mathbb{R}$.

مثال ٨-٤. الفضاء الجزئي التالي من $\mathbb{R}$ يكون محكم

$$X=\{0\}\cup\{\tfrac{1}{n}:n\in\mathbb{Z}^{+}\}$$

إذا أعطينا غطاء مفتوح $\mathcal{C}$ لـ X، يوجد عنصر U من $\mathcal{C}$ يحتوي 0. المجموعة U تحتوي كل النقاط $\frac{1}{n}$ ما عدا عدد منتهي. لكل نقطة في X لا تنتمي إلى U ، نختار عنصر من $\mathcal{C}$ يحتويه. التجمع المكون من هذه العناصر من $\mathcal{C}$ ، مع العنصر U ، يكون تجمع منتهي من $\mathcal{C}$ يغطي X.

مثال ٨-٥. كل فضاء توبولوجي X مكون فقط من عدد منتهي من النقاط يكون بالضرورة محكم، حيث في هذه الحالة كل غطاء مفتوح لـ X يكون منتهي.

مثال ٨-٦. الفترة $(0,1]$ ليست محكمة، الغطاء المفتوح

$$\mathcal{C}=\{(\tfrac{1}{n},1]: n\in\mathbb{Z}^{+}\}$$

لا يحتوي أي تجمع جزئي منتهي يغطي $(0,1]$. كذلك الفترة $(0,1)$ ليست محكمة. في حين أن الفترة $[0,1]$ تكون محكمة. قد يكون هذا معروفا في التحليل، ولكن سوف نبرهن ذلك بعد قليل.

على وجه العموم، قد يستغرق بعض الوقت لتقرير ما إذا كان فضاء معطى محكم أم لا. أولا سوف نبرهن بعض النظريات العامة التي تبين لنا كيف نكون فضاء محكم جديد من فضاءات قديمة. بعد ذلك سوف نوضح أن بعض الفضاءات المعينة تكون محكمة. هذه الفضاءات تشتمل كل الفترات المغلقة في الخط الحقيقي، وكل المجموعات الجزئية المغلقة المحددة من $\mathbb{R}^n$.

الآن نبرهن بعض الحقائق عن الفضاءات الجزئية. إذا كان Y فضاء جزئي من X فإن التجمع $\mathcal{C}$ من المجموعات الجزئية من X يسمى **غطاء** لـ Y إذا كان إتحاد عناصرها يحتوي Y.

تمهيدية ٨-٧. نفرض أن Y فضاء جزئي من X . إذن Y يكون محكم إذا وفقط إذا كان كل غطاء لـ Y بمجموعات مفتوحة في X يحتوي تجمع جزئي منتهي يغطي Y.

البرهان: نفرض أن Y محكم و $\mathcal{C}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ غطاء لـ Y بمجموعات مفتوحة في X. التجمع

$$\{A_\alpha \cap Y : \alpha \in J\}$$

يكون غطاء لـ Y بمجموعات مفتوحة في Y، ومن ثم يكون له تجمع جزئي منتهي

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, ..., A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

يغطي Y. إذن $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ يكون تجمع جزئي من $\mathcal{C}$ يغطي Y.

من جهة أخرى، نفرض أن شرط التمهيدية محقق ونريد إثبات أن Y يكون محكم. نفرض أن $\mathcal{C} = \{A'_\alpha\}_{\alpha \in J}$ غطاء لـ Y بمجموعات مفتوحة في Y. لكل α ، نختار مجموعة A_α مفتوحة في X بحيث

$$A'_\alpha = A_\alpha \cap Y$$

التجمع $\mathcal{C} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ يكون غطاء لـ Y بمجموعات مفتوحة في X. من الفرض يوجد تجمع جزئي منتهي $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ يغطي Y. إذن $\{A'_{\alpha_1}, ..., A'_{\alpha_n}\}$ يكون تجمع جزئي من $\mathcal{C}$ يغطي Y.

نفرض أن X فضاء توبولوجي و $Y \subset X$. إذا كان كل غطاء لـ Y بمجموعات مفتوحة في X له غطاء جزئي منتهي يغطي Y، نقول أن Y مجموعة جزئية محكمة في X. وإذا كان كل غطاء لـ Y بمجموعات مفتوحة في التوبولوجي النسبي على Y نقول أن Y فضاء جزئي محكم من X. بناء على ذلك يمكن إعادة صياغة تمهيدية ٨-٧ كما يلي: Y يكون فضاء جزئي محكم من X إذا وفقط إذا كانت Y مجموعة جزئية محكمة من X.

نظرية ٨-٨. كل مجموعة جزئية مغلقة من فضاء محكم تكون محكمة.

البرهان: نفرض أن Y مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء التوبولوجي المحكم X. نفرض $\mathcal{A}$ غطاء لـ Y بمجموعات مفتوحة في X، نكون غطاء مفتوح $\mathcal{B}$ لـ X بإضافة المجموعة المفتوحة $X \setminus Y$ إلى $\mathcal{C}$ ،

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}$$

تجمع جزئي منتهي من $\mathcal{B}$ يغطي X. إذا كان هذا التجمع يحتوي المجموعة $X \setminus Y$ ، نستبعد $X \setminus Y$ ، وإلا نترك التجمع الجزئي كما هو. التجمع الناتج يكون تجمع جزئي منتهي من $\mathcal{A}$ يغطي Y.

على ضوء تمهيدية ٨-٧ يمكن إعادة صياغة نظرية ٨-٨ كما يلي "كل فضاء جزئي مغلق من فضاء محكم يكون محكم" وسيظل البرهان كما هو دون تغيير.

تمهيدية ٨-٩. نفرض أن X فضاء هاوسدورف ، $Y \subset X$ مجموعة محكمة في X و $p \in X \setminus Y$. إذن توجد مجموعتان U و V مفتوحتان في X بحيث $p \in U$ ، $Y \subset V$ و $U \cap V = \phi$.

