الباب السابع
الترابط
Connectedness

في دراسة حساب التفاضل، توجد نظريتين أساسيتين عن الدوال المتصلة. الأولى، نظرية القيمة البينية، والتي تقول أنه إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة وكان r عدد حقيقي بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإنه يوجد عنصر $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=r$. الثانية، نظرية القيمة العظمى، والتي تقول أنه إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ متصلة، فإنه يوجد عنصر $c\in[a,b]$ بحيث $f(x)\le f(c)$ لكل $x\in[a,b]$.

هاتان النظريتان تستخدمان في عدد من المواضع. نظرية القيمة البينية تستخدم على سبيل المثال في تكوين الدوال العكسية ونظرية القيمة العظمى تستخدم في برهان نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل والتي تعتمد عليها النظريتان الأساسيتان في حساب التفاضل.

تحدثنا عن هاتان النظريتان باعتبارها نظريات عن الدوال المتصلة. ولكن أيضا يمكن اعتبارها نظريات عن الفترة المغلقة $[a,b]$ في خط الأعداد الحقيقية. النظريات لا تعتمد فقط على اتصال الدالة f ولكن أيضا تعتمد على خواص الفضاء التوبولوجي $[a,b]$.

الخاصية للفضاء $[a,b]$ التي تعتمد عليها نظرية القيمة البينية تسمى خاصية الترابط والخاصية التي تعتمد عليها نظرية القيمة العظمى تسمى الإحكام. مفهومي الترابط والإحكام تعتبر من المفاهيم الأساسية في التحليل المتقدم والهندسة المتقدمة والتوبولوجي. في هذا الباب والباب التالي سوف نعرف هاتان الخاصيتان للفضاءات التوبولوجية العامة ونبرهن تعميم مناسب لهاتين النظريتان.

٧-١ الفضاءات المترابطة Connected spaces

بداهة، الفضاء يكون مترابط إذا كان كله يتكون من قطعة واحدة، وهو ما يكافئ أن الفضاء يكون غير مترابط إذا كان يمكن كتابته كاتحاد قطعتين غير خاليتين متباعدتين. لكي نكون أكثر دقة، نحتاج إلى تحديد

ما ذا تعني كلمة " متباعدتان". على سبيل المثال، نحن نعتقد أن $\mathbb{R}$ تكون مترابطة رغم أنه يمكن كتابتها كاتحاد قطعتين منفصلتين، مثلا $\mathbb{R} = A \cup B$ حيث $A = (-\infty, 0]$ و $B = (0, \infty)$. بوضوح "متباعدة" سوف تعني شيء أكثر من "منفصلة".

من جهة أخرى، إذا حذفنا النقطة 0 لنقطع $\mathbb{R}$، ربما نعتقد أن الفضاء المتبقي $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ يكون غير مترابط. هنا يمكننا كتابة $X = A \cup B$، حيث $A = (-\infty, 0)$ و $B = (0, \infty)$. A و B مجموعتان غير خاليتان منفصلتان (ليس مثل A و B في الفقرة السابقة) هما تحققان الشروط المتكافئة التالية:

(أ) A و B مفتوحتان في X.

(ب) A و B مغلقتان في X.

(ج) $(B \cap Cl_X A) \cup (A \cap Cl_X B) = \phi$.

تعريف الترابط في الفضاء التوبولوجي هو تعديل طفيف للتعريف العادي. نقول أن الفضاء يمكن فصله إذا كان يمكن أن يقسم إلى جزأين عبارة عن مجموعتين مفتوحتين منفصلتين. وإلا نقول أن الفضاء مترابط.

تعريف ٧-١. الفضاء التوبولوجي X يسمى **مترابط** connected إذا كان لا يمكن كتابته كإتحاد $X = X_0 \cup X_1$ مجموعتين جزئيتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين X_0 و X_1.

المجموعتان A و B في الفضاء التوبولوجي X يقال أنهما **متباعدتان** separated إذا كان $A \cap \overline{B} = \phi = \overline{A} \cap B$. أي أن المجموعتان غير متقاطعتان وكل منهما لا تحتوي أي نقاط نهاية للأخرى. أي مجموعتين غير متقاطعتين مفتوحتين (أو مغلقتين) تكونا متباعدتين. إذا كان $C \subset A$ و $D \subset B$ وكان A و B متباعدتين، فإن C و D تكونا متباعدتين. **الانفصال** separation لـ X يتكون من مجموعتين جزئيتين غير خاليتين متباعدتين A و B اتحادهما $X = A \cup B$.

مثال ٧-٢.(أ) في $\mathbb{R}$، المجموعتان $A=(-\infty,0]$ و $B=(0,\infty)$ تكونا منفصلتان ولكن غير متباعدتان. بالمثل في $\mathbb{R}^2$ المجموعتان
$A=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$ و
$B=\{(x,y): (x-2)^2+y^2<1\}$
تكونا منفصلتان ولكن غير متباعدتان.

(ب) الفترتان $A=(-\infty,0)$ و $B=(0,\infty)$ في $\mathbb{R}$ منفصلتان ولكن $Cl_{\mathbb{R}}A\cap Cl_{\mathbb{R}}B\neq\phi$.

الشرط أن مجموعتان تكونا متباعدتان أقوى من كونهما منفصلتان ولكنه أضعف من قولنا أن إغلاقهما يكونا منفصلان.

نظرية ٧-٣. للفضاء التوبولوجي X، العبارات التالية تكون متكافئة:

(١) X يكون مترابط.

(٢) المجموعات الجزئية الوحيدة المفتوحة والمغلقة في آن واحد في X هي X و ϕ.

(٣) X ليس له انفصال.

(٤) كل دالة متصلة من X إلى الفضاء المتقطع $\{0,1\}$ تكون ثابتة.

البرهان: سوف نستخدم البرهان باستخدام المكافئ العكسي.

(١) $\Leftarrow$ (٢): نفرض أن $X=U_1\cup U_2$ حيث U_1 و U_2 مجموعتان غير متقاطعتان مفتوحتان وغير خاليتان. إذن U_1 تكون مجموعة جزئية فعلية من X غير خالية مفتوحة ومغلقة.

