معادلات النقل

5.1- مقدمة

بما أنّ البلازما مؤلفة من عدد كبير من الجسيمات فإنه من غير المعقول تتبع سلوك كلٍّ من هذه الجسيمات على حدة. إنّ الانتقال من الدراسة الميكروسكوبية إلى الدراسة الماكروسكوبية هي ضرورة قد وضحت في الفصول السابقة عبر تعريف توابع إحصائية تأخذ بالحسبان السلوك الكلي لكل صنف من أصناف الجسيمات.

وكتقريب أول، سمح تعريف الوسطاء الأساسية للبلازما (الفصل الأول) بتحديد مجال العمل على البلازما الحركية الكلاسيكية.

لقد تم شرح التصادمات بين جسيمين (في الفصل الثاني) وذلك لتنبيه القارئ لأهمية الظواهر المرنة، وغير المرنة، والتفاعلية. والمقطع الفعال التفاضلي المعرف عبر عدد الجسيمات المارة في الاتجاهين θ و φ بعد الصدم، ما هو إلاّ مقدار فيزيائي ميكروسكوبي ناتج عن دراسة إحصائية لمجموع الجسيمات. في حين أنّ المقطع الفعال الكلي يفقد جزءاً من المعلومات الخاصة بالجسيمات لأنه لا يأخذ بالحسبان إلاّ طويلة سرعاتها النسبية.

لقد أظهرت لنا دراسة مختلف الآليات الموجودة في البلازما (الحركية، الإثارة، التفكك، التأين، الإصدار الفوتوني)، أن كلاً منها يمكن وصفه بتابع إحصائي (الفصل الثالث). هذا المسعى في المعالجة الاحتمالية للجسيمات تتفادى الدراسة الفردية لكل جسيم (الدراسة الميكروسكوبية). إنّ توازن كل آلية هو عبارة عن حالة تكون فيها الاحتمالية أعظمية مما يسمح بتعريف درجة حرارة مجموع الجسيمات ذات العلاقة بهذه الآلية: فهناك درجة الحرارة الحركية

للتصادمات المرنة، ودرجة حرارة للإثارة من أجل التصادمات غير المرنة، ودرجتا حرارة التفكك أو التأين للآليات التفاعلية ودرجة حرارة الإشعاع من أجل الظواهر الإشعاعية.

كما أنّ حالة التوازن الترموديناميكي الكلي (C.T.E) تجعل معرفة سلوك البلازما أكثر شمولية، إذ إن وقوع جميع المقادير الفيزيائية الإحصائية في حالة التوازن يسمح بتعريف درجة حرارة توازن وحيدة لجميع الآليات المدروسة. وأحد هذه التوابع الإحصائية، تابع التوزع الموضعي (3.2) الذي يؤدي دوراً مهماً في وصف حالة التوازن الحركي للجملة. تعطي معادلة بولتزمان الميكروسكوبية (3.34) تطور التابع $f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)$ في الفراغ والزمن لكل صنف من أصناف الجسيمات K الواقعة في حالة الإثارة i. وتتعلق الحلول بالتصادمات (الطرف الأيمن من معادلة بولتزمان)، حيث تؤمن هذه التصادمات نقل الطاقة اللازمة بين الجسيمات للوصول إلى حالة التوازن المستقر.

إنّ دراسة العمليات الأولية (الفصل الرابع)، يؤمن الانتقال من الحالة الميكروسكوبية إلى الحالة الماكروسكوبية. ويعرف كل من معامل الصدم وتواتره انطلاقاً من شروط التوازن للمجموع (.C.L.T.E أو .C.T.E) ومن المقطع الفعال الكلي. هذه المقادير الماكروسكوبية تعتبر أساس السلوك الوسطي للتصادمات بين الجسيمات. فالعمليات الأولية (الخاصة) تسمح بإقامة توازن في كثافة الأصناف كتابع للزمن (معدل الصدم)، ويعني هذا تحديد الظواهر الأساسية غير المرنة والتفاعلية الحساسة التي يمكن أن تغير عدد الجسيمات من صنف معين موضعياً.

إلى هذه الآليات التي تؤدي إلى خلق وإفناء الجسيمات بالتصادمات غير المرنة أو التفاعلية، تجب إضافة مفاعيل الانتثار الناتجة عن التصادمات المرنة، إذ إن هذه التصادمات المرنة لا تغير من طبيعة جسيمات الصنف الواحد، ولكنها تؤدي إلى توازن كل صنف تغيير طاقتها وذلك بتغيير مسار الجسيمات. يمكن استنتاج هذه المفاعيل بحل معادلة بولتزمان الميكروسكوبية وحساب العزوم المتتالية لتابع التوزع الموضعي لكل صنف من أصناف الجسيمات، وهذا يعني

حساب القيم المتوسطة للمقادير الميكروسكوبية، أي العبور من المقادير الميكروسكوبية إلى المقادير الماكروسكوبية عبر تابع التوزع الموضعي $f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)$. هذه المعالجة تؤدي إلى جملة من المعادلات المعروفة بمعادلات النقل (للجسيمات، وللمادة، وللشحنة، وللاندفاع، وللطاقة...)، حيث ترتبط هذه المعادلات ببعضها عبر حدود الصدم (ولا سيما أن معادلات انحفاظ كل صنف من أصناف الجسيمات ترتبط ببعضها بعضاً بآليات الخلق والإفناء في عدد الجسيمات وذلك بالتفاعل أو الانتثار). في هذا الوصف الماكروسكوبي، يفقد مفهوم الصدم الفردي معناه بسبب التحليل الشامل للبلازما عن طريق المقادير المتوسطة. وبناءً عليه، فإنّ حدود الصدم ستعرف من وجهة نظر ماكروسكوبية باستخدام المقادير المعرفة في الفصل الرابع (تواترات التصادم ومعاملاته) بالإضافة إلى معاملات النقل المُعرَّفة في هذا الفصل (معاملات الانتثار).

5.2- معادلات النقل

5.2.1- المقادير المتوسطة من أجل توزع ماكسويل-بولتزمان

لنفرض بأنّ البلازما موجودة ضمن وعاء مغلق، درجة حرارة جدرانه ثابتة وقيمتها T. عند بلوغ حالة التوازن الترموديناميكي يكون توزع سرعات الجسيمات معطى بتوزع ماكسويل - بولتزمان (الفقرة 3.3.1).

بغية الحصول على معلومات ماكروسكوبية حول كل صنف من أصناف الجسيمات، يتوجب حساب المقادير المتوسطة التي توصفها. وبشكل عام، تكون هذه المقادير توابع للسرعة (السرعة، الاندفاع، الطاقة الحركية، ...). ويكتب متوسط التابع $<\psi(\vec{w})>$ للسرعة الميكروسكوبية $\vec{w}$ (3.49) [36] على النحو التالي:

$$< \psi(\vec{w}) >= \iiint \psi(\vec{w})\, d^3P_S \qquad (5.1)$$

حيث d^3P_S هو احتمال وجود جسيم يقع شعاع سرعته ما بين $\vec{w}$ و $\vec{w}+d\vec{w}$، ومن أجل توزع ماكسويل - بولتزمان $f_0(w)$ (3.70) يكون لدينا (3.48):

$$d^3P_S = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mw^2/2kT} d^3 w \qquad (5.2)$$

ومنه نستنتج القيمة المتوسطة $<\psi(\vec{w})>_o$ للتابع $\psi(\vec{w})$ ، المأخوذة على تابع التوزع $f_o(w)$:

$$<\psi(\vec{w})>_o = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \iiint \psi(\vec{w}) e^{-mw^2/2kT} d^3w \qquad (5.3)$$

عندما يكون التابع $\psi(\vec{w})$ هو السرعة الميكروسسكوبية (أي شعاع $\vec{w}$) يكون لدينا:

$$<\vec{w}>_o = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \iiint \vec{w}\, e^{-mw^2/2kT} d^3w \qquad (5.4)$$

أي:

$$<\vec{w}>_o = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \sum_{j=1}^{3} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} w_j e^{-mw_j^2/2kT} d w_j\right) \vec{u}_j \qquad (5.5)$$

حيث w_j هي مركبة للشعاع $\vec{w}$ ، و $\vec{u}_j$ هو شعاع الوحدة. ومنه نجد أنّ:

$$<\vec{w}>_o = 0 \qquad (5.6)$$

إذ إن البلازما توجد في حالة توازن ترموديناميكي ضمن وعاء مغلق (لا يوجد أي حركة جماعية للبلازما) مما يطابق النتائج التي تم الحصول عليها في الفقرة 3.3.1 (3.52).

عندما يكون التابع $\psi(w)$ متعلقاً بطويلة السرعة الميكروسكوبية w فقط، يمكن أن نكتب عندئذ أيضاً (إذا اعتبرنا أنّ الوسط متناحياً) أنَّ:

$$<\psi(w)>_o = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} \psi(w) e^{-mw^2/2kT} w^2 d w \qquad (5.7)$$

نجد منه أنّ القيمة المتوسطة للسرعة (طويلة السرعة الميكروسكوبية) بفرض أنّ:

$$\psi(w) = w \qquad (5.8)$$

هي [35,11,1]:

$$<\vec{w}>_o = \left(\frac{8\,kT}{\pi\, m}\right)^{1/2} \qquad (5.9)$$

كما يمكن أن نحصل على الطاقة الحركية المتوسطة بفرض أنّ:

$$\psi(w) = \frac{1}{2} m w^2 \tag{5.10}$$

ومنه [35,11,1]:

$$< \frac{1}{2} m w^2 >_o = \frac{3}{2} kT \tag{5.11}$$

مما يعني أنّ هناك توزعاً متساوياً للطاقة (3.68).

يمكن إذاً أن تعرف السرعة التربيعية المتوسطة:

$$\sqrt{< w^2 >_o} = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2} \tag{5.12}$$

كما يسمح هذا بحساب الانحراف التربيعي المتوسط لسرعات الجسيمات أي متوسط مربعات الفروق:

$$< (\Delta w)^2 >_o = < w^2 >_o - < w >_o^2 \tag{5.13}$$

يقيس هذا المقدار التبدد المتوسط للسرعات بالنسبة للمتوسط $< w >_o$.

اعتماداً على (5.9) و (5.12) نجد:

$$< (\Delta w)^2 >_o = 0,45 \frac{kT}{m} \tag{5.14}$$

نلاحظ أنّ هذا الفرق يزداد كلما ازدادت درجة الحرارة، مما ينتج عنه ازدياد عرض منحني توزع السرعات الممكنة على نصف ارتفاعه (الشكل 3.3 بسبب التهيج الحراري.

أمّا السرعة الأكثر احتمالاً فيمكن حسابها عندما يكون التوزع dP_S / dw (3.71) الذي هو توزع ماكسويل-بولتزمان أعظمياً، أي:

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{dP_S}{dw}\right)\Bigg|_{w_p} = 0 \tag{5.15}$$

ومنه نجد [11,1]:

$$w_p = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \tag{5.16}$$

ومنه فإنّ القيمة الأعظمية للتابع (3.71):

$$\left(\frac{dP_S}{dw}\right)\Bigg|_{w_p} = \frac{1}{e}\left(\frac{8m}{\pi kT}\right)^{1/2} \qquad (5.17)$$

تجدر الإشارة هنا، إلى أنه عند ازدياد درجة الحرارة، فإنّ السرعة الأكثر احتمالاً w_p تزداد قيمتها في حين أنّ القيمة الأعظمية للتابع dP_S/dw تتناقص (أي إن تابع توزع السرعات يزداد عرضه وتنخفض قمته الشكل 3.3). كل هذا هو نتيجة التهيج الحراري الذي مع تزايد سرعات الجسيمات، يساهم وسطياً في تقويض تنظيم الوسط. يؤدي هذا أيضاً إلى تناقص الترابطات بين الجسيمات في البلازما (الفصل الأول)، حيث يتناقص الوسيطان Λ_e (1.96) و v_c (1.102) عندما ترتفع درجة الحرارة. بمقارنة النتائج السابقة ((5.9)، (5.12) و (5.16)) يتم الحصول دوماً على المتراجحة [11]:

$$w_p < \; < w >_o < \sqrt{< w^2 >_o} \qquad (5.18)$$

مما يعني أن توزع ماكسويل-بولتزمان بالسرعات غير متناظر بالنسبة لقيمته العظمى (الشكل 3.3).