البرهان: لكل نقطة $y \in Y$ يوجد مجموعتان U_y و V_y مفتوحتان في X بحيث $p \in U_y$ ، $y \in V_y$ $U_y \cap V_y = \phi$. التجمع $\{V_y : y \in Y\}$ يكون غطاء لـ Y بمجموعات مفتوحة في X. لذلك يوجد تجمع جزئي منتهي $V_{y_1},...,V_{y_n}$ يغطي Y. المجموعة المفتوحة $V = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$ تحتوي Y والمجموعة المفتوحة $U = U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$ تحتوي p، أيضا $U \cap V = \phi$.

نظرية ٨-١٠. كل مجموعة جزئية محكمة من فضاء هاوسدورف تكون مغلقة.

البرهان. نفرض أن Y مجموعة جزئية محكمة من فضاء هاوسدورف X. سوف نبرهن أن $X \setminus Y$ تكون مجموعة مفتوحة في X. من تمهيدية ٨-٩، لكل $y \in X \setminus Y$ يوجد مجموعة مفتوحة تحتوي y ومحتواة في $X \setminus Y$ ومن ثم $X \setminus Y$ تكون مجموعة مفتوحة في X وبالتالي Y تكون مغلقة.

نظرية ٨-١١. صورة الفضاء المحكم تحت تأثير الدالة المتصلة تكون محكمة.

البرهان: نفرض $f : X \to Y$ دالة متصلة من الفضاء التوبولوجي المحكم X إلى الفضاء التوبولوجي Y. المطلوب إثبات أن $f(X)$ يكون محكم. نفرض أن $\mathcal{A}$ غطاء لـ $f(X)$ بمجموعات مفتوحة في Y. التجمع

$$\{ f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

يكون تجمع من المجموعات المفتوحة في X التي تغطي X. لذلك يوجد تجمع جزئي منتهي

$$f^{-1}(A_1),\ldots,f^{-1}(A_n)$$

يغطي X. إذن المجموعات $A_1,\ldots,A_n$ تغطي $f(X)$.

نظرية ٨-١٢. نفرض أن $f : X \to Y$ دالة تناظر أحادي متصلة. إذا كان X فضاء محكم و Y فضاء هاوسدورف فإن f يكون تشاكل.

البرهان: سوف نبرهن أن صور المجموعات المغلقة في X تكون مجموعات مغلقة في Y، وهذا يبرهن اتصال الدالة f^{-1}. نفرض أن F مجموعة مغلقة في X، إذن F تكون محكمة في X (نظرية ٨-٨). من نظرية ٨-١١، $f(F)$ تكون محكمة في Y. وحيث أن Y فضاء هاوسدورف فإن $f(F)$ تكون مغلقة في Y، من نظرية ٨-١٠.

النظرية التالية تبرهن أن حاصل ضرب عدد منتهي من الفضاءات المحكمة يكون فضاء محكم. ولكن قبل النظرية نعطي التمهيدية التالية والتي تسمى تمهيدية الأنبوب والتي سوف نستخدمها في برهان النظرية.

تمهيدية ٨-١٣. (**تمهيدية الأنبوب** tube lemma) نفرض أن X و Y فضاءان توبولوجيان حيث Y فضاء محكم. نعتبر النقطة x_0 نقطة في X. لأي جوار N في $X \times Y$ للشريحة $x_0 \times Y$ يوجد جوار مفتوح U لـ x_0 بحيث $\{x_0\} \times Y \subset U \times Y \subset N$.

البرهان: لكل نقطة $y \in Y$ يوجد جوار حاصل ضرب بحيث $(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset N$. حيث أن Y محكم، يوجد عدد منتهي من النقاط $y_1,\ldots,y_k \in Y$ بحيث $Y = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ حيث $V_i = V_{y_i}$. نضع $U = U_1 \cap \ldots \cap U_k$.

نظرية ٨-١٤. حاصل ضرب عدد منتهي من الفضاءات المحكمة يكون محكم.

البرهان: سوف نبرهن أن حاصل ضرب فضاءين محكمين يكون فضاءا محكما، ومن ثم النظرية تنتج من الاستنتاج الرياضي لحاصل ضرب عدد منتهي. نفرض أن $A_j, j \in J$ غطاء مفتوح لـ $X \times Y$. سوف

نبين أنه يوجد غطاء جزئي منتهي. لكل نقطة $x \in X$، الشريحة $\{x\} \times Y$ تكون متشاكلة مع الفضاء المحكم Y، ومن ثم $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{j \in J_x} A_j$ لمجموعة ترقيم منتهية $J_x \subset J$. من تمهيدية الأنبوب، المجموعة المفتوحة $\bigcup_{j \in J_x} A_j$ تحتوي فعليا كل الأنبوب $U_x \times Y$ لجوار ما مفتوح U_x لـ x. من الإحكام، X يمكن أن يغطي بعدد منتهي من الجوارات U_x، $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. الآن

$$X \times Y = (\bigcup_{1 \le i \le k} U_{x_i}) \times \mathrm{Y} = \bigcup_{1 \le i \le k} (U_{x_i} \times Y)$$
$$= \bigcup_{1 \le i \le k} \bigcup_{j \in J_{x_i}} A_j = \bigcup_{j \in \bigcup_{1 \le i \le k} J_{x_i}} A_j$$

حيث $\bigcup_{1 \le i \le k} J_{x_i} \subset J$ منتهية.

من الواضح أنه في هذه اللحظة ينشأ سؤال. هل حاصل ضرب عدد لا نهائي من الفضاءات المحكمة يكون محكم؟ لا شك أننا نأمل أن تكون الإجابة بنعم، وهي كذلك. هذه الخاصية هي نتيجة هامة (وصعبة جدا) لدرجة أنها سميت باسم العالم الذي برهنها، إنها نظرية تيخونوف Tychonoff Theorem. ولكن هذه النظرية خارج المستوى الذي وضع له الكتاب ولذلك لن نوردها هنا.