(٢) $\Leftarrow$ (٣): إذا كانت C مجموعة جزئية فعلية من X غير خالية مفتوحة ومغلقة فإن $X=C\cup(X\setminus C)$ يكون انفصال لـ X.

(٣) $\Leftarrow$ (٤): نفرض أن $X=A\cup B$، حيث A و B متباعدتان. إذن $\overline{A}\subset A$ حيث أن $\overline{A}$ لا تقطع B، لذلك A تكون مغلقة. الدالة $f: X\to\{0,1\}$ المعطاة بالصورة $f(A)=0$ و $f(B)=1$ تكون متصلة حيث أن كل المجموعات المغلقة في النطاق المصاحب لها صور عكسية مجموعات مغلقة في النطاق.

(٤) ⇐ (١): نفرض أن $f:X\to\{0,1\}$ دالة متصلة فوقية. إذن $X=f^{-1}(0)\cup f^{-1}(1)$ يكون اتحاد مجموعتين غير خاليتين غير متقاطعتين مفتوحتين في X.

نظرية ٧-٤. إذا كان X فضاء توبولوجي مترابط و $f:X\to Y$ دالة متصلة فإن $f(X)$ تكون مترابطة.

البرهان: نستخدم التكافؤ (١) و (٤) في نظرية ٧-٣. نفرض $f:X\to Y$ دالة متصلة. إذا كان $f(X)$ غير مترابط فإنه لا توجد دالة ثابتة متصلة من $f(X)$ إلى الفضاء المتقطع $\{0,1\}$ ومن ثم لا يوجد دالة ثابتة متصلة من X إلى الفضاء المتقطع $\{0,1\}$. إذن X لا يكون مترابط.

مثال ٧-٥. نفرض أن X ترمز إلى فضاء مكون من نقطتين مع التوبولوجي غير المتقطع. واضح أنه لا يوجد انفصال لـ X، ومن ثم X يكون مترابط.

مثال ٧-٦. نفرض أن Y ترمز إلى الفضاء الجزئي $[-1,0)\cup(0,1]$ من الخط الحقيقي $\mathbb{R}$. كلا المجموعتين $[-1,0)$ و $(0,1]$ تكون غير خالية ومفتوحة في Y، رغم أنها ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$، تكونان انفصال لـ Y. لاحظ أن أي من هاتين المجموعتين لا تحتوي أي نقاط نهاية للمجموعة الأخرى.

مثال ٧-٧. نفرض أن X هو الفضاء الجزئي $[-1,1]$ من الخط الحقيقي $\mathbb{R}$. المجموعتان $[-1,0]$ و $(0,1]$ غير متقاطعتان وغير خاليتان، ولكن لا تكون انفصال لـ X، لأن الأولى ليست مفتوحة في X. كخاصية بديلة لاحظ أن المجموعة الأولى تحتوي نقطة نهاية، 0، للمجموعة الثانية. في الواقع لا يوجد انفصال للفضاء $[-1,1]$.

مثال ٧-٨. الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$ ليست مترابطة، حيث يمكن كتابة $\mathbb{Q}$ كاتحاد مجموعتين غير خاليتين متباعدتين $\{q\in\mathbb{Q}:q^2<2\}$ و $\{q\in\mathbb{Q}:q^2>2\}$. في الواقع الفضاءات الجزئية الوحيدة المترابطة في $\mathbb{Q}$ هي المجموعات ذات النقطة الواحدة (الفضاء التوبولوجي الذي

فيه الفضاءات الجزئية المترابطة فقط هي المجموعات ذات النقطة الواحدة يسمى **غير مترابط على الإطلاق** (totally disconnected).
إذا كان Y فضاء جزئي من $\mathbb{Q}$ يحتوي نقطتين p و q ، يمكننا اختيار عدد غير كسري a بين p و q ونكتب Y كاتحاد المجموعتين المفتوحتين $Y \cap (-\infty, a)$ و $Y \cap (a, +\infty)$. $\mathbb{Q}$ يكون غير مترابط على الإطلاق.

مثال ٧-٩. $\mathbb{R}_l$ غير مترابط، حيث $[a,b)$ مجموعات جزئية مغلقة ومفتوحة كلما كان $a < b$. في الواقع أي مجموعة جزئية Y من $\mathbb{R}_l$ تحتوي على الأقل نقطتين $a < b$ تكون غير مترابطة حيث $Y \cap [a,b)$ تكون مغلقة ومفتوحة ولكنها لا تساوي ϕ أو X. $\mathbb{R}_l$ غير مترابط على الإطلاق.

الفضاء الجزئي من الفضاء التوبولوجي X يقال أنه مترابط إذا كان مترابط في توبولوجي الفضاء الجزئي. الفضاء الجزئي من الفضاء المترابط ليس بالضرورة أن يكون مترابط.

تمهيدية ٧-١٠ . نفرض أن X فضاء توبولوجي و $Y \subset X$. الفضاء الجزئي Y يكون مترابط إذا وفقط إذا كان لا يمكن كتابة Y كإتحاد مجموعتين غير خاليتين متباعدتين في X.

البرهان: نفرض أن $Y = Y_1 \cup Y_2$ اتحاد فضاءان جزئيان. لاحظ أن Y_1 و Y_2 تكونا متباعدتان في Y إذا وفقط إذا كانتا متباعدتان في X لأن $Cl_Y(Y_1) \cap Y_2 = Cl_X(Y_1) \cap Y \cap Y_2 = Cl_X(Y_1) \cap Y_2$. الآن التمهيدية تنتج من التكافؤ (١) و (٣) من نظرية...