5.2.2 المقادير المتوسطة لأي توزع

إنّ تعريف القيمة المتوسطة المعطاة في (5.1) يمكن توسيعه ليشمل أي توزع موضعي، حيث يمكن أن نكتب انطلاقاً من (3.23):

$$d^3P_S = \frac{1}{n(\vec{r},t)} f(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3 w \qquad (5.19)$$

حيث إنّ d^3P_S يمثل احتمال وجود جسيم بسرعة واقعة بين $\vec{w}$ و $\vec{w}+d\vec{w}$ في النقطة $\vec{r}$ وفي اللحظة t (3.48).

ليكن $\psi^{(m)}(\vec{w})$ تابعاً ما للسرعة الميكروسكوبية $\vec{w}$ (حيث إنّ m هي قوة السرعة $\vec{w}$ في عبارة التابع $\psi^{(m)}(\vec{w})$)، ومنه يكون (5.1):

$$< \psi^{(m)}(\vec{w}) > = \frac{1}{n(\vec{r},t)} \iiint \psi^{(m)}(\vec{w})\; f(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3 w \qquad (5.20)$$

من أجل الصنف K الواقع في حالة الإثارة i، يكون متوسط التابع $\psi^{(m)}_{Ki}(\vec{w})$ للصنف الواحد:

$$< \psi_{Ki}^{(m)}(\vec{w}) > = \frac{1}{n_{Ki}(\vec{r},t)} \iiint \psi_{Ki}^{(m)}(\vec{w}) \; f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3 w \qquad (5.21)$$

يمكن أن نحصل على المتوسط بالنسبة لجميع الأصناف الموجودة في البلازما بملاحظة أن الكثافة العددية الكلية تعطى بالعلاقة:

$$n(\vec{r},t) = \sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t) \qquad (5.22)$$

ومنه يعطي المتوسط [48,33] على النحو:

$$< \psi^{(m)}(\vec{w}) > = \frac{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t) < \psi_{Ki}^{(m)}(\vec{w}) >}{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t)} \qquad (5.23)$$

لنحسب القيم المتوسطة للتابعين $\psi_{Ki}^{(o)}(\vec{w})$ و $\psi_{Ki}^{(1)}(\vec{w})$ ، باستخدام التعريفين (5.21) و (5.23). يكتب التابع من المرتبة الصفرية بالنسبة للسرعة الميكروسكوبية على الشكل:

$$\psi_{Ki}^{(o)}(\vec{w}) = 1 \qquad (5.24)$$

بملاحظة أنّ لدينا (3.23):

$$n_{Ki}(\vec{r},t) = \iiint f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3 w \qquad (5.25)$$

نجد أنّ (5.21):

$$< \psi_{Ki}^{(o)}(\vec{w}) > = 1 \qquad (5.26)$$

ومنه (5.23):

$$< \psi^{(o)}(\vec{w}) > = 1 \qquad (5.27)$$

أمّا التابع من المرتبة الأولى فيمكن التعبير عنه بشكلين بالنسبة للسرعة الميكروسكوبية $\vec{w}_{Ki}$ ، وكل من هذين الشكلين يمكننا من حساب سرعة متوسطة للمجموعة في غاية الأهمية من أجل التوصيف الماكروسكوبي للبلازما.

ليكن الشكل الأول:

$$\psi_{Ki}^{(1)}(\vec{w}) = \vec{w}_{Ki} \qquad (5.28)$$

ومنه تكون السرعة المتوسطة (5.21):

$$< \psi_{Ki}^{(1)}(\vec{w})>=<\vec{w}_{Ki}> = \frac{1}{n_{Ki}(\vec{r},t)}\iiint \vec{w}_{Ki} f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t) d^3w \tag{5.29}$$

تجدر الإشارة إلى أنه على عكس توزع ماكسويل- بولتزمان (5.6)، فإنّ $<\vec{w}_{Ki}>$ لا يساوي الصفر، إذ إن هذا المقدار يخص صنفاً واحداً من الجسيمات تابع توزعها $f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)$ يمكن أن يكون أي تابع. ومنه نستنتج أن السرعة المتوسطة للمجموعة هي $\vec{u}_o$ (5.23):

$$< \psi^{(1)}(\vec{w}) >= \vec{u}_o = \frac{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t) < \vec{w}_{Ki} >}{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t)} \tag{5.30}$$

ويكتب الشكل الثاني للتابع $< \psi_{Ki}^{(1)}(\vec{w}) >$:

$$\psi_{Ki}^{(1)'}(\vec{w}) = m_K \, \vec{w}_{Ki} \tag{5.31}$$

والاندفاع المتوسط الكلي (5.21):

$$\psi_{Ki}^{(1)'}(\vec{w}) = < m_K \, \vec{w}_{Ki} > = \frac{1}{n_{Ki}(\vec{r},t)} \iiint m_K \, \vec{w}_{Ki} \, f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t) \, d^3 w \tag{5.32}$$

وعليه يكون الاندفاع المتوسط للجملة (5.23):

$$< \psi^{(1)'}(w) > = \frac{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t) < m_K \vec{w}_{Ki} >}{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t)} \tag{5.33}$$

يمكن أن نحصل على السرعة الاندفاعية المتوسطة للجملة، بفرض أنّ:

$$\vec{v}_o = \frac{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t) < m_K \vec{w}_{Ki} >}{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t) \, m_K} \tag{5.34}$$

حيث إنّ المقام يمثل الكتلة الكلية في واحدة الحجم المعرفة بالعلاقة:

$$n\,m = \sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t)\,m_K \qquad (5.35)$$

إنّ السرعتين $\vec{u}_o$ و $\vec{v}_o$ اللتين جرى تعريفهما ترتبطان ببعضهما البعض عن طريق وسيط سرعة الجسيمات (الذاتية):

$$\vec{V}_{Ki} = \vec{w}_{Ki} - \vec{v}_o \qquad (5.36)$$

حيث تمثل $\vec{V}_{Ki}$ الفرق بين السرعة الميكروسكوبية $\vec{w}_{Ki}$ والسرعة الاندفاعية المتوسطة للمجموعة $\vec{v}_o$.

بأخذ القيمة المتوسطة لطرفي المعادلة (5.36)، نجد:

$$< \vec{V}_{Ki} > = < \vec{w}_{Ki} > - \vec{v}_o \qquad (5.37)$$

باستخدام العلاقة (5.34)، نلاحظ أن الاندفاع الكلي الجسيمي (أي الفرق بالنسبة لمتوسط المجموعة) ذو قيمة متوسطة معدومة، أي:

$$\sum_{K,i} n_{Ki} m_K < \vec{V}_{Ki} > = \sum_{K,i} n_{Ki} m_K < \vec{w}_{Ki} > - \vec{v}_o \sum_{K,i} n_{Ki} m_K \qquad (5.38)$$

بتعويض $< \vec{w}_{Ki} >$ (5.37) في عبارة $\vec{u}_o$ (5.30)، نجد أنّ:

$$\vec{u}_o = \vec{v}_o + \frac{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t) < \vec{V}_{Ki} >}{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t)} \qquad (5.39)$$

حيث إنّ:

$$\vec{v}_d = \frac{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t) < \vec{V}_{Ki} >}{\sum_{K,i} n_{Ki}(\vec{r},t)} \qquad (5.40)$$

هي السرعة المتوسطة لانجراف المجموعة، ونحصل في النهاية على (5.39):

$$\vec{v}_d = \vec{u}_o - \vec{v}_o \qquad (5.41)$$

5.2.3- العزوم الأولى لتابع التوزع

انطلاقاً من العبارة العامة $\psi_{Ki}^{(m)}(\vec{w})$ (تابع السرعة الميكروسكوبية $\vec{w}_{Ki}$) التي عرفت في الفقرة 5.2.2، يُعرَّف العزم من المرتبة m لتابع التوزع $f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)$ بالعلاقة [49,9,1]:

$$n_{Ki}(\vec{r},t) < \psi_{Ki}^{(m)}(\vec{w}) >= \iiint \psi_{Ki}^{(m)}(\vec{w})\ f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3 w \qquad (5.42)$$

إنّ هذه العزوم من المراتب المتتالية تعبِّر من أجل كل صنف من أصناف الجسيمات عن مقادير فيزيائية مميزة للبلازما (كالكثافة، والاندفاع، والضغط الحركي، وتدفق الطاقة الحرارية،...). إنّ كل عزم يكافئ (بواحدات $n_{Ki}(\vec{r},t)$) متوسط $\psi_{Ki}^{(m)}(\vec{w})$ على السرع الميكروسكوبية (5.21).

إنّ الكثافة العددية للصنف K في حالة الإثارة i معطاة بالعزم من المرتبة صفر (5.24):

$$\psi_{Ki}^{(o)}(\vec{w})=1$$

أي (5.25):

$$n_{Ki}(\vec{r},t) = \iiint f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3 w$$

في حين أنّ الاندفاع المتوسط في واحدة الحجم ينتج من العزم من المرتبة الأولى (5.31):

$$\psi_{Ki}^{(1)'}(\vec{w})=m_k \vec{w}_{Ki}$$

ومنه (5.32):

$$n_{Ki}(\vec{r},t) < m_K\ \vec{w}_{Ki} > = \iiint m_K\ \vec{w}_{Ki}\ f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3 w \qquad (5.43)$$

أمّا الضغط الحركي $\vec{\Pi}_{Ki}$ (تنسور tensor من المرتبة الثانية) فنحصل عليه من العزم من المرتبة الثانية:

$$\psi_{Ki}^{(2)}(\vec{w})=m_K(\vec{w}_{ki}-\vec{v}_o)(\vec{w}_{ki}-\vec{v}_o) \qquad (5.44)$$

أي:

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}_{Ki} &= n_{Ki}(\vec{r},t) < m_K(\vec{w}_{ki}-\vec{v}_o)(\vec{w}_{ki}-\vec{v}_o) > \\ &= \iiint m_K(\vec{w}_{ki}-\vec{v}_o)(\vec{w}_{ki}-\vec{v}_o) f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t) d^3 w\end{aligned} \qquad (5.45)$$

إنّ هذا المقدار الذي له أبعاد طاقة في واحدة الحجم يُعبّر عن التهيج الحراري للصنف المعتبر (وهو يتعلق بالسرعة الجسيمية $\vec{V}_{Ki}$ (5.36) التي تقيس فرق السرع الميكروسكوبية بالنسبة للسرعة المتوسطة الاندفاعية للمجموعة (5.34)).

يعطى تدفق الطاقة الحرارية $\vec{Q}_{Ki}$ (تنسور من المرتبة الثالثة) بالعزم من المرتبة الثالثة:

$$\psi_{Ki}^{(3)}(\vec{w}) = m_K (\vec{w}_{ki} - \vec{v}_o)(\vec{w}_{ki} - \vec{v}_o)(\vec{w}_{ki} - \vec{v}_o) \tag{5.46}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{Ki} &= n_{Ki}(\vec{r},t) < m_K (\vec{w}_{Ki} - \vec{v}_o)(\vec{w}_{Ki} - \vec{v}_o)(\vec{w}_{Ki} - \vec{v}_o) > \\ &= \iiint m_K (\vec{w}_{Ki} - \vec{v}_o)(\vec{w}_{Ki} - \vec{v}_o)(\vec{w}_{Ki} - \vec{v}_o)\; f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3 w \end{aligned} \tag{5.47}$$

ولهذا التنسور أبعاد تدفق الطاقة نفسها.