هناك معيار آخر لتحديد ما إذا كان الفضاء محكم، هذا المعيار تمت صياغته بدلالة المجموعات المغلقة بدلا عن المجموعات المفتوحة. أولا نعطي التعريف التالي.

تعريف ٨-١٥. التجمع $\mathcal{C}$ من المجموعات الجزئية من X يقال أنه يحقق **خاصية التقاطعات المنتهية** finite intersection property إذا كان لأي تجمع منتهي $\{C_1, \ldots, C_n\}$ من $\mathcal{C}$، التقاطع $C_1 \cap \ldots \cap C_n$ يكون غير خالي.

نظرية ٨-١٦. نفرض أن X فضاء توبولوجي. إذن X يكون محكم إذا وفقط إذا كان لأي تجمع $\mathcal{C}$ من المجموعات المغلقة في X والذي يحقق

خاصية التقاطعات المنتهية يكون له تقاطع غير خالي أي أن $\cap C$ لكل عناصر $\mathcal{C}$ يكون غير خالي.

البرهان: نعتبر التجمع $\mathcal{A}$ من مجموعات جزئية من X، ونفرض أن

$$\mathcal{C}= \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$$

هو التجمع المكون من مكملات عناصر $\mathcal{A}$. إذن العبارات التالية تكون محققة:

(١) $\mathcal{A}$ يكون تجمع من مجموعات مفتوحة إذا وفقط إذا كان $\mathcal{C}$ تجمع من مجموعات مغلقة.

(٢) التجمع $\mathcal{A}$ يكون غطاء لـ X إذا وفقط إذا كان التقاطع $\cap C$ لكل عناصر $\mathcal{C}$ هو المجموعة الخالية.

(٣) التجمع الجزئي المنتهي $\{A_1,\dots,A_n\}$ من $\mathcal{A}$ يغطي X إذا وفقط إذا كان تقاطع التجمع المناظر من العناصر $C_i = X \setminus A_i$ من $\mathcal{C}$ يكون هو المجموعة الخالية.

العبارة الأولى بديهية، بينما الثانية والثالثة تنتج من قانون دي مورجان

$$X \setminus (\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in J} (X \setminus A_\alpha)$$

برهان النظرية يكون في خطوتين يسيرتين: نأخذ المكافئ العكسي للنظرية، ومن ثم المكمل للمجموعات.

عبارة أن X يكون محكم تكافئ قولنا "إذا أعطينا تجمع $\mathcal{A}$ من مجموعات جزئية مفتوحة في X بحيث $\mathcal{A}$ تغطي X، فإنه يوجد تجمع جزئي منتهي من $\mathcal{A}$ يغطي X". هذه العبارة تكافئ المكافئ العكسي وهو " إذا أعطينا تجمع $\mathcal{A}$ من مجموعات جزئية مفتوحة في X بحيث لا يوجد تجمع جزئي من $\mathcal{A}$ يغطي X، فإن $\mathcal{A}$ لا يكون غطاء لـ X. بفرض أن $\mathcal{C}$ ، كما هو أعلى، التجمع $\{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ وتطبيق (١)-(٣)، نجد أن هذه العبارة تتحول لتكافئ العبارة التالية: "إذا أعطينا أي تجمع $\mathcal{C}$ من مجموعات جزئية مغلقة في X، بحيث أن كل تقاطع منتهي من عناصر $\mathcal{C}$ يكون غير خالي، فإن تقاطع كل عناصر $\mathcal{C}$ يكون غير خالي". وهذا هو تحديدا شرط النظرية.

حالة خاصة من هذه النظرية عندما نعتبر **متتابعة متداخلة** nested sequence من المجموعات المغلقة

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \ldots.$$

في الفضاء المحكم X. إذا كانت كل المجموعات C_n غير خالية، التجمع $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ بصورة آلية يحقق خاصية التقاطعات المنتهية، كما يمكن التحقق منه بسهولة. إذن التقاطع

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} C_n$$

يكون غير خالي.

٨-١ الفضاءات الجزئية المحكمة في الخط الحقيقي

النظريات في القسم السابق تمكننا من تكوين فضاءات جديدة محكمة من فضاءات موجودة. ولكن لكي نفعل ذلك ينبغي لنا أن يكون لدينا فضاءات محكمة لنبدأ بها. المكان الطبيعي الذي نبدأ منه هو الخط الحقيقي، سوف نبرهن أن كل فترة مغلقة في $\mathbb{R}$ تكون محكمة. كتطبيق، تعميم مناسب لنظرية القيمة المتطرفة في حساب التفاضل.

في برهان أن كل فترة مغلقة في $\mathbb{R}$ تكون محكمة، نحتاج فقط إلى خاصية واحدة من خواص الترتيب على الخط الحقيقي، وهي خاصية أصغر حد أعلى. لذلك يمكن تطبيق النظرية ليس فقط على الخط الحقيقي ولكن لأي مجموعة مرتبة ترتيبا جيدا وأي مجموعات أخرى مرتبة كذلك

نظرية ٨-١٧. نفرض أن X مجموعة مرتبة ترتيبا بسيطا لها خاصية أصغر حد أعلى. مع التوبولوجي المرتب، كل فترة مغلقة في X تكون محكمة.

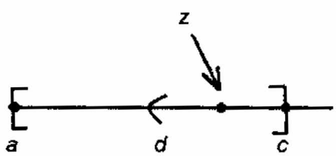
البرهان: الخطوة الأولى. نفرض أن $a<b$ ، نفرض أن $\mathcal{A}$ غطاء لـ $[a,b]$ بمجموعات مفتوحة في $[a,b]$ في الفضاء الجزئي (والذي هو نفس الشيء مثل التوبولوجي المرتب). نرغب في بيان أنه يوجد تجمع جزئي منتهي من $\mathcal{A}$ يغطي $[a,b]$. أولا نبرهن ما يلي: إذا كانت x

نقطة في $[a,b]$ تختلف عن b، فإنه توجد نقطة $y > x$ في $[a,b]$ بحيث أن الفترة $[x,y]$ يمكن أن تغطى بعنصرين على الأكثر من $\mathcal{Q}$.