تنويه ٧-١١. طبقا لتمهيدية ٧-١٠، Y تكون غير مترابطة إذا وفقط إذا كان $Y = A \cup B$ حيث A و B متباعدتان في Y إذا وفقط إذا كان $Y = A \cup B$ حيث A و B متباعدتان في X. تمهيدية ٧-١٠ تكون مهمة لأنها تعني أن ليس من المهم التمييز بين "متباعدة في Y" و "متباعدة في X" لأنهما متكافئتان. وعلى العكس من ذلك إذا قلنا أن Y تكون غير مترابطة إذا كانت Y هي اتحاد مجموعتين A و B غير خاليتين منفصلتين مفتوحتين (مغلقتين) في Y، فإن جملة "في Y" لا

يمكن حذفها لأن المجموعتين A و B قد لا تكونا مفتوحتين (مغلقتين) في X.

على سبيل المثال، نفرض أن $X = [0,1]$ و $Y = [0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]$. المجموعتان $A = (\frac{1}{2},1]$ و $B = [0,\frac{1}{2})$ تكونا مفتوحتان، مغلقتان ومتباعدتان في Y وأيضا متباعدتان في $\mathbb{R}$، حسب تمهيدية ٧-١٠ ولكن ليستا مفتوحتان أو مغلقتان في $\mathbb{R}$.

تمهيدية ٧-١٢. نفرض أن $Y \subset X$ فضاء جزئي مترابط. لأي زوج من المجموعات الجزئية A و B المتباعدة في X بحيث $Y \subset A \cup B$ يكون إما $Y \subset A$ أو $Y \subset B$.

البرهان: المجموعتان $Y \cap A$ و $Y \cap B$ تكونا متباعدتان (حيث أن المجموعتان الأكبر A و B متباعدتان) واتحادهما Y. حيث أن Y مترابط، إحدى المجموعتين يجب أن تكون خالية، مثلا $Y \cap A = \phi$، ومن ثم تكون $Y \subset B$.

نظرية ٧-١٣. نفرض أن A مجموعة جزئية مترابطة من الفضاء التوبولوجي X. إذا كان $A \subset B \subset \overline{A}$، فإن B تكون أيضا مترابطة. بمعنى أنه إذا تم تكوين B من المجموعة المترابطة A بإضافة بعض أو كل نقاط النهاية لها فإن B تكون أيضا مترابطة.

البرهان: نفرض أن A مجموعة مترابطة ونفرض $A \subset B \subset \overline{A}$. نفرض أن $B = C \cup D$ انفصال لـ B. من تمهيدية ٧-١٢، A يجب أن تقع بكاملها في C أو D، نفرض أن $A \subset C$. إذن $\overline{A} \subset \overline{C}$. حيث أن $D \cap \overline{C} = \phi$، B لا يمكن أن تقطع D. وهذا يناقض حقيقة أن D مجموعة جزئية غير خالية من B.

نظرية ٧-١٤. نفرض أن $f : X \to Y$ دالة وأن $\Gamma = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ هو رسم graph f. إذا كانت f متصلة فإن رسم f، Γ، يكون متشاكل توبولوجيا مع نطاق f، على وجه الخصوص رسم الدالة المتصلة يكون مترابط إذا وفقط إذا كان نطاقها مترابط.

البرهان: نريد بيان أن X يكون متشاكل توبولوجيا مع Γ. نفرض أن $h: X \to \Gamma$ معرف بالصورة $h(x)=(x,f(x))$. واضح أن h دالة أحادية من X فوق Γ. نفرض $a \in X$ ونفرض أن $(U \times V)\cap \Gamma$ مجموعة أساس تحتوي $h(a)=(a,f(a))$. حيث أن f متصلة و $f(a)\in V$، توجد مجموعة مفتوحة G في X تحتوي a بحيث $f(G)\subset V$. إذن $a \in U \cap G$، و $h(U\cap G)\subset (U\times V)\cap\Gamma$، ومن ثم h تكون متصلة عند a. إذا كانت U مجموعة مفتوحة في X، فإن $h(U)=(U\times Y)\cap\Gamma$ تكون مفتوحة في Γ، ومن ثم h تكون دالة مفتوحة. لذلك h يكون تشاكل توبولوجي.

نظرية ٧-١٥. نفرض أن $\{Y_j : j \in J\}$ تجمع من الفضاءات الجزئية المترابطة في الفضاء التوبولوجي X. إذا كان يوجد دليل $j_0 \in J$ بحيث أن Y_j و Y_{j_0} تكونا غير متباعدتان لكل $j \in J$ فإن $\bigcup_{j\in J} Y_j$ يكون مترابط.

البرهان: نفرض أن $f:\bigcup_{j\in J} Y_j \to \{0,1\}$ دالة متصلة. الصورة $f(Y_j)$ لكل Y_j تكون نقطة منفردة لكل $j \in J$ لأن Y_j مترابط. في الواقع $f(Y_j)=f(Y_{j_0})$ وإلا يمكن فصل Y_j و Y_{j_0} بمجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين. ومن ثم f تكون هي الدالة الثابتة.

نتيجة ٧-١٦. إتحاد أي تجمع من الفضاءات الجزئية المترابطة التي تشترك في نقطة على الأقل يكون مترابط.

البرهان: بتطبيق نظرية ٧-١٥ باعتبار أي فضاء جزئي على أنه Y_{j_0}.

نتيجة ٧-١٧. نفرض أن X فضاء توبولوجي بحيث أن كل نقطتين في X يوجد فضاء جزئي مترابط يحتويهما. إذن X يكون مترابط.

البرهان: نفرض x_0 نقطة ثابتة في X. لكل $x \in X$ نفرض أن C_x الفضاء الجزئي المترابط الذي يحتوي x و x_0. إذن $X=\cup C_x$ يكون مترابط، حيث أن $\cap C_x \neq \phi$.

نظرية ٧-١٨. حاصل الضرب الكارتيزي لفضاءات مترابطة يكون مترابط.

البرهان: سوف نبرهن النظرية أولا لحاصل ضرب فضاءين مترابطين X و Y. لأي نقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) الفضاء الجزئي $X \times \{y_1\} \cup \{x_2\} \times Y$ يحتوي النقطتين وهو مترابط لأنه اتحاد فضاءين جزئيين مترابطين مشتركين في نقطة. لذلك $X \times Y$ يكون مترابط وذلك من نتيجة ٧-١٦.