5.2.4- معادلات النقل للجسيمات

الصيغة العامة

يُحصل على معادلات النقل للجسيمات بأخذ العزوم المتتالية لمعادلة بولتزمان، أي بضرب المعادلة (3.13) بـ $\psi_{Ki}^{(m)}(\vec{w})$ ثم بمكاملتها على السرعات. وبغية تسهيل كتابة هذه المعادلة يكتب كل من $f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)$ ، $n_{Ki}(\vec{r},t)$ ، $\psi_{Ki}^{(m)}(\vec{w})$ على الشكل f_{Ki} ، n_{Ki} ، $\psi_{Ki}^{(m)}$. ومنه [33 , 9 , 1]:

$$\iiint \psi_{ki}^{(m)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}_{Ki}.\vec{\nabla}_r + \frac{\vec{F}_{Ki}}{m_K}.\vec{\nabla}_w \right) f_{ki} d^3 w = \iiint \psi_{ki}^{(m)} \left(\frac{\partial f_{Ki}}{\partial t} \right)_c d^3 w \tag{5.48}$$

إنّ مكاملة المعادلة (5.48) تجري بالتجزئة التي تدخل فيها مشتقات جزئية بالنسبة للزمن والمكان والسرعة. يجب الانتباه إلى أنّ هناك خاصة معينة ناتجة عن تعريف القيمة الوسطية (5.21): هي أنّ التابع $\psi_{Ki}^{(m)}$ لا يتعلق إلاّ بالسرعة الميكروسكوبية $\vec{w}_{Ki}$ ، ومشتقاته بالنسبة للزمن أو المكان تكون معدومة؛ في حين أن القيمة المتوسطة $<\psi_{Ki}^{(m)}>$ لا تتعلق بالسرعة (تكامل على جميع السرع)،

ولكن تتعلق بالمكان والزمن بسبب تعريف التوزع الموضعي f_{Ki} الذي يتعلق بكل من t , $\vec{w}$,$\vec{r}$.

يمكن التعبير عن كل حد من (5.48) باستخدام التعريف (5.21) للقيمة المتوسطة. ويكتب الحد الأول:

$$\iiint \psi_{Ki}^{(m)} \frac{\partial f_{Ki}}{\partial t} d^3w = \frac{\partial}{\partial t} \iiint \psi_{Ki}^{(m)} f_{Ki} d^3w - \iiint \frac{\partial \psi_{Ki}^{(m)}}{\partial t} f_{Ki} d^3w \qquad (5.49)$$

أي:

$$\iiint \psi_{Ki}^{(m)} \frac{\partial f_{Ki}}{\partial t} d^3w = \frac{\partial}{\partial t}\left[n_{Ki} < \psi_{Ki}^{(m)} >\right] - n_{Ki} < \frac{\partial \psi_{Ki}^{(m)}}{\partial t} > \qquad (5.50)$$

في حين أنَّ الحد الثاني يكتب:

$$\iiint \psi_{Ki}^{(m)} \vec{w}_{Ki} . \vec{\nabla}_r f_{Ki} \, d^3w = \sum_{j=1}^{3} \iiint \psi_{Ki}^{(m)} w_{Ki(j)} \frac{\partial f_{Ki}}{\partial r_{(j)}} d^3w \qquad (5.51)$$

حيث $w_{Ki(j)}$ و $r_{(j)}$ هما بالترتيب مركبتان لـ $\vec{w}_{Ki}$ و $\vec{r}$ ، ومنه:

$$\begin{aligned}\iiint \psi_{Ki}^{(m)} \vec{w}_{Ki} . \vec{\nabla}_r f_{Ki} d^3w = \sum_{j=1}^{3} \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial r_{(j)}} \iiint \psi_{Ki}^{(m)} w_{Ki(j)} f_{Ki} d^3w \\ & - \iiint \frac{\partial}{\partial r_{(j)}} \left[\psi_{Ki}^{(m)} w_{Ki(j)}\right] f_{Ki} d^3w \Bigg\}\end{aligned} \qquad (5.52)$$

أي:

$$\begin{aligned}&\iiint \psi_{Ki}^{(m)} \vec{w}_{Ki} . \vec{\nabla}_r f_{Ki} \, d^3w \\ &= \sum_{j=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_{(j)}} \left[n_{Ki} < \psi_{Ki}^{(m)} w_{Ki(j)} >\right] - n_{Ki} < w_{Ki(j)} \frac{\partial \psi_{Ki}^{(m)}}{\partial r_{(j)}} > \right\}\end{aligned} \qquad (5.53)$$

حيث لا يتعلق $w_{Ki(j)}$ بالموضع $r_{(j)}$.

أمّا الحد الثالث فيكتب:

$$\iiint \psi_{Ki}^{(m)} \frac{\vec{F}_{Ki}}{m_K} . \vec{\nabla}_w f_{Ki} d^3w = \sum_{j=1}^{3} \iiint \psi_{Ki}^{(m)} \frac{F_{Ki(j)}}{m_K} \frac{\partial f_{Ki}}{\partial w_{Ki(j)}} d^3w \qquad (5.54)$$

حيث F_{Ki} هو مركبة لـ $\vec{F}_{Ki}$ ، ومنه يُكتب:

$$\iiint \psi_{Ki}^{(m)} \frac{\vec{F}_{Ki}}{m_K} \cdot \vec{\nabla}_w f_{Ki} d^3w = \sum_{j=1}^{3} \left\{ \iiint \frac{\partial}{\partial w_{Ki(j)}} \left[\psi_{Ki}^{(m)} \frac{F_{Ki(j)}}{m_K} f_{Ki} \right] d^3w \right. \tag{5.55}$$

$$\left. - \iiint \frac{\partial}{\partial w_{Ki(j)}} \left[\psi_{Ki}^{(m)} \frac{F_{Ki(j)}}{m_K} \right] f_{Ki} d^3w \right\}$$

بفرض:

$$d^3w = dw_{Ki(j)}\, d^2w \tag{5.56}$$

حيث d^2w يمثل عنصراً تفاضلياً من الدرجة الثانية على المركبات الأخرى، ويصبح الجزء الأول من (5.55) على النحو:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial w_{Ki(j)}} \left[\psi_{Ki}^{(m)} \frac{F_{Ki(j)}}{m_K} f_{Ki} \right] d^3w = \iint \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\left[\psi_{Ki}^{(m)} \frac{F_{Ki(j)}}{m_K} f_{Ki} \right] \right\} d^2w \tag{5.57}$$

إنّ التكامل (5.57) معدوم، لأنّ:

$$\psi_{Ki}^{(m)} \frac{F_{Ki(j)}}{m_K} f_{Ki} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \tag{5.58}$$

(عندما تكون السرعة لا نهائية فإنّ تابع التوزع $f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)$ ينعدم من أجل $w_{Ki(j)} = \pm\infty$ لكي يكون للكثافة $n_{Ki}(\vec{r},t)$ المعرفة بالمعادلة (5.25) قيمة منتهية دائماً).

ضمن هذه الشروط يختصر الحد الثالث إلى (5.55):

$$\iiint \psi_{Ki}^{(m)} \frac{\vec{F}_{Ki}}{m_K} \cdot \vec{\nabla}_w f_{Ki} d^3w = -\sum_{j=1}^{3} \frac{n_{Ki}}{m_K} < \frac{\partial}{\partial w_{Ki(j)}} \left[\psi_{Ki}^{(m)} F_{Ki(j)} \right] > \tag{5.59}$$

أمّا حد التصادم فيكتب (5.50):

$$\iiint \psi_{Ki}^{(m)} \left(\frac{\partial f_{Ki}}{\partial t} \right)_c d^3w = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[n_{Ki} < \psi_{Ki}^{(m)} > \right] - n_{Ki} < \frac{\partial \psi_{Ki}^{(m)}}{\partial t} > \right\}_c \tag{5.60}$$

بتجميع النتائج من كل من المعادلات (5.50)، (5.53)، (5.59) و (5.60) تصبح المعادلة العامة (5.48) على الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[n_{Ki} < \psi_{Ki}^{(m)} >\right] - n_{Ki} < \frac{\partial \psi_{Ki}^{(m)}}{\partial t} > + \sum_{j=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial r_{(j)}}\left[n_{Ki} < \psi_{Ki}^{(m)} w_{Ki(j)} >\right]\right.$$

$$\left. - n_{Ki} < w_{Ki(j)} \frac{\partial \psi_{Ki}^{(m)}}{\partial r_{(j)}} > - \frac{n_{ki}}{m_K} < \frac{\partial}{\partial w_{Ki(j)}}\left[\psi_{Ki}^{(m)} F_{Ki(j)}\right] > \right\} \tag{5.61}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[n_{Ki} < \psi_{Ki}^{(m)} >\right] - n_{Ki} < \frac{\partial \psi_{Ki}^{(m)}}{\partial t} >\right\}_c$$

معادلة النقل للجسيمات

يُحصل على معادلة النقل للجسيمات من الصنف K الواقعة في حالة الإثارة i [33,32, 1] بأخذ العزم من المرتبة الصفرية ((5.24) و (5.26)) للمعادلة (5.61):

$$\psi_{Ki}^{(o)} = 1$$

$$< \psi_{Ki}^{(o)} > = 1$$

ومنه يستنتج أنَّ:

$$\frac{\partial \psi_{Ki}^{(o)}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_{Ki}^{(o)}}{\partial r_{(j)}} = 0 \tag{5.62}$$

$$\frac{\partial \psi_{Ki}^{(o)}}{\partial w_{Ki(j)}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial w_{Ki(j)}}\left[\psi_{Ki}^{(o)} F_{Ki(j)}\right] = 0$$

وذلك بفرض أنَّ القوة $F_{Ki(j)}$ لا تتعلق بالسرعة $w_{Ki(j)}$. يكون (5.61):

$$\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t} + \vec{\nabla}_r \cdot \left[n_{Ki} < \vec{w}_{Ki} >\right] = \left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t}\right)_c \tag{5.63}$$

حيث إنَّ الطرف الأيمن هو حد الصدم (منابع الجسيمات ومفاقيدها) للصنف K في حالة الإثارة i.

بإجراء الجمع على جميع الأصناف وحالات الإثارة في (5.63) نستنتج إذا أخذنا بالحسبان (5.22) و (5.30) أنَّ:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}_r.(n\vec{u}_o) = 0 \qquad (5.64)$$

هذه المعادلة هي معادلة الانحفاظ الكلي لمجموع الجسيمات التي تشكل البلازما، حيث إنّ حد التصادم معدوم (بشكل عام توازن حدود التصادم مع بعضها).

بضرب المعادلة (5.63) بـ m_K وبإجراء الجمع على K و I يُحصل باستخدام التعريفين (5.34) و (5.35) على:

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\,m) + \vec{\nabla}_r.(n\,m\vec{v}_o) = 0 \qquad (5.65)$$

في هذه الحالة يكون حد التصادم الكلي معدوماً أيضاً، وتبقى الكتلة الكلية في واحدة الحجم محفوظة من أجل مجموعة الجسيمات التي تشكل البلازما.

تجدر الإشارة إلى أنّ معادلة الانحفاظ لمجموعة الجسيمات (5.64) تتعلق بالسرعة المتوسطة $\vec{u}_o$ للمجموعة في حين أنّ معادلة انحفاظ الكتلة الكلية في واحدة الحجم (5.65) تتعلق بالسرعة المتوسطة الاندفاعية للمجموعة $\vec{v}_o$.

معادلة الانتقال لكمية الحركة

تستنتج معادلة النقل للاندفاع للصنف K في حالة الإثارة i [33, 32, 1] من المعادلة (5.61) باستخدام العزم من الدرجة الأولى ((5.31) و (5.32)):

$$\psi_{Ki}^{(1)'} = m_K \vec{w}_{Ki}$$

$$< \psi_{Ki}^{(1)'} > = \frac{1}{n_{Ki}} \iiint m_K\, \vec{w}_{Ki}\, f_{Ki}\, d^3w$$

ومنه يُحصل على:

$$\frac{\partial \psi_{Ki}^{(1)'}}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial \psi_{Ki}^{(1)'}}{\partial r_{(j)}}=0 \qquad (5.66)$$

$$\frac{\partial \psi_{Ki}^{(1)'}}{\partial w_{Ki(j)}}=m_K$$

$$\frac{\partial}{\partial w_{Ki(j)}}\left[\psi_{Ki}^{(1)'} F_{Ki(j)}\right]=m_K F_{Ki(j)}$$

وذلك بفرض أنّ القوة $F_{Ki(j)}$ لا تتعلق بالسرعة $w_{Ki(j)}$.