إذا كانت x لها تالي مباشر في X ، نفرض أن y هو هذا التالي المباشر. إذن $[x,y]$ يتكون فقط من النقطتين x و y، ومن ثم يغطى بعنصرين على الأكثر من $\mathcal{Q}$. إذا كان x ليس لها تالي مباشر في X، نختار عنصر A في $\mathcal{Q}$ يحتوي x. لأن $x \neq b$ و A مفتوحة، A تحتوي فترة على الصورة $[x,c)$ لبعض c في $[a,b]$. نختار نقطة y في (x,c)؛ إذن الفترة $[x,y]$ تغطى بعنصر واحد A من $\mathcal{Q}$.

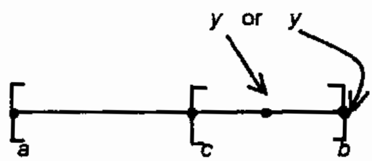
الخطوة الثانية. نفرض أن C هي مجموعة النقاط $y > a$ من $[a,b]$ بحيث أن الفترة $[a,y]$ يمكن أن تغطى بعدد منتهي من عناصر $\mathcal{Q}$. بتطبيق الخطوة الأولى للحالة $x = a$، نجد أنه يوجد على الأقل واحدة من مثل y، لذلك C ليست خالية. نفرض أن c هو أصغر حد أعلى للمجموعة C ، لذلك $a < c \leq b$.

الخطوة الثالثة. سوف نبين أن $c \in C$ ، أي نبين أن الفترة $[a,c]$ يمكن تغطيتها بعدد منتهي من عناصر $\mathcal{Q}$. نختار عنصر A من $\mathcal{Q}$ يحتوي c؛ حيث أن A مفتوحة فإنها تحتوي فترة على الصورة $(d,c]$ لبعض d في $[a,b]$. إذا كانت c لا تقع في C ، يجب أن توجد نقطة z في C تقع في الفترة (d,c)، لأنه إذا لم يكن كذلك فإن d سوف تكون حد أعلى لـ C أصغر من c . أنظر الشكل التالي



حيث أن z تكون في C، الفترة $[a,z]$ يمكن أن تغطى بعدد منتهي، ليكن n، من عناصر $\mathcal{Q}$. الآن $[z,c]$ تقع في العنصر A من $\mathcal{Q}$ ومن ثم $[a,c]=[a,z]\cup[z,c]$ يمكن أن تغطى بعدد $n+1$ من عناصر $\mathcal{Q}$. لذلك c تكون في C ، وهذا عكس الفرض.

الخطوة الرابعة. أخيرا، نبين أن $c = b$، وهذا يكمل برهان النظرية. نفرض أن $c < b$. بتطبيق الخطوة الأولى للحالة $x = c$، نستنتج أنه توجد نقطة $y > c$ في $[a,b]$ بحيث أن الفترة $[c,y]$ يمكن أن تغطى بعدد منتهي من عناصر $\mathscr{C}$. أنظر الشكل التالي.



في الخطوة الثالثة، أثبتنا أن c تكون في C، ومن ثم $[a,c]$ يمكن أن تغطى بعدد منتهي من عناصر $\mathscr{C}$. لذلك

$$[a,y] = [a,c] \cup [c,y]$$

يمكن أن تغطى بعدد منتهي من عناصر $\mathscr{C}$. هذا يعني أن y تكون في C، وهذا يناقض حقيقة أن c تكون حد أعلى لـ C.

نتيجة ٨-١٨. كل فترة مغلقة في $\mathbb{R}$ تكون محكمة.

الآن نبرهن نظرية القيمة المتطرفة في حساب التفاضل بتعميم مناسب.

نظرية ٨-١٩ (نظرية القيمة المتطرفة Extreme value theorem). نفرض أن $f : X \to Y$ دالة متصلة، حيث Y مجموعة مرتبة مع التوبولوجي المرتب. إذا كان X فضاء محكم، فإنه يوجد نقطتان c و d في X بحيث $f(c) \le f(x) \le f(d)$ لكل $x \in X$.

نظرية القيمة المتطرفة في حساب التفاضل تكون حالة خاصة من هذه النظرية تحدث عندما نأخذ X لتكون فترة مغلقة في $\mathbb{R}$ و Y لتكون $\mathbb{R}$.

البرهان: حيث أن f متصلة و X محكم، المجموعة $A = f(X)$ تكون محكمة. سوف نبين أن A يكون لها أكبر عنصر M وأصغر عنصر m. ومن ثم لكون m و M تنتمي إلى A، يجب أن يكون $m = f(c)$ و $M = f(d)$ لنقطتين c و d في X.

إذا كان A ليس لها أكبر عنصر، فإن التجمع

$$\{(-\infty, a) : a \in A\}$$

يكون غطاء مفتوح لـ A. حيث أن A محكمة، تجمع جزئي

$$\{(-\infty,a_1),\dots,(-\infty,a_n)\}$$

يغطي A . إذا كانت a_i هي أكبر عنصر في $a_1,\dots,a_n$ ، فإن a_i لا ينتمي إلى أي من هذه المجموعات، على العكس من حقيقة أنها تغطي A.

بأسلوب مماثل يبين أن A لها أصغر عنصر.