باستخدام الاستنتاج الرياضي يمكن إثبات أن حاصل الضرب الكارتيزي لأي عدد منتهي من الفضاءات المترابطة يكون مترابط.

الآن نبرهن الحالة لحاصل ضرب عدد اختياري من الفضاءات المترابطة. نفرض $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ عائلة مرقمة من الفضاءات المترابطة ونفرض

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$$

نختار نقطة أساس $b = (b_\alpha)_{\alpha \in J}$ في X.

نفرض أي مجموعة منتهية $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ من أدلة J، نعرف الفضاء الجزئي $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ من X، يتكون من النقاط $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ بحيث $x_\alpha = b_\alpha$ لـ $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. سوف نبين أن $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ يكون متشاكل مع حاصل الضرب المنتهي

$$X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \ldots \times X_{\alpha_n}$$

ومن ثم يكون مترابط. للتناظر الواضح بين هذه الفضاءات، الدالة

$$(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \rightarrow (y_\alpha)_{\alpha \in J}$$

حيث $y_\alpha = x_\alpha$ عندما $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ و $y_\alpha = b_\alpha$ لكل قيم α الأخرى، تأخذ عناصر أساس $X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \ldots \times X_{\alpha_n}$ إلى عناصر أساس $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

ينتج أن الفضاء الجزئي Y من X المكون من اتحاد هذه الفضاءات الجزئية يكون مترابط، هذا الفضاء الجزئي هو

$$Y = \cup X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

حيث الاتحاد مأخوذ على كل المجموعات الجزئية المنتهية $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ من J. حيث الفضاءات $X(\alpha_1,...,\alpha_n)$ مترابطة وجميعها تحتوي نقطة الأساس $b=(b_\alpha)_{\alpha\in J}$.
البرهان لم ينتهي بعد لأن Y ليست كل X، Y يتكون من كل النقاط $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ من X التي لها الخاصية أن $x_\alpha=b_\alpha$ لكل قيم α عدا عدد منتهي. لذلك، بأسلوب ما، Y هي فقط جزء صغير من X. ولكن سوف نبرهن أن إغلاق Y بالنسبة لتوبولوجي حاصل الضرب يساوي X. بمجرد إثبات ذلك، ترابط Y ينتج من نظرية ٧-١٣.
نعتبر نقطة اختيارية (x_α) في X، وعنصر أساس اختياري $U=\prod U_\alpha$ يحتوي (x_α) ونبرهن أن U تقطع Y. كل مجموعة U_α تكون مفتوحة في X_α و $U_\alpha=X_\alpha$ ماعدا لعدد منتهي من الأدلة، ليكن $\alpha\in\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$. نكون النقطة (y_α) في X بوضع

$$y_\alpha=\begin{cases} x_\alpha & \text{for } \alpha=\alpha_1,...,\alpha_n \\ b_\alpha & \text{for all other values of } \alpha \end{cases}$$

إذن (y_α) تكون نقطة في Y، لأنها تنتمي إلى $X(\alpha_1,...,\alpha_n)$. أيضا (y_α) تكون نقطة في U، لأن $y_\alpha=x_\alpha\in U_\alpha$ لقيم $\alpha=\alpha_1,...,\alpha_n$ و $y_\alpha=b_\alpha\in X_\alpha$ لكل قيم α الأخرى. إذن U تقطع Y كما هو مطلوب.

٧-٢ الفضاءات الجزئية المترابطة في خط الأعداد الحقيقية

النظريات في الجزء السابق تبين لنا كيفية تكوين فضاءات مترابطة جديدة من فضاءات معطاة. ولكن أين نجد الفضاءات المترابطة التي نبدأ بها؟ المكان المفضل للبداية هو خط الأعداد الحقيقية. سوف نبرهن أن $\mathbb{R}$ يكون مترابط ومن ثم تكون الفترات والأشعة في $\mathbb{R}$.
أحد التطبيقات هو تعميم مناسب لنظرية القيمة البينية في حساب التفاضل.
حقيقة أن الفترات والأشعة في $\mathbb{R}$ تكون مترابطة قد يكون مألوف للقارئ في التحليل. سوف نبرهن ذلك مرة أخرى هنا، في صورة أعم.

لقد اتضح أن هذه الحقيقة لا تعتمد على الخواص الجبرية لـ $\mathbb{R}$، ولكن فقط على خواص الترتيب. لتوضيح ذلك، سوف نبرهن النظرية لمجموعة مرتبة اختيارية لها خواص الترتيب على $\mathbb{R}$. مثل هذه المجموعة تسمى المتصل الخطي.

تعريف ٧-١٩. المجموعة المرتبة ترتيبا بسيطا L المكونة من أكثر من عنصر تسمى **متصل خطي** linear continuum إذا تحقق ما يلي:

(١) L يكون لها خاصية أصغر حد أعلى.

(٢) إذا كان $x < y$، فإنه يوجد z بحيث $x < z < y$.

نظرية ٧-٢٠. إذا كان L متصل خطي مع التوبولوجي المرتب، فإن L يكون مترابط، ومن ثم تكون الفترات والأشعة في L.

البرهان: الفضاء الجزئي Y من L يسمى محدب convex إذا كان لكل زوج من النقاط a و b في Y بحيث $a < b$، كل الفترة $[a,b]$ من نقاط Y تقع في Y. سوف نبرهن أنه إذا كانت Y فضاء جزئي محدب في L فإن Y تكون مترابطة.

نفرض أن Y تساوي إتحاد مجموعتين غير خاليتين غير متقاطعتين A و B كل منهما مفتوحة في Y. نختار $a \in A$ و $b \in B$، ونفرض أن $a < b$. الفترة $[a,b]$ من نقاط L تكون محتواة في Y. لذلك $[a,b]$ تكون اتحاد المجموعتين غير المتقاطعتين

$$A_0 = A \cap [a,b] \text{ و } B_0 = B \cap [a,b]$$

والتي كل منهما تكون مفتوحة في $[a,b]$ مع توبولوجي الفضاء الجزئي، والذي هو نفس التوبولوجي المرتب. المجموعتان A_0 و B_0 غير خاليتان لأن $a \in A_0$ و $b \in B_0$. لذلك A_0 و B_0 تكون انفصال لـ $[a,b]$.