بتعويض العبارات (5.66) في (5.61)، يتم إيجاد معادلة النقل للاندفاع:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[n_{Ki}<m_K \vec{w}_{Ki}>\right]+\vec{\nabla}r.\left[n_{Ki}<m_K \vec{w}_{Ki}\vec{w}_{Ki}>\right] \qquad (5.67)$$
$$-n_{Ki}\vec{F}_{Ki}=\left[\frac{\partial}{\partial t}(n_{Ki}<m_K \vec{w}_{Ki}>)\right]_c$$

حيث يمثل الطرف الأيمن حد الصدم (منابع ومفاقيد الاندفاع) للصنف K في حالة التهيج i.

ننشر الحد الأول في (5.67) على النحو:

$$m_K<\vec{w}_{Ki}>\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t}+n_{Ki}m_K\frac{\partial}{\partial t}<\vec{w}_{Ki}>+\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}m_K<\vec{w}_{Ki}\vec{w}_{Ki}>\right] \qquad (5.68)$$
$$-n_{Ki}\vec{F}_{Ki}=\left[\frac{\partial}{\partial t}(n_{Ki}m_K<\vec{w}_{Ki}>)\right]_c$$

بالتعبير عن $\partial n_{Ki}/\partial t$ انطلاقاً من معادلة النقل للجسيمات (5.63)، يكون:

$$-m_K<\vec{w}_{Ki}>\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}<\vec{w}_{Ki}>\right]+n_{Ki}m_K\frac{\partial}{\partial t}<\vec{w}_{Ki}>$$
$$+\vec{\nabla}_r\left[n_{Ki}m_K<\vec{w}_{Ki}\vec{w}_{Ki}>\right]-n_{Ki}\vec{F}_{Ki} \qquad (5.69)$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial t}(n_{Ki}m_K<\vec{w}_{Ki}>)\right]_c-m_K<\vec{w}_{Ki}>\left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t}\right)_c$$

باختصار حد الصدم وبنشر التسور من الدرجة الثانية $\vec{w}_{Ki}\vec{w}_{Ki}$ يستنتج أنَّ (5.36):

$$-m_K <\vec{w}_{Ki}>\vec{\nabla}_r.[n_{Ki}<\vec{w}_{ki}>]+n_{Ki}m_K\frac{\partial}{\partial t}<\vec{w}_{Ki}> \\ +\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}m_K<\vec{v}_o\vec{v}_o+\vec{v}_0\vec{V}_{Ki}+\vec{V}_{Ki}\vec{v}_o+\vec{V}_{Ki}\vec{V}_{Ki}>\right] \\ -n_{Ki}\vec{F}_{Ki}=\left[n_{Ki}m_K\frac{\partial}{\partial t}<\vec{w}_{Ki}>\right]_c \tag{5.70}$$

وباستخدام تنسور الضغط الحركي (5.45):

$$\vec{\Pi}_{Ki}=n_{Ki}<m_K\vec{V}_{Ki}\vec{V}_{Ki}> \tag{5.71}$$

نجد أنّ:

$$n_{Ki}m_K\frac{\partial}{\partial t}<\vec{w}_{Ki}>-m_K<\vec{w}_{Ki}>\vec{\nabla}_r.[n_{Ki}<\vec{w}_{Ki}>] \\ +\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}m_K<\vec{v}_o\vec{v}_o+\vec{v}_o\vec{V}_{Ki}+\vec{V}_{Ki}\vec{v}_o>\right] \\ +\vec{\nabla}_r.\vec{\Pi}_{Ki}-n_{Ki}\vec{F}_{ki}=\left[n_{Ki}m_K\frac{\partial}{\partial t}<\vec{w}_{Ki}>\right]_c \tag{5.72}$$

وبملاحظة أنه لدينا:

$$\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}m_K<\vec{v}_o\vec{v}_o+\vec{v}_o\vec{V}_{Ki}+\vec{V}_{Ki}\vec{v}_o>\right] \\ =\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}m_K<\vec{v}_o\vec{w}_{Ki}+\vec{V}_{Ki}\vec{v}_o>\right] \\ =n_{Ki}m_K\vec{v}_o.\vec{\nabla}_r<\vec{w}_{Ki}>+<\vec{w}_{Ki}>\vec{\nabla}_r.(n_{Ki}m_K\vec{v}_o) \\ +n_{Ki}m_K<\vec{V}_{Ki}>.\vec{\nabla}_r\vec{v}_o+\vec{v}_o\vec{\nabla}_r.(n_{Ki}m_K<\vec{V}_{Ki}>) \tag{5.73}$$

نجد بعد الاختصار وبعد إدخال السرعة الجسيمية (5.36):

$$n_{Ki}m_K\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}_o.\vec{\nabla}_r\right)<\vec{w}_{Ki}>+n_{Ki}m_K<\vec{V}_{Ki}>.\vec{\nabla}_r\vec{v}_o \\ -<\vec{V}_{Ki}>\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}m_K<\vec{V}_{Ki}>\right]+\vec{\nabla}_r.\vec{\Pi}_{Ki}-n_{Ki}\vec{F}_{ki} \\ =\left(n_{Ki}m_K\frac{\partial}{\partial t}<\vec{w}_{Ki}>\right)_c \tag{5.74}$$

بأخذ مجموع (5.74) بالنسبة لكل الأصناف K وحالات الإثارة i، يستنتج باستخدام (5.35) و (5.38):

$$
\begin{aligned}
& nm\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}_o.\vec{\nabla}_r\right)\vec{v}_o+\sum_{K,i} n_{Ki}m_K\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}_o.\vec{\nabla}_r\right)<\vec{V}_{Ki}> \\
& -\sum_{K,i}<\vec{V}_{Ki}>\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}m_K<\vec{V}_{Ki}>\right]+\vec{\nabla}_r.\vec{\Pi}-\sum_{K,i} n_{Ki}\vec{F}_{Ki} \\
& =\sum_{K,i}\left(n_{Ki}m_K\frac{\partial}{\partial t}<\vec{w}_{Ki}>\right)_c
\end{aligned}
\tag{5.75}
$$

حيث:

$$\vec{\Pi}=\sum_{K,i}\vec{\Pi}_{Ki} \tag{5.76}$$

حيث إنّ $\vec{\Pi}$ هو تنسور الضغط الحركي من أجل مجموعة أصناف الجسيمات K وحالات الإثارة i.

بملاحظة أنّ:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}_o.\vec{\nabla}_r \tag{5.77}$$

وهو المشتق الذي يلحظ الحركة على مجموعة الجسيمات، ومنه يصبح الحد الثاني من (5.75):

$$\sum_{K,i}n_{Ki}m_K\frac{d}{dt}<\vec{V}_{Ki}>=\sum_{K,i}\frac{d}{dt}(n_{Ki}m_K<\vec{V}_{Ki}>)-\sum_{K,i}m_K<\vec{V}_{Ki}>\frac{dn_{Ki}}{dt} \tag{5.78}$$

و إذا أخذت العلاقة (5.38) أيضاً بالحسبان يكون:

$$\sum_{K,i}n_{Ki}m_K\frac{d}{dt}<\vec{V}_{Ki}>=-\sum_{K,i}m_K<\vec{V}_{Ki}>\frac{dn_{Ki}}{dt} \tag{5.79}$$

ويكون لدينا أيضاً باستخدام معادلة النقل للجسيمات (5.63):

$$
\begin{aligned}
\frac{dn_{Ki}}{dt}&=\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t}+\vec{v}_o.\vec{\nabla}_r n_{Ki} \\
&=-\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}<\vec{w}_{Ki}>\right]+\left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t}\right)_c+\vec{v}_o.\vec{\nabla}_r n_{Ki}
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

يصبح الحد الثاني من (5.75) بعد ملاحظة (5.79):

$$
\begin{aligned}
& \sum_{K,i}n_{Ki}m_K\frac{d}{dt}<\vec{V}_{Ki}>=\sum_{K,i}m_K<\vec{V}_{Ki}>\vec{\nabla}_r.\left[n_{Ki}<\vec{w}_{Ki}>\right] \\
& -\sum_{K,i}m_K<\vec{V}_{Ki}>\left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t}\right)_c-\sum_{K,i}m_K<\vec{V}_{Ki}>\vec{v}_o.\vec{\nabla}_r.n_{Ki}
\end{aligned}
\tag{5.81}
$$

يكتب مجموع الحدين الثاني والثالث في المعادلة (5.75)، باستخدام التعريف (5.36):

$$\sum_{K,i} n_{Ki} m_K \frac{d}{dt} < \vec{V}_{Ki} > - \sum_{K,i} < \vec{V}_{Ki} > \vec{\nabla}_r . \left[n_{Ki} m_K < \vec{V}_{Ki} > \right]$$
$$= \sum_{K,i} m_K < \vec{V}_{Ki} > \vec{\nabla}_r . \left(n_{Ki} \vec{v}_o \right) - \sum_{K,i} m_K < \vec{V}_{Ki} > \left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t} \right)_c \qquad (5.82)$$
$$- \sum_{K,i} m_K < \vec{V}_{Ki} > \vec{v}_o . \vec{\nabla}_r n_{Ki}$$

بملاحظة أنّ:

$$\vec{v}_o . \vec{\nabla}_r n_{Ki} = \vec{\nabla}_r . \left(n_{Ki} \vec{v}_o \right) - n_{Ki} \vec{\nabla}_r . \vec{v}_o \qquad (5.83)$$

يختصر المجموع (5.82) إلى:

$$\sum_{K,i} n_{Ki} m_K \frac{d}{dt} < \vec{V}_{Ki} > - \sum_{K,i} < \vec{V}_{Ki} > \vec{\nabla}_r . \left[n_{Ki} m_K < \vec{V}_{Ki} > \right]$$
$$= - \sum_{K,i} m_K < \vec{V}_{Ki} > \left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t} \right)_c + \sum_{K,i} n_{Ki} m_K < \vec{V}_{Ki} > \vec{\nabla}_r . \vec{v}_o \qquad (5.84)$$

أو من (5.38) يكون أيضاً:

$$\sum_{K,i} n_{Ki} m_K \frac{d}{dt} < \vec{V}_{Ki} > - \sum_{K,i} < \vec{V}_{Ki} > \vec{\nabla}_r . \left[n_{Ki} m_K < \vec{V}_{Ki} > \right]$$
$$= - \sum_{K,i} m_K < \vec{V}_{Ki} > \left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t} \right)_c \qquad (5.85)$$

وبتعويض هذه النتيجة في معادلة النقل للاندفاع (5.75)، يكون:

$$nm \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_o . \vec{\nabla}_r \right) \vec{v}_o + \vec{\nabla}_r . \vec{\Pi} - \sum_{K,i} n_{Ki} \vec{F}_{Ki}$$
$$= \sum_{K,i} m_K < \vec{V}_{Ki} > \left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t} \right)_c + \sum_{K,i} \left(n_{Ki} m_K \frac{\partial}{\partial t} < \vec{w}_{Ki} > \right)_c \qquad (5.86)$$

ويكتب حد الصدم:

$$\sum_{K,i} m_K < \vec{V}_{Ki} > \left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t}\right)_c + \sum_{K,i}\left(n_{Ki} m_K \frac{\partial}{\partial t} < \vec{w}_{Ki} >\right)_c$$

$$= \sum_{K,i}\frac{\partial}{\partial t}\left(n_{Ki} m_K < \vec{V}_{Ki} >\right)_c - \sum_{K,i} n_{Ki} m_K \left(\frac{\partial}{\partial t} < \vec{V}_{Ki} >\right)_c \qquad (5.87)$$

$$+ \sum_{K,i} n_{Ki} m_K \left(\frac{\partial}{\partial t} < \vec{w}_{Ki} >\right)_c$$

ومنه باستخدام (5.36) و (5.38) يستنتج:

$$\sum_{K,i} m_K < \vec{V}_{Ki} > \left(\frac{\partial n_{Ki}}{\partial t}\right)_c + \sum_{K,i}\left(n_{Ki} m_K \frac{\partial}{\partial t} < \vec{w}_{Ki} >\right)_c = \left(n m \frac{\partial \vec{v}_o}{\partial t}\right)_c \qquad (5.88)$$

تمثل العلاقة (5.88) المحصلة الكلية لنقل الاندفاع بالتصادم المرن ضمن البلازما من أجل جميع الأصناف وجميع حالات الإثارة. ويكون هذا الحد معدوماً كلياً، ومنه (5.86):

$$nm\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_o . \vec{\nabla}_r\right)\vec{v}_o + \vec{\nabla}_r . \vec{\Pi} - \sum_{K,i} n_{Ki}\vec{F}_{Ki} = 0 \qquad (5.89)$$

وهي معادلة نافيه - ستوكس Navier - Stokes.