تعريف ٨-٢٠. نفرض (X,d) فضاء قياس و A مجموعة جزئية غير خالية من X. لكل $x\in X$ ، نعرف المسافة من x إلى A بالمعادلة

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a):a\in A\}$$

من السهل إثبات أنه لمجموعة A معينة، الدالة $d(x,A)$ تكون دالة متصلة في x. نفرض $x,y\in X$ ، يكون لدينا المتباينة

$$d(x,A)\le d(x,a)\le d(x,y)+d(y,a)$$

لكل $a\in A$. من ذلك ينتج أن

$$d(x,A)-d(x,y)\le \inf d(y,a)=d(y,A)$$

ومن ثم

$$d(x,A)-d(y,A)\le d(x,y)$$

نفس المتباينة تتحقق بتبديل x و y، وينتج اتصال $d(x,A)$.

تمهيدية ٨-٢١ (تمهيدية عدد ليبيج Lebesgue number lemma).
نفرض أن $\mathcal{Q}$ غطاء مفتوح لفضاء القياس (X,d). إذا كان X فضاء محكم ، فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث لكل مجموعة جزئية من X لها قطر أقل من δ ، يوجد عنصر في $\mathcal{Q}$ يحتويها.

العدد δ يسمى **عدد ليبيج** Lebesgue number للغطاء $\mathcal{Q}$.

البرهان: نفرض $\mathcal{Q}$ غطاء مفتوح لـ X. إذا كانت X نفسها عنصر في $\mathcal{Q}$، فإن أي عدد موجب يكون عدد ليبيج لـ $\mathcal{Q}$. لذلك نفرض أن X ليست عنصر في $\mathcal{Q}$.

نختار تجمع جزئي منتهي $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ من $\mathcal{A}$ يغطي X.
لكل i، نضع $C_i = X \setminus A_i$ ونعرف $f : X \to R$ بوضع $f(x)$ متوسط الأعداد $d(x, C_i)$ ، أي أن

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$$

سوف نبين أن $f(x) > 0$ لكل x. نفرض $x \in X$، نختار i بحيث $x \in A_i$. ومن ثم نختار ε بحيث أن جوار- ε لـ x يكون محتوى في A. إذن $d(x, C_i) \geq \varepsilon$ ، لذلك $f(x) \geq \varepsilon / n$.

حيث أن f متصلة، يكون لها قيمة صغرى δ ، سوف نبين أن δ هي عدد ليبيج المطلوب. نفرض أن B مجموعة جزئية من X قطرها أقل من δ. نختار نقطة x_0 من B؛ إذن B تقع في جوار- δ لـ x_0. الآن

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m)$$

حيث $d(x_0, C_m)$ هي أكبر الأعداد $d(x_0, C_i)$. إذن جوار- δ لـ x_0 يكون محتوى في العنصر $A_m = X \setminus C_m$ من الغطاء $\mathcal{A}$.

٨-٣ إحكام نقطة النهاية One point compactification

كما أشرنا في بداية الإحكام، توجد عدة صياغات لمفهوم الإحكام. الآن نعطي واحدة من هذه الصياغات. على وجه العموم هي أضعف من الإحكام، وتنطبق مع الإحكام في الفضاءات القابلة للقياس.

تعريف ٨-٢٢. الفضاء التوبولوجي X يسمى **محكم بنقطة نهاية** limit point compact إذا كان كل مجموعة جزئية لانهائية من X لها نقطة نهاية. بمفهوم ما، هذه الخاصية تكون طبيعية وبديهية أكثر من الإحكام. في الأيام الأولى للتوبولوجي، أعطيت هذه الخاصية اسم "الإحكام" compactness بينما صياغة الغطاء المفتوح كانت تسمى ""ثنائي الإحكام" bicompactness. في الأوقات المتأخرة كلمة "محكم" compact تحولت لتطبق على التعريف باستخدام الغطاء المفتوح تاركا هذه الخاصية لتبحث لها عن اسم جديد. حتى الآن لم يوجد

اسم يتفق عليه الجميع. في الخلفية التاريخية، البعض يسميها "إحكام فريشيه" Frechet compactness وآخرون يسمونها "خاصية بولزانوت فايرشتراس" Bolzano-Weierstrass property. هنا استخدمنا مصطلح "إحكام نقطة النهاية". يبدو أنه أفضل من الأسماء الأخرى، حيث أنه على الأقل يصف ماذا تعني الخاصية.

نظرية ٨-٢٣. كل فضاء توبولوجي محكم يكون محكم بنقطة نهاية والعكس غير صحيح.

البرهان: نفرض أن X فضاء توبولوجي محكم. نفرض A مجموعة جزئية من X، نرغب في برهان أنه إذا كانت A لانهائية فإنه يكون لها نقطة نهاية. سوف نبرهن ذلك باستخدام المكافئ العكسي. نفرض أن A ليس لها نقاط نهاية. إذن A تحتوي كل نقاط النهاية لها، ومن ثم A تكون مغلقة. علاوة على ذلك، لكل $a \in A$ يمكننا اختيار مجموعة مفتوحة U_a تحتوي a بحيث أن U_a تقطع A في النقطة a فقط. الفضاء X يغطى بالمجموعة المفتوحة $X \setminus A$ والمجموعات المفتوحة U_a، ولكونه محكم، يمكن تغطيته بعدد منتهي من هذه المجموعات. حيث أن $X \setminus A$ لا تقطع A، وكل مجموعة U_a تحتوي فقط نقطة واحدة من A، المجموعة A يجب أن تكون منتهية.

مثال ٨-٢٤. نفرض أن Y تتكون من نقطتين ، نعرف توبولوجي على Y يتكون من Y والمجموعة الخالية. المجموعة $X = \mathbb{Z}^+ \times Y$ تكون محكمة بنقطة نهاية، حيث كل مجموعة جزئية لانهائية من X يكون لها نقطة نهاية. هذا الفضاء غير محكم، لأن غطاء X بالمجموعات المفتوحة $U_n = \{n\} \times Y$ ليس له تجمع جزئي يغطي X.

الآن نوضح أن هذان النوعان من الإحكام يتطابقان في الفضاءات قابلة للقياس؛ من أجل هذا الهدف نقدم نوعا آخر من الإحكام يسمى إحكام المتتابعات.