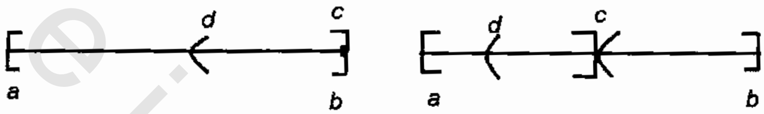
نفرض أن $c = \sup A_0$. سوف نبين أن c لا تنتمي إلى أي من A_0 و B_0، وهو ما يناقض حقيقة أن $[a,b]$ هو اتحاد A_0 و B_0.

الحالة الأولى: نفرض أن $c \in B_0$. إذن $c \neq a$، ومن ثم إما $c = b$ أو $a < c < b$. في كلا الحالتين، ينتج من حقيقة أن B_0 مفتوحة في $[a,b]$ أنه يوجد فترة على الصورة $(d,c]$ تكون محتواة في B_0. إذا

كان $c=b$، يكون لدينا تناقض، حيث d هي أصغر حد أعلى على A_0 من c. إذا كان $c<b$، نلاحظ أن $(c,b]$ لا تقطع A_0 (لأن c حد أعلى لـ A_0). لذلك

$$(d,b]=(d,c]\cup(c,b]$$

لا تقطع A_0. أيضا، d هي أصغر حد أعلى لـ A_0 من c، بعكس التكوين. أنظر الشكل التالي



الحالة الثانية: نفرض أن $c\in A_0$. إذن $c\neq b$ ، ومن ثم إما $c=a$ أو $a<c<b$. لأن A_0 مفتوحة في $[a,b]$، يجب أن يوجد فترة على الصورة $[c,e)$ محتواة في A_0. أنظر الشكل التالي

بسبب خاصية الترتيب (٢) في المتصل الخطي L، يمكننا اختيار نقطة z في L بحيث $c<z<e$. لذلك $z\in A_0$ ، وهذا عكس حقيقة أن c يكون حد أعلى لـ A_0.

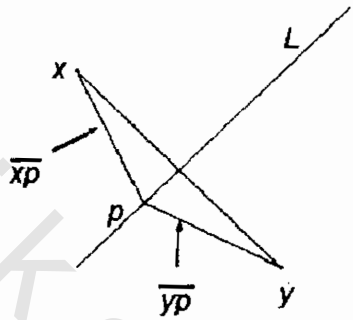
نتيجة ٧-٢١. الخط الحقيقي $\mathbb{R}$ يكون مترابط ومن ثم كل الفترات والأشعة في $\mathbb{R}$.

نتيجة ٧-٢٢. لأي $n\in\mathbb{N}$ ، $\mathbb{R}^n$ يكون مترابط.

البرهان: من نتيجة ٧-٢٢، $\mathbb{R}$ يكون مترابط. $\mathbb{R}^n$ يمكن كتابته كاتحاد خطوط مستقيمة (كل منها متشاكل توبولوجيا مع $\mathbb{R}$) تمر بنقطة الأصل ومن نتيجة ٧-١٦ $\mathbb{R}^n$ يكون مترابط.

مثال ٧-٢٣. نفرض أن C مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ قابلة للعد، حيث $n\geq 2$. إذن $\mathbb{R}^n\setminus C$ يكون مترابط. على وجه الخصوص $\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{Q}^n$ يكون مترابط. لبيان ذلك نفرض أن x و y نقطتان في $\mathbb{R}^n\setminus C$.

نختار خط مستقيم L عمودي على القطعة المستقيمة $\overline{xy}$ التي تربط x و y. لكل $p \in L$ نفرض أن C_p هي اتحاد القطعتين المستقيمتين $\overline{xp} \cup \overline{py}$. C_p تكون اتحاد فترتين بنقطة مشتركة، ومن ثم C_p تكون مترابطة.



إذا كان $p' \neq p$ فإن $C_{p'} \cap C_p = \{x, y\}$. لذلك إذا كانت $z \in C$، فإن z تنتمي على الأكثر لـ C_p واحدة. لذلك (حيث أن C قابلة للعد)، يوجد $p^* \in L$ بحيث $C_{p^*} \cap C = \phi$. إذن $x, y \in C_{p^*} \subset \mathbb{R}^n \setminus C$. نتيجة ٧-١٦ (مع $C_{xy} = C_{p^*}$) تبين أن $\mathbb{R}^n \setminus C$ تكون مترابطة.

تعريف ٧-٢٤. نفرض أن X فضاء مترابط و $p \in X$. إذا كان $X \setminus \{p\}$ غير مترابط فإن p تسمى **نقطة قطع** cut point.

إذا كان $f : X \to Y$ تشاكل توبولوجي، فمن السهل إثبات أن p تكون نقطة قطع في X إذا وفقط إذا كانت $f(p)$ نقطة قطع في Y.

نتيجة ٧-٢٥. $\mathbb{R}^n$ غير متشاكل توبولوجيا مع $\mathbb{R}$ إذا كان $n \geq 2$.

البرهان: كل نقطة في $\mathbb{R}$ تكون نقطة قطع. ولكن مثال ٧-٢٣ يوضح أن $\mathbb{R}^n$ ليس لها نقاط قطع لكل $n \geq 2$.

كتطبيق، نبرهن نظرية القيمة البينية لحساب التفاضل بتعميم مناسب.

نظرية ٧-٢٦ (نظرية القيمة البينية). نفرض أن $f : X \to Y$ راسم متصل، حيث X فضاء مترابط و Y مجموعة مرتبة مع التوبولوجي

المرتب. إذا كان a و b نقطتان في X و r نقطة في Y تقع بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإنه توجد نقطة c في X بحيث $f(c)=r$.