معادلة النقل لعزوم من مرتبة أعلى

انطلاقاً من تحليل النتائج السابقة، سوف نبرهن بأنه بالإمكان تعريف عزم من المرتبة m، أياً كانت m. فمن أجل المراتب الأولى يكتب التابع المولّد $\psi_{Ki}^{(m)}$ كما يلي:

- في المرتبة الصفرية (5.24):

$$\psi_{Ki}^{(0)} = 1$$
$$\psi_{Ki}^{(0)'} = m_K$$

- في المرتبة الأولى ((5.28) و (5.31)):

$$\psi_{Ki}^{(1)} = \vec{w}_{Ki}$$
$$\psi_{Ki}^{(1)'} = m_K \vec{w}_{Ki}$$

- في المرتبة الثانية (5.44):

$$\psi_{Ki}^{(2)} = m_K(\vec{w}_{Ki} - \vec{v}_o)(\vec{w}_{Ki} - \vec{v}_o)$$

- في المرتبة الثالثة (5.46):

$$\psi_{Ki}^{(3)}=m_K(\bar{w}_{Ki}-\bar{v}_o)(\bar{w}_{Ki}-\bar{v}_o)(\bar{w}_{Ki}-\bar{v}_o)$$

ومنه نعرف التابع $\psi_{Ki}^{(m)}$ انطلاقاً من $\psi_{Ki}^{(m-1)}$ بفرض أنّ [56]:

$$\psi_{Ki}^{(m)}=(\bar{w}_{Ki}-\bar{v}_o)\psi_{ki}^{(m-1)} \tag{5.90}$$

وعليه يكون الشكل العام:

$$\psi_{Ki}^{(m)}=m_K(\bar{w}_{Ki}-\bar{v}_o)^m \tag{5.91}$$

حيث إنّ $\psi_{Ki}^{(m)}$ هو تنسور من المرتبة m.

ويعطى العزم بحسب تابع التوزع على الشكل (5.42):

$$n_{Ki} < \psi_{Ki}^{(m)} > = \iiint m_K\left(\bar{w}_{Ki} - \bar{v}_o\right)^m f_{Ki}\, d^3w \tag{5.92}$$

ومنه يكون بالإمكان، من حيث المبدأ، أن يستنتج من معادلة بولتزمان الميكروسكوبية (3.13) المعادلات الماكروسكوبية لجميع العزوم المتتالية. تجدر الإشارة إلى أنّ جملة المعادلات هذه ليست مغلقة مما لا يسمح بحلها حلاً كلياً، يجب إذاً استخدام تقريبات بحسب الحالة الفيزيائية المدروسة.

وتعطي معادلات النقل التي تم اشتقاقها (من أجل الجسيمات والاندفاع) صورة واضحة عن ذلك. في الواقع، إنّ العزم من الدرجة صفر (معادلة النقل للجسيمات (5.63)) يعطي التطور الزماني - المكاني لكثافات الأصناف كتابع للتوزع الفراغي للسرع المتوسطة. أمّا العزم من المرتبة الأولى (معادلة النقل للاندفاع (5.74)) فهو يسمح بحساب توزع السرعات المتوسطة كتابع لتنسور الضغط الحركي. والعزم من المرتبة الثانية (معادلة النقل للضغط الحركي (5.45)) يعرف تنسور تدفق الطاقة الحرارية (5.47). إنّ مجموع المعادلات الماكروسكوبية يشكل جملة لا منتهية من المعادلات المرتبطة، وبالتالي فإنّ حل العزم من الدرجة m يتطلب معرفة العزم من الدرجة m+1. وبالتالي يجب تبني فرضيات إغلاق تبسيطية تسمح بالحد من عدد المعادلات إلى عدد منتهٍ. في معظم الحالات التطبيقية لا نحتفظ إلاّ بأولى مرتبتين، وذلك بفرض أنّ الوسط متناحٍ، مما ينتج عنه ضغط حركي سلمي (أي إنّ التنسور Π_{Ki} ثنائي المرتبة يصبح قطرياً، ومنه يستنتج الضغط من قوانين الترموديناميك).

إنّ الجملة المبسطة الناتجة التي نحصل عليها ضمن هذه الشروط تكون مؤلفة من مجموعة معادلات مرتبطة فيما بينها عن طريق حد الصدم، وفي بعض الحالات المعينة لغاز التأين عن طريق حد القوة (بسبب وجود حقل شحنة فراغية ناتج عن الجسيمات المشحونة). أمّا التصادمات فهي عبارة عن حدود خلق وحدود إفناء تتعلق طبيعتها بالعزم المعتبر (كثافة، اندفاع). كل هذه الآليات سوف نتحدث عنها في نهاية هذا الفصل (الفقرة4.5).

5.2.5- معادلة النقل للإشعاع

تُستنتج معادلة النقل للإشعاع من معادلة التطور الميكروسكوبي للفوتونات (3.35).

فإذا أخذ التعريف العام للتوزع الموضعي (3.2) بالحسبان، تمثل العلاقة:

$$d^4N_\nu = f_\nu(\vec{r},p_\nu,t)\, d^3r\, dp_\nu \qquad (5.93)$$

عدد الفوتونات التي يكون اندفاعها واقعاً بين p_ν و $p_\nu + dp_\nu$، والمحتواة ضمن الحجم d^3r المحيط بالنقطة $\vec{r}$ والتي تنتشر بسرعة قدرها $\vec{w}_\nu$ في الوسط [33].

وتُعطى كثافة الفوتونات بالعلاقة:

$$dn_\nu = \frac{d^4N_\nu}{d^3r} \qquad (5.94)$$

أو إذا كاملنا على جميع الاندفاعات الممكنة يكون:

$$n_\nu(\vec{r},t) = \int f_\nu(\vec{r},p_\nu,t)\, dp_\nu \qquad (5.95)$$

وتمثل العبارة:

$$dP_{S\nu} = \frac{1}{n_\nu(\vec{r},t)} f_\nu(\vec{r},p_\nu,t)\, dp_\nu \qquad (5.96)$$

احتمال وجود فوتون ((3.48) و (5.19)) يقع اندفاعه بين p_ν و $p_\nu + dp_\nu$.

يُعرَّف الاندفاع المتوسط، بفرض أنّ:

$$< p_\nu > \int p_\nu\, dP_{S\nu} \qquad (5.97)$$

ومنه:

$$< p_\nu > = \frac{1}{n_\nu(\vec{r},t)} \int p_\nu \, f_\nu(\vec{r},p_\nu,t) \, dp_\nu \qquad (5.98)$$

يُحصل على معادلة النقل للإشعاع بضرب معادلة بولتزمان للفوتونات (3.35) بـ p_ν وبمكاملتها بالنسبة للاندفاعات. وعلى اعتبار أنّ f_ν هو تابع توزع الفوتونات و n_ν هو كثافتها، يحسب ما يلي:

$$\int p_\nu \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}_\nu . \vec{\nabla}_r\right) f_\nu \, dp_\nu = \int p_\nu \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial t}\right)_c dp_\nu \qquad (5.99)$$

حيث يكتب الحد الأول:

$$\int p_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial t} dp_\nu = \frac{\partial}{\partial t} \int (p_\nu f_\nu) \, dp_\nu - \int f_\nu \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial t}\right) dp_\nu \qquad (5.100)$$

إذ إن:

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} = 0 \qquad (5.101)$$

ومنه يكون (5.98):

$$\int p_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial t} dp_\nu = \frac{\partial}{\partial t}\left[n_\nu < p_\nu >\right] \qquad (5.102)$$

وبما أن سرعة الانتشار $\vec{w}_\nu$ لا تتعلق بالاندفاع p_ν ، فإنّ الحد الثاني يصبح:

$$\int p_\nu \, \vec{w}_\nu . \vec{\nabla}_r \, f_\nu \, dp_\nu = \vec{w}_\nu . \int p_\nu \, \vec{\nabla}_r \, f_\nu \, dp_\nu \qquad (5.103)$$

ومنه:

$$\int p_\nu \, \vec{w}_\nu . \vec{\nabla}_r \, f_\nu \, dp_\nu = \vec{w}_\nu . \left[\vec{\nabla}_r \int p_\nu \, f_\nu \, dp_\nu - \int p_\nu \, \vec{\nabla}_r \, f_\nu \, dp_\nu\right] \qquad (5.104)$$

بملاحظة أنّ:

$$\vec{\nabla}_r \, p_\nu = 0 \qquad (5.105)$$

يستنتج أنّ (5.98):

$$\int p_\nu \, \vec{w}_\nu . \vec{\nabla}_r \, f_\nu \, dp_\nu = \vec{w}_\nu . \vec{\nabla}_r \left[n_\nu < p_\nu >\right] \qquad (5.106)$$

ويكتب حد الصدم أيضاً على النحو (5.102):

$$\int p_\nu \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial t}\right)_c dp_\nu = \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[n_\nu < p_\nu >\right]\right\}_c \qquad (5.107)$$

بتحصيل النتائج (5.102)، (5.106) و (5.107) تأخذ معادلة النقل الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[n_\nu < p_\nu >\right] + \vec{w}_\nu . \vec{\nabla}_r \left[n_\nu < p_\nu >\right] = \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[n_\nu < p_\nu >\right]\right\}_c \qquad (5.108)$$

ويعرف الاندفاع لفوتون بوساطة [10] كما يلي:

$$p_\nu = \frac{h\nu}{c} \qquad (5.109)$$

ومنه يمكن كتابة:

$$n_\nu < p_\nu > = \frac{1}{c}\, n_\nu < h\nu > \qquad (5.110)$$

حيث $< h\nu >$ هي الطاقة المتوسطة للفوتونات.

بملاحظة أنّ $n_\nu < h\nu >$ تمثل كثافة الطاقة الإشعاعية u_ν (الطاقة المتوسطة للفوتونات مضروبة بكثافتها)، يُستنتج:

$$u_\nu = c\, n_\nu < p_\nu > \qquad (5.111)$$

ومنه يمكن تعريف الشدة النوعية I_ν انطلاقاً من (3.73):

$$\int I_\nu \, d\Omega = c^2 n_\nu < p_\nu > \qquad (5.112)$$

حيث I_ν تتعلق باتجاه الانتشار $\vec{\Omega}$، وبالموضع $\vec{r}$، وبالزمن t (وذلك حسب تعريف الكثافة (5.95)).

بفرض أنّ ($\vec{\Omega}$هو شعاع الوحدة) يكون:

$$\vec{w}_\nu = w_\nu \vec{\Omega} \qquad (5.113)$$

وبضرب المعادلة (5.108) بالمعامل c^2، يُحصل على معادلة النقل للإشعاع (5.112) [33,32]:

$$\frac{\partial}{\partial t} I_\nu(\vec{r},\vec{\Omega},t) + w_\nu \vec{\Omega}.\vec{\nabla}_r I_\nu(\vec{r},\vec{\Omega},t) = \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_c \qquad (5.114)$$

يربط حد الصدم بين الإشعاع وجسيمات البلازما عبر وسيط آليات الإصدار والامتصاص التي تم شرحها في الفصل الثالث. سنعود إلى هذه المسألة في نهاية هذا الفصل (الفقرة 5.4).