تعريف ٨-٢٥. نفرض أن X فضاءا توبولوجيا. إذا كانت (x_n) متتابعة من نقاط X، و كان $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ متتابعة تزايدية من الأعداد الصحيحة الموجبة، فإن المتتابعة (y_i) المعرفة بوضع

$y_i = x_{n_i}$ تسمى **متتابعة جزئية** subsequence من المتتابعة (x_n). الفضاء X يسمى **محكم بالمتتابعات** sequentially compact إذا كان كل متتابعة من نقاط X لها متتابعة جزئية تقاربية.

نظرية ٨-٢٦. نفرض أن X فضاءا توبولوجيا قابلا للقياس. إذن العبارات التالية تكون متكافئة:

(١) X يكون محكم.

(٢) X يكون محكم بنقطة نهاية.

(٣) X يكون محكم يالمتتابعات.

البرهان: سبق أن أثبتنا أن (١) $\Leftarrow$ (٢). لإثبات أن (٢) $\Leftarrow$ (٣)، نفرض أن X فضاء محكم بنقطة نهاية. نفرض أن (x_n) متتابعة من نقاط X و نعتبر المجموعة $A = \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. إذا كانت A مجموعة منتهية، فإنه توجد نقطة x بحيث $x = x_n$ لعدد لانهائي من قيم n. في هذه الحالة، المتتابعة (x_n) لها متتابعة جزئية وهي الثابتة، وهي بداهة تقاربية. من ناحية أخرى إذا كانت A لانهائية، فإن A يكون لها نقطة نهاية x. نعرف متتابعة جزئية تتقارب إلى x كما يلي: أولا نختار n_1 بحيث يكون

$$x_{n_1} \in B(x, 1)$$

ثم نفرض أن العدد الصحيح الموجب n_{i-1} معطى. لأن الكرة $B(x, 1/i)$ تقطع A في عدد لانهائي من النقاط، يمكننا اختيار دليل $n_i > n_{i-1}$ بحيث يكون

$$x_{n_i} \in B(x, 1/i)$$

إذن المتتابعة الجزئية $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ تتقارب إلى x.

أخيرا نبرهن أن (٣) $\Leftarrow$ (١). وهو الجزء الأصعب في البرهان.

أولا، نبين أنه إذا كان X محكم بالمتتابعات، فإن تمهيدية عدد ليبيج تكون محققة لـ X. نفرض أن $\mathcal{A}$ غطاء مفتوح لـ X. نفرض أنه لا يوجد $\delta > 0$ بحيث أن كل مجموعة قطرها أقل من δ يوجد لها عنصر من $\mathcal{A}$ يحتويها، ونصل إلى تناقض.

الفرض يؤدي بصفة خاصة إلى أنه لكل عدد صحيح موجب n، يوجد مجموعه قطرها أقل من $1/n$ لا تكون محتواة في أي عنصر من $\mathscr{Q}$؛ نفرض أن C_n هي هذه المجموعة. نختار نقطة $x_n \in C_n$ ، لكل n. من الفرض، متتابعة جزئية (x_{n_i}) من المتتابعة (x_n) تتقارب إلى نقطة، لتكن a. الآن a تنتمي إلى عنصر A من التجمع $\mathscr{Q}$، لأن A مفتوحة، يمكننا اختيار $\varepsilon > 0$ بحيث أن $B(a,\varepsilon) \subset A$. إذا كان i كبير بصورة كافية بحيث $1/n_i < \varepsilon/2$ ، فإن المجموعة C_{n_i} تقع في جوار-$\varepsilon/2$ لـ x_{n_i} ؛ إذا كان i أيضا اختيرت كبيرة كبرا كافيا بحيث أن $d(x_{n_i},a) < \varepsilon/2$ فإن C_{n_i} تقع في جوار-ε لـ a. ولكن هذا يعني أن $C_{n_i} \subset A$ ، وهذا عكس الفرض.

ثانيا، نبين أنه إذا كان X محكم بالمتتابعات، فإنه لأي $\varepsilon > 0$، يوجد غطاء منتهي لـ X بكرات-ε مفتوحة. مرة أخرى، سوف نكمل ذلك بالتناقض. نفرض أنه يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن X لا يمكن تغطيتها بعدد منتهي من كرات-ε. نكون متتابعة من النقاط x_n في X كما يلي: أولا نختار x_1 على أنها أي نقطة في X. بملاحظة أن $B(x_1,\varepsilon)$ ليست كل X (وإلا X يمكن أن تغطى بكرة-ε واحدة). نختار x_2 نقطة في X ليست في $B(x_1,\varepsilon)$. على وجه العموم إذا أعطينا $x_1,\ldots,x_n$ نختار x_{n+1} نقطة ليست في الاتحاد

$$B(x_1,\varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_n,\varepsilon)$$

باستخدام حقيقة أن هذه الكرات لا تغطي X. لاحظ أنه من تكوين x_n، $d(x_{n+1},x_i) \geq \varepsilon$ لكل $i = 1,\ldots,n$. لذلك، المتتابعة (x_n) لا يمكن أن يكون لها متتابعة جزئية تقاربية، في الواقع أي كرة نصف قطرها $\varepsilon/2$ يمكن أن تحتوي x_n لقيمة واحدة n على الأكثر.

أخيرا، نبين أنه إذا كانت X محكمة بالمتتابعات فإن X تكون محكمة. نفرض أن $\mathscr{Q}$ غطاء مفتوح لـ X. حيث أن X محكم بالمتتابعات، فإن الغطاء المفتوح $\mathscr{Q}$ يكون له عدد ليبيج δ. نفرض أن

$\varepsilon = \delta/3$ ، نستخدم إحكام المتتابعات لـ X لإيجاد غطاء منتهي لـ X بكرات- ε . كل من هذه الكرات قطرها على الأكثر $2\delta/3$ ، ومن ثم تقع في عنصر من $\mathcal{Q}$. باختيار واحد من هذه العناصر من $\mathcal{Q}$ لكل كرة- ε، نحصل على تجمع جزئي منتهي من $\mathcal{Q}$ يغطي X.