نظرية القيمة البينية في حساب التفاضل تكون حالة خاصة من هذه النظرية وذلك بأخذ X فترة مغلقة في $\mathbb{R}$ و Y هي $\mathbb{R}$.

البرهان: نعتبر فروض النظرية. المجموعتان

$$B = f(X)\cap(r,+\infty) \text{ و } A = f(X)\cap(-\infty,r)$$

غير متقاطعتان وغير خاليتان لأن إحداهما تحتوي $f(a)$ والأخرى تحتوي $f(b)$. كلاهما تكون مفتوحة في $f(X)$ ، لكونها تقاطع مجموعة مفتوحة في Y مع $f(X)$. إذا لم يكن يوجد نقطة c في X بحيث $f(c)=r$، فإن $f(X)$ سوف تكون اتحاد المجموعتين A و B. لذلك A و B سوف تكون فصل لـ $f(X)$، وهو ما يناقض حقيقة أن صورة الفضاء المترابط تحت تأثير الدالة المتصلة يكون مترابط.

المركبات

بصورة غير رسمية، المركبات في الفضاء X هي أكبر فضاءات جزئية مترابطة. الفضاء المترابط X يكون له مركبة واحدة تحديدا X نفسها. في الفضاء غير المترابط كليا، على سبيل المثال، المركبات تكون هي المجموعات المنفردة $\{x\}$. في الأمثلة البسيطة جدا تكون المركبات كما يمكن أن تتخيلها. في الحالات الأكثر تعقيدا يمكن أن تكون هناك أمور تثير الدهشة.

تعريف ٧-٢٧. **المركبة** C component في الفضاء X هي أكبر فضاء جزئي مترابط. أكبر فضاء جزئي مترابط تعني أن C يكون مترابط وإذا كان $C\subset D\subset X$ و D مترابط فإن $C=D$.

لأي $p\in X$ نفرض أن

$$C_p = \cup\{A : p\in A\subset X, A \text{ is connected}\}$$

إذن $\{p\}\subset C_p$. حيث أن C_p هي اتحاد مجموعات مترابطة كل منها تحتوي p، C_p تكون مترابطة. إذا كان $C_p\subset D$ وكانت D مترابطة، فإن D تكون واحدة من المجموعات A في التجمع الذي

اتحاده يعرف C_p ومن ثم $D \subset C_p$. لذلك $C_p = D$. إذن C_p تكون مركبة في X التي تحتوي p، لذلك يمكن كتابة X كاتحاد مركبات $X = \bigcup_{p \in X} C_p$.

بالطبع يمكن أن يحدث أن $C_p = C_q$ بينما $p \neq q$. على سبيل المثال في الفضاء المترابط X، $C_p = X$ لكل $p \in X$. ولكن إذا كان $C_p \neq C_q$، فإن $C_p \cap C_q = \phi$: إذا كان $x \in C_p \cap C_q$، فإن $C_p \cup C_q$ سوف تكون مجموعة مترابطة أكبر من C_p.

الفقرة السابقة توضح أن المركبات المختلفة في X تكون تجزيء لـ X. إذا عرفنا $p \sim q$ بأنها تعني أن p و q تكون في نفس المركبة في X، فإنه من السهل بيان أن "~" تكون علاقة تكافؤ على X وأن C_p هو فصل تكافؤ العنصر p.

نظرية ٧-٢٨. X تكون اتحاد مركبات. المركبات المختلفة في X تكون غير متقاطعة وكل مركبة تكون مجموعة مغلقة مترابطة.

البرهان: في ضوء الملاحظات السابقة نحتاج فقط لإثبات أن C_p تكون مغلقة. ولكن هذا يكون واضحا، حيث أن $C_p \subset \overline{C_p}$ و $\overline{C_p}$ تكون مترابطة. وكون أن C_p هو أكبر فضاء جزئي مترابط فإن $C_p = \overline{C_p}$.

من الواضح أن التشاكل التوبولوجي يرسم المركبة إلى مركبة، لذلك الفضاءات المتشاكلة توبولوجيا يكون لها نفس العدد من المركبات.

مثال ٧-٢٩.

١) نفرض أن $X = [1,2] \cup [3,4] \cup [5,6] \subset \mathbb{R}$. X لها ثلاث مركبات: $[1,2]$، $[3,4]$ و $[5,6]$. لكل $1 \leq p \leq 2$، يكون $C_p = [1,2]$. إذا كانت C مركبة في الفضاء X الذي له عدد منتهي من المركبات، فإن $X \setminus C$ تكون هي اتحاد المركبات الأخرى المغلقة التي عددها منتهي ومن ثم تكون مغلقة. لذلك C تكون مغلقة ومفتوحة.

ومع ذلك، الفضاء قد يكون له عدد لانهائي من المركبات وعلى وجه العموم ليس بالضرورة أن تكون مفتوحة. على سبيل المثال، إذا كانت

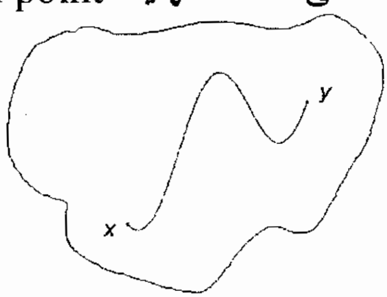
$X=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$ ، فإن المركبات تكون هي المجموعات المنفردة $\{x\}$. المركبة $\{0\}$ ليست مفتوحة في X.

٢) إذا كانت $C\subset X$ مجموعة غير خالية مترابطة مفتوحة ومغلقة، فإن C تكون مركبة في X: حيث إذا كان $\phi\neq C\subset D\subset X$ فإن C تكون مغلقة ومفتوحة في D ومن ثم إذا كانت D مترابطة فإن $C=D$.

مثال ٧-٣٠. نعتبر المجموعة $X=\{a,b,c,d,e\}$ معرف عليها التوبولوجي $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$. المركبات في X هي $\{a\}$ و $\{b,c,d,e\}$. أي مجموعة جزئية أخرى مترابطة مثل $\{b,d,e\}$ تكون مجموعة جزئية من واحدة من المركبات.