5.3- معاملات النقل

5.3.1- المسار الحر الوسطي

تحتوي البلازما بشكل عام، على العديد من الأصناف، ويتألف كل صنف من عدد كبير من الجسيمات، ومن المفيد، تعريف مقادير متوسطة (معاملات النقل) والتي تعبر عن خصائص عامة للبلازما **[56,48,36,29,11,9,1]** بفرض أن الوسط المدروس، ومنذ اللحظة الأولى، لا يحتوي إلا على كرات صلبة غير قابلة للاختراق. وأن المعدل الكلي للتصادمات المرنة يكتب، على اعتبار أن الجسيمات من النوع 1 هي التي تنتثر وفق الزاوية θ $(n=n_1)$ ، وأن التوزع بالسرع هو توزع ماكسويل (4.15):

$$\frac{dn_1}{dt}=k_{co}^{SS}\bar{n}_1\bar{n}_2 \tag{5.115}$$

حيث k_{co}^{SS} معامل الصدم للكرات الصلبة (4.34)، ومنه:

$$\frac{dn_1}{dt}=\bar{n}_1\bar{n}_2\sigma_o^{SS}\left(\frac{8kT}{\pi\mu}\right)^{1/2} \tag{5.116}$$

إذا كانت الجسيمات كلها متماثلة، يكون:

$$\begin{aligned}\bar{n}&=\bar{n}_1=\bar{n}_2\\ m&=m_1=m_2\end{aligned} \tag{5.117}$$

وأنَّ

$$\mu=\frac{m}{2} \tag{5.118}$$

ومنه (5.116):

$$\frac{1}{\bar{n}}\frac{dn}{dt}=\sqrt{2}\bar{n}\sigma_o^{SS}\left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} \tag{5.119}$$

بإدخال السرعة المتوسطة للجسيمات $<w>_o$ من أجل توزع ماكسويل-بولتزمان (5.9)، ينتج:

$$\frac{1}{\bar{n}}\frac{dn}{dt}=\sqrt{2}\bar{n}\sigma_o^{SS}<w>_o \tag{5.120}$$

وبالانتباه إلى أنَّ النسبة $dn/\bar{n}$ تمثل احتمال حدوث تصادم (وهي نسبة الجسيمات المنتثرة إلى العدد الكلي للجسيمات الواردة)، تعطي العبارة (5.120) احتمال التصادم في واحدة الزمن. وهي أيضاً تواتر الصدم المرن ν_{co}^{SS} الذي كان قد عرف سابقاً في الفصل الرابع (4.44)، ومنه:

$$\nu_o^{SS}=\sqrt{2}\,\bar{n}\,\sigma_o^{SS}<w>_o \tag{5.121}$$

وبأخذ مقلوب (5.121) ينتج الزمن المتوسط بين تصادمين:

$$\tau_o=\frac{1}{\sqrt{2}\,\bar{n}\,\sigma_o^{SS}<w>_o} \tag{5.122}$$

ومنه يعرَّف المسار الحر الوسطي بالمسافة التي يقطعها الجسم، إذا تحرك بالسرعة المتوسطة $<w>_o$ أثناء الفترة الفاصلة بين تصادمين، أي:

$$\lambda_o=<w>_o\,\tau_o \tag{5.123}$$

ومنه

$$\lambda_o=\frac{1}{\sqrt{2}\,\bar{n}\,\sigma_o^{SS}} \tag{5.124}$$

إن النموذج المثالي السابق لا يطبق إلا على الجمل المؤلفة من جسيمات متماثلة. في حين أنه داخل بلازما واحدة يمكن للجسيمة أن تتصادم مع جسيمات من الصنف نفسه أو من أصناف أخرى. ومنه يعرف المسار الحر الوسطي لمجموعة من الصنف K بفرض [56,48]:

$$\lambda_K\simeq\frac{1}{\sqrt{2}\,\bar{n}_K\sigma_K^{(K)}+\sum\limits_{J\neq K}\bar{n}_J\left(1+\frac{m_K}{m_J}\right)^{1/2}\sigma_K^{(J)}} \tag{5.125}$$

حيث إنَّ $\sigma_K^{(K)}$ هو المقطع الفعال الكلي للتصادم بين جسيمات من الطبيعة نفسها، وإن $\sigma_K^{(J)}$ هو المقطع الفعال الكلي للتصادم بين جسيمات من طبيعة مختلفة، $\bar{n}_K$، $\bar{n}_J$ و m_K، m_J هي على الترتيب الكثافتان والكتلتان للجسيمات من كل صنف. ومن المفيد أيضاً تعريف المسار الحر الوسطي لمجموعة الأصناف بفرض [56]:

$$\frac{1}{\lambda}=\sum_K\frac{1}{\lambda_K} \tag{5.126}$$

يؤخذ الجمع على جميع الأصناف الموجودة في البلازما.

إنَّ مفهوم المسار الحر الوسطي يسمح بإعطاء تفسير فيزيائي للآليات التي تحدث في البلازما. إذا فُرض أن البلازما محتواة ضمن حجم مكعب طول حرفه L، يمكن أن يستنتج بسهولة أن:

- النظام السائد تصادمي، إذا كان $\lambda << L$ (تتصادم الجسيمات فيما بينها قبل أن تصل إلى الجدران).

- النظام جزيئي إذا كان $\lambda >> L$ (التصادمات مع الجدران هي السائدة).

إذا ما نُظر إلى المسار الحر الوسطي λ_e للإلكترونات، وكان $\lambda_e >> d_e$ (d_e المسافة المتوسطة ما بين الإلكترونات (1.23)، فإن التصادمات قصيرة المسافة تكون قليلة الاحتمال. لذلك في هذا النوع من البلازما، تكون دائماً طاقة التهيج الحراري أكبر من طاقة التأثير المتبادل الكولوني، مما يبرر التقريب (1.43). تدعى البلازما التي تستجيب لهذه الشروط بالبلازما الحركية الكاملة[2] (التي تسلك سلوك الغاز الكامل)، ويمكن إتمام المتراجحة (1.60) إلى:

$$r_L << d_e << \lambda_{De} << \lambda_e \qquad (5.127)$$

5.3.2- معاملات الانتشار

انتشار الجسيمات المعتدلة

ليكن لدينا وسط مؤلف من ذرات أو جزيئات معتدلة والتي تُمثَّل بكرات صلبة غير قابلة للخرق و متماثلة. بوجود تدرج في الكثافة تنتشر هذه الجسيمات بشكل حر من الأماكن ذات الكثافة العالية إلى الأماكن ذات الكثافة المنخفضة، لتحقيق التجانس في الفراغ.

بغية حساب معامل النقل الذي يصف هذا الانتشار سنقوم بحساب تدفق الجسيمات الصافي الذي يجتاز السطح S المؤلف من المستوي الأفقي z (الشكل 5.1).

إنّ التدفق الصافي هو عبارة عن مجموع التدفق نحو الأعلى ϕ_z^+ والتدفق نحو الأسفل ϕ_z^- [36]:

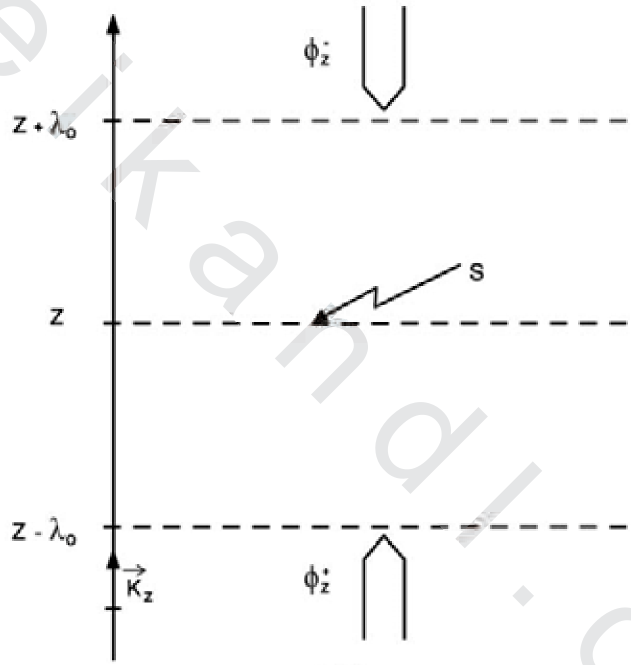
$$\phi_z = \phi_z^+ + \phi_z^- \qquad (5.128)$$

إن تـدفق الجـسيمات (ذوات الـسرعة بـين $\vec{w}$ و $\vec{w}+d\vec{w}$) بحـسب المحـور z يعرف كما يلي:

$$d^3\phi_z = \vec{w}.\vec{k}_z\, d^3n \qquad (5.129)$$

حيـث $\vec{k}_z$ هـو شـعاع الوحـدة (الـشكل 5.1) و $d^3\phi_z$ d^3n هـي كثافـة الجسيمات من أجل مجال السرعة المعتبر. إن التدفق $d^3\phi_z$ الذي يقدر بعده بعدد الجسيمات في واحدة السطح وفي واحدة الزمن يمكن أن يكتب أيضاً، باستبدال (5.24):

$$d^3\phi_z = \vec{w}.\vec{k}_z\, f(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3w \qquad (5.130)$$



الشكل 5.1

لكي يصعد جسيم نحو الأعلى يكفي أن تكون مركبة سـرعته على z موجبة، ومنه:

$$d^3\phi_z^+ = w_z\, f(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3w \qquad (5.131)$$

ومنه، بالمكاملة على باقي المركبات:

$$d\phi_z^+ = w_z dw_z \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\, dw_x\, dw_y \qquad (5.132)$$

بفرض أنّ تابع التوزع $f(\vec{r},\vec{w},t)$ هو تابع ماكسويل (3.70)، يجب حساب:

$$d\phi_z^+ = \left(\frac{m_o}{2\pi kT}\right)^{3/2} \bar{n}_o w_z e^{-m_o w_z^2/2kT} dw_z \times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m_o(w_x^2+w_y^2)/2kT}\, dw_x\, dw_y \qquad (5.133)$$

حيث إنّ m_o هي كتلة الجسيم المعتدل.

ومنه يُحصل على [35,11]:

$$d\phi_z^+ = \left(\frac{m_o}{2\pi kT}\right)^{3/2} \bar{n}_o w_z e^{-m_o w_z^2/2kT} dw_z \qquad (5.134)$$

إنّ جسيماً مركبة سرعته على z هي w_z ، يقطع من دون تصادم المسافة:

$$\lambda_o = w_z \tau_o \qquad (5.135)$$

حيث إنّ τ_o هو الزمن الوسطي بين تصادمين (5.122).

إنّ جميع الجسيمات التي تتحرك نحو الأعلى (بالسرعة نفسها w_z) وتجتاز المستوي $z-\lambda_o$ تصل إلى المستوي z من دون تصادم، مما يسمح بالقول إن التدفق هو نفسه في z وفي $z-\lambda_o$:

$$d\phi_z^+(z) = d\phi_z^+(z-\lambda_o) \qquad (5.136)$$

إنّ الجسيمات تتحرك بفعل تدرج الكثافة. تمثل $\bar{n}$ الكثافة الوسطية للجسيمات في المستوي $z-\lambda_o$ ومنه (1.135):

$$\bar{n}_o = n_o\,(z - w_z\,\tau_o) \qquad (5.137)$$

ومنه (5.134):

$$d\phi_z^+ = \left(\frac{m_o}{2\pi kT}\right)^{1/2} n_o(z-w_z\tau_o)\, w_z\, e^{-m_o w_z^2/2kT} dw_z \qquad (5.138)$$

يحصل على التدفق الكلي الصاعد بالمكاملة على جميع السرعات الموجبة:

$$\phi_z^+ = \left(\frac{m_o}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} n_o(z-w_z\tau_o)\, w_z\, e^{-m_o w_z^2/2kT}\, dw_z \qquad (5.139)$$

بمحاكمة مماثلة لما سبق، يمكن حساب التدفق الهابط (باتجاه الأسفل) (حيث تكون مركبة السرعة بحسب z سالبة)، أي (5.130):

$$d^3\phi_z^- = w_z\, f(\vec{r},\vec{w},t)d^3w \tag{5.140}$$

ومنه، من أجل توزع ماكسويل (5.134):

$$d\phi_z^- = \left(\frac{m_o}{2\pi kT}\right)^{1/2} \bar{n}_o w_z e^{-m_o w_z^2/2kT} dw_z \tag{5.141}$$

إنّ الجسيمات التي تجتاز المستوي $z+\lambda_o$ ، والتي تصل إلى المستوي z من دون تصادم هي نفسها ، وبالتالي (5.136):

$$d\phi_z^-(z) = d\phi_z^-(z+\lambda_o) \tag{5.142}$$

وبما أنّ سرعتها على المحور z سالبة ، يكون:

$$\lambda_o = -w_z\tau_o \tag{5.143}$$

ومنه (5.138):

$$d\phi_z^- = \left(\frac{m_o}{2\pi kT}\right)^{1/2} n_o\,(z-w_z\tau_o)\,w_z\,e^{-m_o w_z^2/2kT}dw_z \tag{5.144}$$