الإحكام الموضعي

في هذا القسم نتعرض بالدراسة لمفهوم الإحكام الموضعي ونبرهن النظرية الأساسية وهي أن كل فضاء محكم محليا وهاوسدورف يمكن غمره في فضاء محكم هاوسدورف معين يسمى إحكام النقطة الواحدة.

تعريف ٨-٢٧. الفضاء التوبولوجي X يسمى **محكم موضعيا عند النقطة** x locally compact at إذا وجدت مجموعة جزئية محكمة C في X تحتوي جوار للنقطة x. إذا كان X محكم موضعيا عند كل نقطة من نقاطه، فإنه يسمى **محكم موضعيا** locally compact.

لاحظ أن الفضاء المحكم يكون محكم موضعيا.

مثال ٨-٢٨. خط الأعداد الحقيقية يكون محكم موضعيا. النقطة x تقع في فترة ما (a,b) ، والتي بدورها تقع داخل الفضاء الجزئي المحكم $[a,b]$. يمكن التحقق من أن الفضاء الجزئي $\mathbb{Q}$ ليس محكم موضعيا.

مثال ٨-٢٩. كل مجموعة مرتبة ترتيبا بسيطا لها خاصية أصغر حد أعلى تكون محكمة موضعيا. إذا أعطينا عنصر أساس لـ X، فإنه يكون محتوى في فترة مغلقة في X، والتي تكون محكمة.

إحكام النقطة الواحدة

اثنين من أفضل أنواع الفضاءات في التعامل معها في الرياضيات هما الفضاءات قابلة للقياس وفضاءات هاوسدورف المحكمة. مثل هذه الفضاءات لها العديد من الخواص المفيدة، والتي يمكن استخدامها في براهين النظريات وعمل تراكيب وما شابه ذلك. إذا أعطينا فضاء ليس من هذه الأنواع، الشيء التالي المفضل الذي نأمل هو أن يكون فضاء جزئي من هذه الفضاءات. بالطبع، الفضاء الجزئي من فضاء قابل للقياس يكون نفسه قابل للقياس. ولكن الفضاء الجزئي من فضاء

هاوسدورف محكم ليس بالضرورة أن يكون محكما. لذلك يظهر السؤال: تحت أي شرط يكون الفضاء متشاكل مع فضاء جزئي من فضاء هاوسدورف محكم؟ الآن نبدأ في الإجابة على هذا السؤال.

تعريف ٨-٣٠. نفرض أن X فضاء هاوسدورف محكم موضعيا. نفرض نقطة لا تنتمي إلى X ونرمز لها بالرمز ∞ ، ونضيفها إلى X لنكون المجموعة $Y = X \cup \{\infty\}$. نعرف توبولوجي على Y بأنه تجمع كل المجموعات المكونة من الأنواع التالية:

(١) كل المجموعات U المفتوحة في X،

و (٢) كل المجموعات على الصورة $Y \setminus C$ ، حيث C تكون فضاء جزئي محكم من X.

الفضاء Y يسمى **إحكام النقطة الواحدة لـ** X one point compactification of.

نحتاج إلى التحقق من أن التجمع المعرف يكون توبولوجي على Y. المجموعة الخالية هي مجموعة من النوع (١)، Y هي مجموعة من النوع (٢). بالنسبة لتقاطع مجموعتين، توجد ثلاث حالات:

$U_1 \cap U_2$ تكون من النوع (١)

$(Y \setminus C_1) \cap (Y \setminus C_2) = Y \setminus (C_1 \cup C_2)$ تكون من النوع (٢)

$U_1 \cap (Y \setminus C_1) = U_1 \cap (X \setminus C_1)$ تكون من النوع (١)،

لأن C_1 تكون مغلقة في X. بالمثل، يمكننا التحقق من أن اتحاد أي تجمع من المجموعات يكون أيضا مجموعة من هذه الأنواع:

$\bigcup U_\alpha = U$ تكون من النوع (١)

$\bigcup (Y \setminus C_\beta) = Y \setminus (\bigcap C_\beta) = Y \setminus C$ تكون من النوع (٢)

$(\bigcup U_\alpha) \bigcup (\bigcup (Y \setminus C_\beta)) = U \bigcup (Y \setminus C) = Y \setminus (C \setminus U)$ ،

وهذه تكون من النوع (٢) لأن $C - U$ يكون فضاء جزئي مغلق من C ومن ثم يكون محكم.

نظرية ٨-٣١. نفرض أن X فضاء هاوسدورف محكم موضعيا وليس محكم؛ نفرض أن Y هو إحكام النقطة الواحدة لـ X. إذن Y يكون

فضاء هاوسدورف محكم، X فضاء جزئي من Y ، المجموعة $Y \setminus X$ تتكون من نقطة واحدة و $\overline{X} = Y$.

البرهان: الآن نبين أن X يكون فضاء جزئي من Y. إذا أعطينا أي مجموعة مفتوحة في Y، نبين أن تقاطعها مع X يكون مجموعة مفتوحة في X. إذا كانت U من النوع (١)، فإن $U \cap X = U$؛ إذا كانت $Y \setminus C$ من النوع (٢)، فإن $(Y \setminus C) \cap X = X \setminus C$؛ كلا هاتان المجموعتان تكون مفتوحة في X. من جهة أخرى، أي مجموعة مفتوحة في X تكون من النوع (١) ومن ثم تكون مفتوحة في Y طبقا للتعريف.