الترابط المساري

تعريف ٧-٣١. نفرض أن X فضاء توبولوجي و $x,y\in X$. **المسار** path في X من x إلى y هو دالة متصلة $f:[0,1]\to X$ بحيث يكون $f(0)=x$ و $f(1)=y$. x تسمى **نقطة البداية** للمسار initial point و y تسمى **نقطة النهاية** terminal point.



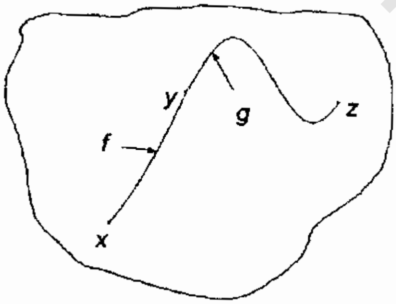
أحيانا يكون من المفيد تصور المسار على أنه نقطة تتحرك في X من $f(0)$ إلى $f(1)$ حيث $f(t)$ يمثل موضعها عند زمن $t\in[0,1]$. ومع ذلك تذكر أن المسار، من التعريف، هو الدالة f وليس المجموعة $\text{rang}(f)\subset X$. لتوضيح الفرق نفرض أن f مسار من x إلى y. الدالة $g:[0,1]\to X$ المعرفة بالعلاقة

$g(t)=f(1-t)$ تكون مسار مختلف، يتحرك في الاتجاه العكسي (من y إلى x) وعلى الرغم من ذلك $\text{rang}(f)=\text{rang}(g)$

تعريف ٧-٣٢. نعرف علاقة تكافؤ أخرى على الفضاء X بتعريف $x\sim y$ إذا كان يوجد مسار في X من x إلى y. فصول التكافؤ تسمى **مركبات مسارية** path components لـ X.

الآن نبين أن هذه تكون علاقة تكافؤ. حقيقة أن $x\sim x$ تنتج من وجود الراسم الثابت $f:[0,1]\to X$ المعرف بالعلاقة $f(t)=x$ لكل t. التماثل ينتج من حقيقة أنه إذا كان $f:[0,1]\to X$ مسار من x إلى y فإن عكس المسار $g:[0,1]\to X$ المعرف بالعلاقة $g(t)=f(1-t)$ يكون مسار من y إلى x. أخيرا، خاصية الانتقال تبرهن كما يلي: نفرض أن $f:[0,1]\to X$ مسار من x إلى y و $g:[0,1]\to X$ مسار من y إلى z. نعرف $h:[0,1]\to X$ كما يلي

$$h(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$



(يمكننا أن نتخيل أن النقطة تتحرك بضعف السرعة أولا على طول المسار f من x إلى y ثم على طول المسار g من y إلى z).

الدالة h تكون متصلة وذلك من تمهيدية اللصق. أيضا $h(0)=f(0)=x$ و $h(1)=g(1)=z$ ومن ثم h يكون مسار في X من x إلى z.

تعريف ٧-٣٣. الفضاء التوبولوجي X يسمى **مترابط مساريا** path connected إذا كان لكل نقطتين $x, y \in X$ يوجد مسار في X من x إلى y.

ملاحظة ٧-٣٤. X يسمى **مترابط قوسيا** arcwise connected، إذا كان لكل نقطتين $x, y \in X$ يوجد تشاكل توبولوجي $f : [0,1] \to X$ بحيث يكون $f(0) = x$ و $f(1) = y$. مثل هذا المسار يسمى **قوس** arc. إذا كان المسار f في فضاء هاوسدورف ليس قوسا، فإن السبب يجب أن يكون أن f ليس أحادي. يمكن إثبات أن فضاء هاوسدورف X يكون مترابط مساريا إذا وفقط إذا كان X مترابط قوسيا. لذلك بعض الكتب تستخدم التعبير مترابط قوسيا لتعني به نفس الشيء مثل مترابط مساريا.

نظرية ٧-٣٥. الفضاء المترابط مساريا يكون مترابط.

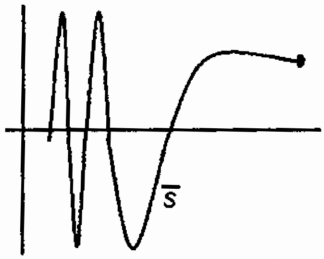
البرهان: نفرض أن $X = A \cup B$ فصل لـ X. نفرض أن $f : [0,1] \to X$ أي مسار في X. لكونها صورة متصلة لمجموعة مترابطة، المجموعة $f([0,1])$ تكون مترابطة، ومن ثم تقع بكاملها إما في A أو في B. ومن ثم لا يوجد مسار في X يربط بين نقطة من A ونقطة من B، على عكس الفرض بأن الفضاء مترابط مساريا.

عكس هذه النظرية ليس صحيحا كما يتضح من المثال التالي.

مثال ٧-٣٦. نفرض أن S ترمز إلى المجموعة الجزئية التالية من المستوى

$$S = \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) : 0 < x \le 1\}$$

حيث أن S هي صورة المجموعة المترابطة $(0,1]$ تحت تأثير دالة متصلة، S تكون مترابطة. لذلك، إغلاقها $\overline{S}$ في $\mathbb{R}^2$ يكون أيضا مترابط. المجموعة $\overline{S}$ هي مثال تقليدي في التوبولوجي يسمى **توبولوجي منحنى الجيب** topologist's sine curve. هذه المجموعة موضحة في الشكل التالي. هي تساوي إتحاد S مع الفترة الرأسية $0 \times [-1,1]$. سوف نوضح أن $\overline{S}$ ليست مترابطة مساريا.



نفرض أنه يوجد مسار $f:[a,c]\to\overline{S}$ يبدأ من نقطة الأصل وينتهي عند نقطة في S. مجموعة قيم t حيث $f(t)\in 0\times[-1,1]$ تكون مغلقة، لذلك يكون لها عنصر أكبر b. إذن $f:[b,c]\to\overline{S}$ يكون مسار يرسم b إلى الفترة الرأسية $0\times[-1,1]$ وترسم باقي نقاط $[b,c]$ إلى نقاط في S.