ويحصل على التدفق الكلي باتجاه الأسفل بالمكاملة على جميع السرعات السالبة:

$$\phi_z^- = \left(\frac{m_o}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{0} n_o\,(z-w_z\tau_o)\,w_z\,e^{-m_o w_z^2/2kT}dw_z \tag{5.145}$$

ينتج بعد استخدام التحويلات ما يلي:

$$\phi_z^- = -\left(\frac{m_o}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_{0}^{\infty} n_o(z+w_z\tau_o)w_z e^{-m_o w_z^2/2kT}dw_z \tag{5.146}$$

ومنه فإنّ التدفق الصافي (5.128) يصبح بعد تحصيل النتائج (5.139) و (5.146) كما يلي:

$$\phi_z^- = \left(\frac{m_o}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_{0}^{\infty} \left[n_o(z-w_z\tau_o)-n_o(z+w_z\tau_o)\right] w_z e^{-m_o w_z^2/2kT}dw_z \tag{5.147}$$

بملاحظة أنّ $w_z\tau_o$ هو مقدار صغير جداً ، يمكن نشر الكثافات في سلسلة تايلور:

$$n_o(z-w_z\tau_o)-n_o(z+w_z\tau_o) \simeq -2w_z\tau_o\frac{\partial n_o}{\partial z} \tag{5.148}$$

ومنه يكتب التدفق الكلي بحسب z (5.147):

$$\phi_z = -2\,\tau_o \frac{\partial n_o}{\partial z}\left(\frac{m_o}{2\,\pi\,k\,T}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} w_z^2\, e^{-m_o\, w_z^2 / 2\,kT}\, dw_z \qquad (5.149)$$

ومنه يكون [35]:

$$\phi_z = -\frac{k\,T\,\tau_o}{m_o}\frac{\partial n_o}{\partial z} \qquad (5.150)$$

أي:

$$\phi_z = -D_o \frac{\partial n_o}{\partial z} \qquad (5.151)$$

بفرض أنّ:

$$D_o = \frac{k\,T\,\tau_o}{m_o} \qquad (5.152)$$

حيث إنّ D_o هو معامل انتشار الجسيمات المعتدلة.

يمكن أيضاً التعبير عن هذا المعامل بدلالة السرعة التربيعية المتوسطة (5.12):

$$D_o = \frac{1}{3} < w^2 >_o \ \tau_o \qquad (5.153)$$

أو بدلالة المسار الحر الوسطي أيضاً، بعد التعويض عن τ_o (5.123):

$$D_o = \frac{1}{3}\frac{<w^2>_o}{<w>_o^2}\lambda_o <w>_o \qquad (5.154)$$

ومنه يستنتج، باستخدام (5.9) و (5.12):

$$D_o = \frac{\pi}{8}\lambda_o < w >_o \qquad (5.155)$$

ويمكن أيضاً كتابة D_o بدلالة المقطع الفعال الكلي (5.124):

$$D_o = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi k T}{m_o}\right)^{1/2} \frac{1}{\overline{n}_o \sigma_o^{SS}} \qquad (5.156)$$

إنّ النموذج الذي تم عرضه، يسمح باستنتاج معامل الانتشار D_o (5.156)، انطلاقاً من التدفق الصافي المحسوب في اتجاه واحد. إنّ النتيجة التي حُصل عليها مع أنها مرضية فيزيائياً (أي علاقة D_o بباقي الوسطاء الفيزيائية)، إلا أنها ليست إلاّ

صيغة تقريبية لمعامل الانتشار الدقيق. أمّا النظرية الدقيقة (في الفراغ ثلاثي الأبعاد) فقد تم وضعها من قبل شابمان وإنسكوغ Chapman & Enskog [57] من أجل غاز وحيد الذرة، و اعتبرت الذرات شبيهة بالكرات. ويعطى معامل الانتشار المتبادل D_{12} ، الذي يُحصل عليه ضمن هذه الشروط، الصالح من أجل مزيج مؤلف من ذرة- ذرة أو ذرة- أيون، بالعلاقة [57,56,29,28]:

$$D_{12} = \frac{3}{16}\left(\frac{2\pi k T}{\mu}\right)^{1/2} \frac{1+\varepsilon_c}{(n_1+n_2)\,\Omega_{12}} \qquad (5.157)$$

حيث إنّ ε_c هو حد تصحيح من الدرجة الثانية والذي يمكن بشكل عام إهماله. (الأصغر من بين الارتيابات التجريبية)، n_1, n_2 هما كثافتا الصنفين، μ هي الكتلة المختزلة و Ω_{12} هو تكامل التصادم المعرف بالعلاقة:

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} E^{*2}\ \sigma_1(E^*)\, e^{-E^*}\, dE^* \qquad (5.158)$$

حيث E^* هي الطاقة الحركية النسبية المختزلة (4.21) و $\sigma_1(E^*)$ هو المقطع الفعال لنقل الاندفاع (5.54).

أما عبارة التدفق (5.151) في الفراغ ثلاثي الأبعاد فهي ليست سوى قانون فيك Fick [58]:

$$\vec{\phi}_K = -D_K\, \vec{\nabla} n_K \qquad (5.159)$$

حيث إنّ D_K هو معامل الانتشار لغاز نقي (من صنف واحد)، ويعرَّف D_K بالعبارة (5.157).

تُدخل النظرية الدقيقة، عملياً، معامل تصحيح يمكن تعيينه بسهولة بتطبيق النتيجة (5.157) على حالة الكرات الصلبة المتماثلة. يكون لدينا ضمن هذه الشروط (4.60):

$$\sigma_1 = \sigma_1^{SS} = \sigma_0^{SS} = \pi r_m^2 \qquad (5.160)$$

وباستخدام (5.22) و (5.118) يكون:

$$\bar{n}_o = n_1 + n_2, \qquad \mu = \frac{m_o}{2} \qquad (5.161)$$

ومنه يستنتج (5.158):

$$\Omega_{11}=\frac{\sigma_0^{SS}}{2}\int_0^{\infty}E^{*2}\,e^{-E^*}\,dE^* \qquad (5.162)$$

ومنه [35]:

$$\Omega_{11}=\sigma_0^{SS} \qquad (5.163)$$

و بإهمال ε_c (5.157) يكون:

$$D_{11}=\frac{3}{8}\left(\frac{\pi kT}{m_o}\right)^{1/2}\frac{1}{\overline{n}_o\sigma_0^{SS}} \qquad (5.164)$$

بمقارنة هذه النتيجة بـ D_o (5.156)، نجد أنّ:

$$D_{11}=\frac{3}{2}D_o \qquad (5.165)$$

أي إنّ معامل التصحيح بين الحساب الدقيق (D_{11}) والحساب التقريبي (D_o) هو 3/2 في حالة تصادم الكرات الصلبة، وذلك بفرض أنّ المتغيرات الفيزيائية تبقى هي نفسها.

في الختام، تعالج مسائل انتشار الجسيمات المعتدلة، باستخدام معامل الانتشار D_{12} (5.157)، و يخضع تدفق الجسيمات في الفراغ لقانون فيك المعبر عنه بالعلاقة (5.159)، وذلك بأخذ $D_K=D_{11}$.

الانتشار الحر وحركية الجسيمات المشحونة

إنّ معاملي الانتشار الحر والحركية mobility يمكن أن يستنتجا مباشرة من معادلة نقل الاندفاع لكل صنف (5.74)، وذلك بتبني الفرضيات التالية:

- الغاز الذي هو قيد الدرس مؤين بشكل خفيف (أي إنّ كثافة الجسيمات المشحونة n_K صغيرة جداً بالنسبة لكثافة الجسيمات المعتدلة n_o) بحيث إنّ التصادمات من نوع شحنة-شحنة تكون مهملة بالنسبة للتصادمات من نوع شحنة - جسيم معتدل، أي:

$$\begin{aligned} n_K &\ll n_o \\ \alpha_i &< 10^{-4} \end{aligned} \qquad (5.166)$$

- الحالة مستقرة (أي ينعدم مشتق الحركة الكلي (5.77)، أي:

$$m_{Ki} m_K \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_o . \vec{\nabla}_r\right) < \vec{w}_{Ki} > = 0 \qquad (5.167)$$

- الوسط متناحٍ (أي إنّ تنسور الضغط الحركي قطري، حيث يعطى ضغط الغاز حسب قانون الغازات الكاملة (1.1)):

$$\vec{\nabla}_r . \prod_{Ki} = \vec{\nabla}_r P_K = \vec{\nabla}_r (n_K k T_K) \qquad (5.168)$$

- تهمل الحدود التربيعية للسرعة (حيث تتعلق هذه الحدود بالسرعة الجسيمية المتوسطة التي تكون صغيرة بالنسبة للسرعة المتوسطة للصنف حسب التعريف (5.37)):

$$n_{Ki} m_K < \vec{V}_{Ki} > . \vec{\nabla}_r \vec{v}_o - < \vec{V}_{Ki} > \vec{\nabla}_r . \left[n_{Ki} m_K < \vec{V}_{Ki} > \right] \simeq 0 \qquad (5.169)$$

- إنّ حد التصادم الذي يعبر عن ضياعات الاندفاع للصنف المعتبر أثناء عمليات التصادم المرن، يعبر عنه بشكل كلي باستخدام تواتر نقل الاندفاع (4.57)، ν_{cl} الذي يمثل تواتر النقل بين شحنة - جسيم معتدل (الغاز ضعيف التأين):

$$\left(n_{Ki} m_K \frac{\partial}{\partial t} < \vec{w}_{Ki} > \right)_c = - n_{Ki} m_K \nu_{cl} < \vec{w}_{Ki} > \qquad (5.170)$$

للتبسيط يحذف الدليل i ويبقى على الرمز K لأيون أو إلكترون، فتصبح المعادلة (5.74) حسب الفرضيات السابقة:

$$\vec{\nabla}_r (n_K k T_K) - n_K \vec{F}_K = - n_K m_K \nu_{cl} < \vec{w}_K > \qquad (5.171)$$

وبما أن الغاز ضعيف التأين فيجب الانتباه إلى أنّ الجسيمات المشحونة لا تولد أي حقل موضعي (أي لا تخضع الجسيمات المشحونة لأي قوة كولونية، أي إنّ الحقل الكهربائي الداخلي معدوم).

بغياب القوى الخارجية $(\vec{F}_K = 0)$ وحين لا يكون هناك أي تدرج في درجة الحرارة للصنف المعتبر K $(\vec{\nabla}_r T_K = 0)$، تصبح المعادلة (5.171):

$$k T_K \vec{\nabla}_r n_K = - n_K m_K \nu_{cl} < \vec{w}_K > \qquad (5.172)$$

أو:

$$n_K < \vec{w}_K > = - D_K \vec{\nabla}_r n_K \qquad (5.173)$$

حيث إنّ D_K هو معامل الانتشار الحر للجسيمات المشحونة، من [1]:

$$D_K = \frac{kT_K}{m_K \nu_{cl}} \qquad (5.174)$$

ومنه، يُحصل على علاقة مطابقة للعلاقة المستنتجة من النظرية الحركية للغازات (5.152)، حيث إنَّ $n_K < \vec{w}_K >$ يمثل هنا تدفق الجسيمات المشحونة التي تنتشر بحرية تحت تأثير تدرج الضغط (5.173).