لبيان أن Y محكم، نفرض أن $\mathscr{A}$ غطاء مفتوح لـ Y. التجمع $\mathscr{A}$ يجب أن يحتوي مجموعة مفتوحة من النوع (٢)، لتكن $Y \setminus C$ ، حيث لا توجد مجموعة مفتوحة من النوع (١) تحتوي النقطة ∞. نأخذ جميع عناصر $\mathscr{A}$ التي تختلف عن $Y \setminus C$ ونقاطعها مع X لنكون غطاء لـ C بمجموعات مفتوحة في X. حيث أن C محكمة، تجمع منتهي من هذه المجموعات يغطي C. التجمع المناظر لعناصر $\mathscr{A}$ مع $Y \setminus C$ تغطي كل Y.

لبيان أن Y يكون هاوسدورف، نفرض أن x و y نقطتان في Y. إذا كان كلا النقطتان في X، فإنه توجد مجموعتان U و V مفتوحتان في X غير متقاطعتان تحتويان النقطتان، على الترتيب. من ناحية أخرى إذا كان $x \in X$ و $y = \infty$ ، يمكننا اختيار مجموعة C محكمة في X تحتوي جوار U للنقطة x. إذن U و $Y \setminus C$ يكونا جواران في Y غير متقاطعان لـ x و ∞ ، على الترتيب.

إذا حدث أن X نفسها كانت محكمة، فإن الفضاء Y في النظرية السابقة لا تكون له أهمية كبيرة، حيث أنه حصلنا عليه بإضافة نقطة معزولة (النقطة x في الفضاء التوبولوجي X تسمى **نقطة معزولة** isolated point في X إذا كانت $\{x\}$ مجموعة مفتوحة في X). ومع ذلك إذا كانت X ليست محكمة، فإن النقطة في $Y \setminus X$ تكون نقطة نهاية لـ X، ومن ثم يكون $\overline{X} = Y$.

النظرية التالية تعطينا صياغة أخرى للإحكام الموضعي وتكون مكافئة للتعريف السابق في فضاءات هاوسدورف.

نظرية ٨-٣٢. نفرض أن X فضاء هاوسدورف. X يكون محكم موضعيا إذا وفقط إذا كان لكل نقطة $x \in X$ وكل مجموعة مفتوحة U تحتوي x، توجد مجموعة مفتوحة V تحتوي x بحيث تكون $\overline{V}$ محكمة و $\overline{V} \subset U$.

البرهان: واضح أن هذه الصياغة الجديدة تؤدي إلى الإحكام الموضعي، المجموعة $C = \overline{V}$ تكون هي المجموعة المحكمة المطلوبة التي تحتوي جوار للنقطة x. لإثبات الاتجاه العكسي، نفرض أن X فضاء محكم، و $x \in X$ و U مجموعة مفتوحة تحتوي x. نأخذ إحكام النقطة الواحدة Y لـ X ونفرض أن C هي المجموعة $Y \setminus C$. إذن C تكون مغلقة في Y، ومن ثم يكون فضاء جزئي محكم من Y. بتطبيق تمهيدية ٨-٩، نختار مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين V و W بحيث $x \in V$ و $C \subset W$. إذن إغلاق V، $\overline{V}$، في Y يكون محكم، علاوة على ذلك $\overline{V} \cap C = \phi$. لذلك $\overline{V} \subset U$، وهو المطلوب.

نتيجة ٨-٣٣. نفرض أن X فضاء هاوسدورف محكم موضعيا؛ نفرض أن Y فضاء جزئي من X. إذا كانت Y مغلقة أو مفتوحة في X، فإن Y يكون محكم موضعيا.

البرهان: نفرض أن Y مغلقة في X. نفرض أن $y \in Y$، نفرض أن C مجموعة محكمة في X تحتوي جوار U لـ y في X. إذن $C \cap Y$ تكون مغلقة في C ومن ثم تكون محكمة وتحتوي الجوار $U \cap Y$ لـ y في Y. (هنا لم نستخدم شرط هاوسدورف).

نفرض أن Y مفتوحة في X. نفرض $y \in Y$، إذن يوجد جوار V لـ y في X بحيث $\overline{V}$ يكون محكم و $\overline{V} \subset Y$. إذن $C = \overline{V}$ يكون محكم في Y يحتوي جوار V لـ y في Y.

نتيجة ٨-٣٤. الفضاء X يكون متشاكل مع مجموعة جزئية مفتوحة من فضاء هاوسدورف محكم إذا وفقط إذا كان X فضاء هاوسدورف محكم موضعيا.

البرهان: ينتج من نظرية ٨-٣٢ ونتيجة ٨-٣٣ .

تمارين ٨-١

١- نفرض أن τ و τ' توبولوجيان على المجموعة X بحيث يكون $\tau \subset \tau'$. بين مع أي توبولوجي X تكون محكمة حتى تكون محكمة مع التوبولوجي الآخر.

٢- بين أنه في توبولوجي المكملات المنتهية على $\mathbb{R}$، كل فضاء جزئي يكون محكم.

٣- بين أن اتحاد عدد منتهي من الفضاءات المحكمة يكون فضاءا محكم.

٤- نفرض أن X فضاءا توبولوجيا، بين أن X يكون محكم إذا وفقط إذا كان لأي تجمع $\{F_i\}$ من مجموعات جزئية مغلقة في X بحيث $\bigcap_i F_i = \phi$، فإنه يوجد تجمع جزئي منتهي $\{F_{i_1},...,F_{i_n}\}$ بحيث $F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_n} = \phi$.

٥- بين أنه إذا كان E مجموعة جزئية محكمة و F مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء التوبولوجي X، فإن $E \cap F$ تكون مجموعة جزئية محكمة.

٦- نفرض أن X محكم بنقطة نهاية.

(أ) إذا كانت $f : X \to Y$ دالة متصلة، هل ينتج أن $f(X)$ يكون محكم بنقطة نهاية؟

(ب) إذا كانت A مجموعة جزئية مغلقة في X فهل A تكون محكمة بنقطة نهاية؟

(ج) إذا كان X فضاء جزئي من فضاء هاوسدورف Z فهل يكون X مغلق في Z؟