للملائمة نستبدل $[b,c]$ بالفترة $[0,1]$. نفرض أن $f(t)=(x(t),y(t))$. إذن $x(0)=0$ بينما $x(t)>0$ و $y(t)=\sin(\frac{1}{x(t)})$ لكل $t>0$. سوف نبين أنه توجد متتابعة من النقاط $t_n\to 0$ بحيث $y(t_n)=(-1)^n$. لذلك المتتابعة $y(t_n)$ لا تتقارب، وهذا يتناقض مع اتصال f.

لإيجاد t_n نجري ما يلي: إذا أعطينا n، نختار u، حيث $0<u<x(\frac{1}{n})$ بحيث $\sin\frac{1}{u}=(-1)^n$. ومن ثم نستخدم نظرية القيمة البينية لإيجاد t_n حيث $0<t_n<\frac{1}{n}$ بحيث $x(t_n)=u$.

مثال ٧-٣٧. نعرف كرة الوحدة B^n في $\mathbb{R}^n$ بالمعادلة

$$B^n=\{x:\|x\|\le 1\}$$

حيث $\|x\|=\|(x_1,\dots,x_n)\|=(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$.

كرة الوحدة تكون مترابطة مساريا: لأي نقطتين x و y في B^n، مسار الخط المستقيم $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ المعرف بالصورة

$f(t)=(1-t)x+ty$ يقع في B^n. حيث

إذا كان x و y في B^n و t في $[0,1]$ فإن

$$\|f(t)\| \le (1-t)\|x\| + t\|y\| \le 1$$

بمناقشة مماثلة يمكن بيان أن كل كرة مفتوحة $B_d(x,\varepsilon)$ وكل كرة مغلقة $\overline{B}_d(x,\varepsilon)$ في $\mathbb{R}^n$ تكون مترابطة مساريا.

الترابط الموضعي

الترابط يكون خاصية مفيدة للفضاءات التي تمتلكها. ولكن لبعض الأغراض، يكون من الأكثر أهمية للفضاء أن يحقق الترابط موضعيا. الترابط الموضعي يعني أن كل نقطة اختيارية في الفضاء يكون لها جوار صغير مترابط. بصورة أكثر دقة نعتبر التعريف التالي:

تعريف ٧ـ٣٨. الفضاء التوبوبوجي X يسمى **مترابط موضعيا عند** x locally connected at، إذا كان لكل مجموعة مفتوحة U تحتوي x توجد مجموعة مفتوحة مترابطة V تحتوي x بحيث $V \subset U$.
الفضاء X يسمى **مترابط موضعيا** locally connected إذا كان مترابط موضعيا عند كل نقطة من نقاطه.

مثال ٧ـ٣٩. كل فضاء توبولوجي متقطع يكون مترابط موضعيا. حيث إذا كانت $x \in X$ فإن $\{x\}$ تكون مجموعة مفتوحة مترابطة تحتوي x ومحتواة في أي مجموعة مفتوحة تحتوي x.

نظرية ٧ـ٤٠. الفضاء التوبولوجي X يكون مترابط موضعيا إذا وفقط إذا كان لأي مجموعة مفتوحة U في X، كل مركبة في U تكون مجموعة مفتوحة في X.

البرهان: نفرض أن X مترابط موضعيا، و U مجموعة مفتوحة في X ونفرض أن C مركبة في U. إذا كانت x نقطة في C، يمكننا اختيار مجموعة مفتوحة مترابطة V بحيث $x \in V \subset U$. حيث أن V مترابطة يجب أن تقع بكاملها داخل C. لذلك C تكون مجموعة مفتوحة في X.

تمارين ٧-١

١- بين أنه إذا كان A و B مجموعتان متباعدتان غير خاليتان فإن $A \cup B$ يكون غير مترابط.

٢- نفرض أن $G \cup H$ هو انفصال لـ A. بين أن $A \cap G$ و $A \cap H$ تكون مجموعات متباعدة.

٣- نفرض أن τ و τ' توبولوجيان على المجموعة X بحيث يكون $\tau \subset \tau'$. بين مع أي توبولوجي تكون X مترابطة بحيث يؤدي ذلك إلى ترابط X مع التوبولوجي الآخر.

٤- نفرض أن $\{A_n\}$ متتابعة من الفضاءات الجزئية المترابطة من الفضاء X، بحيث $A_n \cap A_{n+1} \neq \phi$ لكل n. بين أن $\bigcup A_n$ يكون مترابط.

٥- نفرض أن $\{A_\alpha\}$ تجمع من الفضاءات الجزئية المترابطة من الفضاء X ونفرض أن A فضاء جزئي مترابط من X. بين أنه إذا كان $A \cap A_\alpha \neq \phi$ لكل α ، فإن $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ يكون مترابط.

٦- بين أنه إذا كانت X مجموعة لانهائية فإنها تكون مترابطة مع توبولوجي المكملات المنتهية.

٧- بين أنه إذا كان X هو الفضاء المتقطع فإنه يكون غير مترابط كليا. هل العكس يكون صحيحا؟

٨- صف صراحة كل الفضاءات المتقطعة المترابطة.

٩- صف صراحة كل الفضاءات غير المترابطة المكونة من نقطتين فقط.

١٠- هل $\mathbb{Q}$ مع توبولوجي الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}$ يكون مترابط؟ نفس السؤال مع $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

١١- بين أن المجموعة $[0,1] \cup (2,3]$ تكون غير مترابطة في $\mathbb{R}$.

١٢- نفرض أن A و B مجموعتان مترابطتان بحيث $A \cap \overline{B} \neq \phi$. برهن أن $A \cup B$ تكون مترابطة.

١٣- هل ترابط $A \cup B$ و $A \cap B$ يؤدي إلى ترابط A و B ؟

١٤- نفرض أن X فضاء مترابط و $f : X \to \mathbb{R}$ دالة متصلة. برهن على أن $f(X)$ يكون فترة في $\mathbb{R}$.