بوجود حقل كهربائي خارجي، تكتب المعادلة (5.171) حين يكون تدرج الضغط معدوماً على النحو:

$$n_K \vec{F}_K = n_K m_K \nu_{cl} < \vec{w}_K > \qquad (5.175)$$

وأنَّ:

$$\vec{F}_K = q_K \vec{E}_E \qquad (5.176)$$

ومنه:

$$q_K \vec{E}_E = m_K \nu_{cl} < \vec{w}_K > \qquad (5.177)$$

يُعبَّر عن الشحنة q_K ، انطلاقاً من الشحنة الأولية q:

$$q_K = \pm Z_K q \qquad (5.178)$$

حيث تعبر الإشارة + عن الأيونات الموجبة، والإشارة - عن الأيونات السالبة، والإلكترونات (حيث إنّه من أجل الإلكترون يكون $Z_K = 1$). وتكون (5.177):

$$< \vec{w}_K > = \pm \mu_K \vec{E}_E \qquad (5.179)$$

بفرض أنّ [59,1]:

$$\mu_K = \frac{Z_K q}{m_K \nu_{cl}} \qquad (5.180)$$

حيث μ_K هو معامل الحركية للصنف K؛ وتمثل $<\vec{w}_K>$ السرعة المتوسطة لانجراف الصنف K ضمن الحقل الكهربائي الخارجي E_E .

ويمكن انطلاقاً من التعريفين (5.174) و (5.180)، استنتاج علاقة بسيطة بين معاملي الانتشار الحر وحركية الجسيمات المشحونة (علاقة أنيشتاين):

$$\frac{D_K}{\mu_K} = \frac{k T_K}{Z_K q} \qquad (5.181)$$

وبإدخال علاقة التواتر ν_{cl} يمكن مقارنة معاملي النقل D_K (5.174) و μ_K (5.180) للإلكترونات والأيونات من حيث المرتبة. يمكن كتابة ν_{cl}

(بدلالـة المقطـع الفعـال لنقـل الانـدفاع σ_1)، مـن أجـل التـصادمات شـحنة-جـسيم معتدل، انطلاقاً من التعريفين (4.56) و (4.57):

$$\begin{aligned} k_{cl} &= \langle g\sigma_1 \rangle \\ \nu_{cl} &= k_{cl}\,\overline{n}_o \end{aligned} \tag{5.182}$$

وكتقريـب أول، بفـرض أن المقطـع الفعـال σ_1 (4.54) لا يتغير كـثيراً بدلالـة السرعة النسبية g، نجد أنّ:

$$\langle g\sigma_1\rangle \simeq \langle g\rangle\sigma_1 \tag{5.183}$$

وأيضاً ((4.42),(4.43)):

$$k_{cl} \simeq \left(\frac{8kT_K}{\pi\mu}\right)^{1/2}\sigma_1 \tag{5.184}$$

ومنه (5.182):

$$\nu_{cl} \simeq \left(\frac{8kT_K}{\pi\mu}\right)^{1/2}\overline{n}_o\sigma_1 \tag{5.185}$$

ويصبح معاملا النقل D_K (5.174) و μ_K (5.180):

$$D_K \simeq \left(\frac{k\pi}{8}\right)^{1/2}\frac{1}{\overline{n}_o\sigma_1}T_K^{1/2}\frac{\mu^{1/2}}{m_K} \tag{5.186}$$

$$\mu_K \simeq \left(\frac{\pi}{8k}\right)^{1/2}\frac{q}{\overline{n}_o\sigma_1}\frac{Z_K}{T_K^{1/2}}\frac{\mu^{1/2}}{m_K} \tag{5.187}$$

حيث تمثل μ الكتلة المختزلة (2.24) ضمن التصادمات من نوع شحنة-جسيم معتدل:

$$\mu = \frac{m_o\,m_K}{m_o + m_K} \tag{5.188}$$

بملاحظة أنّ كتلة الإلكترون صغيرة جداً بالنسبة لكتلة الجسيم المعتدل، في حين أنّ كتلة الأيون تساوي تقريباً m_0، يكون من أجل إلكترون:

$$\mu \simeq m_e \tag{5.189}$$

ومن أجل أيون (5.118):

$$\mu \simeq \frac{m_o}{2} \tag{5.190}$$

ومنه تكون معاملات النقل:

$$D_e \simeq \left(\frac{k\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{1}{\overline{n}_o \sigma_l^{e-o}} \left(\frac{T_e}{m_e}\right)^{1/2} \quad (5.191)$$

$$\mu_e \simeq \left(\frac{\pi}{8k}\right)^{1/2} \frac{q}{\overline{n}_o \sigma_l^{e-o}} \frac{1}{(m_e T_e)^{1/2}} \quad (5.192)$$

$$D_i \simeq \left(\frac{k\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{1}{\overline{n}_o \sigma_l^{i-o}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_i}{m_i}\right)^{1/2} \quad (5.193)$$

$$\mu_i \simeq \left(\frac{\pi}{8k}\right)^{1/2} \frac{q}{\overline{n}_o \sigma_l^{i-o}} \frac{Z_i}{\sqrt{2}} \frac{1}{(m_i T_i)^{1/2}} \quad (5.194)$$

حيث يرمز الدليلان e و i للإلكترونات والأيونات، ويشير σ_l^{e-o} و σ_l^{i-o} إلى المقطعين الفعالين لنقل الاندفاع في التصادمات المرنة إلكترون - جسيم معتدل و أيون - جسيم معتدل، ومنه تستنتج النسبتان:

$$\frac{D_e}{D_i} \simeq \sqrt{2}\, \frac{\sigma_l^{i-o}}{\sigma_l^{e-o}} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} \quad (5.195)$$

$$\frac{\mu_e}{\mu_i} \simeq \sqrt{2} Z_i \frac{\sigma_l^{i-o}}{\sigma_l^{e-o}} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2} \quad (5.196)$$

وبفرض أنّ المقطعين الفعالين σ_l^{e-o} و σ_l^{i-o} هما مقداران من المرتبة نفسها [1]، نجد باستخدام التقريب $T_e \simeq T_i$ و $Z_i = 1$ أنّ:

$$\frac{D_e}{D_i} \sim \frac{\mu_e}{\mu_i} \sim \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} >> 1 \quad (5.197)$$

أي إنّ معاملي الانتشار الحر والحركية للإلكترونات يكونان دائماً كبيرين جداً بالنسبة للمعاملين الخاصين بالأيونات. وعندما تكون درجة حرارة الإلكترونات كبيرة بالنسبة لدرجة حرارة الأيونات $(T_e >> T_i)$، فإنّ المتراجحة (5.197) تصبح أقوى بالنسبة لمعاملي الانتشار و أضعف بالنسبة لمعاملي الحركية (بسبب قانوني التغير (5.195) و (5.196) بدلالة درجة الحرارة).

الانتشار ثنائي القطبية للجسيمات المشحونة

لقد رأينا فيما سبق بأنه بوجود تدرج في الضغط عند درجة حرارة ثابتة، فإنّ الجسيمات المشحونة لغاز متأين تنتشر بشكل حر (5.173). وبما أنّ معامل انتشار الإلكترونات كبير بالنسبة لمعامل انتشار الأيونات (5.197)، فإنّ هذه الإلكترونات تترك وراءها كمية زائدة من الشحنات الموجبة. ينتج فصل الشحنات هذا حقلاً كهربائياً موضعياً يعاكس الحركة الحرة للإلكترونات ويسرع الأيونات. وعندما تكون كثافة الشحنات كافية فإنّ قوة كولون $\vec{F}_K$ المطبقة على الجسيمات المشحونة لا يمكن إهمالها: وبالتالي فإنّ الإلكترونات و الأيونات تنتشر بالسرعة نفسها (سرعة الانتشار ثنائي القطبية ambipolar) [59,56, 1]. وتكتب معادلة النقل لكل صنف (5.171) بفرض أنه لا يوجد تدرج في درجة الحرارة ($\vec{\nabla}T_K = 0$):

$$k\,T_K \vec{\nabla}_r\, n_K - n_K \vec{F}_K = -n_K\, m_K\, \nu_{cl} < \vec{w}_K > \qquad (5.198)$$

حيث $\vec{F}_K$ هي قوة كولون الناتجة عن الحقل الموضعي $\vec{E}_c$ الناتج عن الشحنة الفراغية:

$$\vec{F}_K = q_K\, \vec{E}_c \qquad (5.199)$$

ومنه:

$$n_K < \vec{w}_K > = -\frac{k\,T_K}{m_K\,\nu_{cl}} \vec{\nabla}_r\, n_K + \frac{n_K\, q_K}{m_K\,\nu_{cl}} \vec{E}_c \qquad (5.200)$$

باستخدام (5.178) والتعريفين (5.174) و (5.180)، نحصل على:

$$n_K < \vec{w}_K > = -D_K \vec{\nabla}_r n_K \pm n_K \mu_K \vec{E}_c \qquad (5.201)$$

يمثل الحد الأول من الطرف الأيمن من المعادلة (5.201) الانتشار الحر للصنف K، والثاني يمثل انجراف هذا الصنف في حقل الشحنات الفراغية المتولدة (حيث تعبر الإشارة + عن الأيونات الموجبة والإشارة - عن الإلكترونات، حيث نعتبر هنا أنه لا يوجد أيونات سالبة ناتجة عن التصاق إلكترونات على الجسيمات المعتدلة). ويمكن أيضاً تحويل العلاقة (5.201) باستخدام معادلة نقل الجسيمات إلى الحالة المستقرة (5.63):

$$\vec{\nabla}_r \cdot [n_K < \vec{w}_K >] = \left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_c \qquad (5.202)$$

إنّ التصادمات هي بشكل أساسي من نوع تصادم شحنة - جسيم معتدل وبالتالي فإنّ حد التصادم في المعادلة (5.202) يعبر عن آليات التأين، وإن عمليتي إعادة الاتحاد إلكترون-أيون والالتصاق (الفقرة 4.5) قد أهملتا، بأخذ فرضية الارتحال departure بالاعتبار (الغاز ضعيف التأين).

وبما أنّ درجة حرارة الإلكترونات بشكل عام أعلى بكثير من درجة حرارة الأيونات، سنقبل بأن التأين ينتج بشكل أساسي عن التصادمات بين إلكترون- ذرة (4.84). ومنه نجد (4.30):

$$\left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_c = K_c^{ion} n_K n_o \qquad (5.203)$$

أو أنّ (4.100):

$$\left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_c = \nu_c^{ion} n_K \qquad (5.204)$$

ومنه (5.202):

$$\vec{\nabla}_r \cdot \left[n_K < \vec{w}_K >\right] = \nu_c^{ion} n_K \qquad (5.205)$$

وبحساب تباعد divergence التدفق الكلي (5.201)، نجد:

$$-D_K \Delta_r n_K \pm \mu_K \vec{\nabla}_r \cdot (n_K \vec{E}_c) = \nu_c^{ion} n_K \qquad (5.206)$$

بفرض أنّ D_K و μ_K ثابتان في كل نقطة من الفراغ.

نستنتج من أجل الإلكترونات والأيونات الموجبة:

$$-D_e \Delta_r n_e - \mu_e \vec{\nabla}_r \cdot (n_e \vec{E}_c) = \nu_c^{ion} n_e \qquad (5.207)$$

$$-D_i \Delta_r n_i + \mu_i \vec{\nabla}_r \cdot (n_i \vec{E}_c) = \nu_c^{ion} n_i \qquad (5.208)$$

بفرض أنّ كثافة الشحنات كبيرة بما يكفي لكي يكون الارتباط بين الجسيمات المشحونة كلياً، يمكن القول بفرضية الانتشار ثنائي القطبية الكامل باعتبار أنه يكون لدينا في كل نقطة:

$$n_i = n_e \qquad (5.209)$$

ويمكن لهذه الفرضية أن تختزل إلى قاعدة بسيطة من التناسب بين n_i و n_e [1] عندما تكون الكثافات أكثر ضعفاً.

انطلاقاً من العلاقتين (5.207) و (5.208)، و بحذف الحد المتعلق بالحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة الفراغية $\vec{E}_c$ ، نجد:

$$-\mu_i D_e \Delta_r n_e - \mu_e D_i \Delta_r n_i = \nu_e^{ion}(\mu_i n_e + \mu_e n_i) \tag{5.210}$$

وإذا أخذت (5.209) بالحسبان، يتم الحصول على معادلة وحيدة للإلكترونات والأيونات:

$$\Delta_r n_K + \frac{\nu_e^{ion}}{D_a} n_K = 0 \tag{5.211}$$

وذلك بفرض أنّ:

$$D_a = \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_e + \mu_i} \tag{5.212}$$

حيث D_a هو معامل الانتشار ثنائي القطبية، ويشير الدليل K في (5.211) إلى إلكترون أو أيون.

يمكن أيضاً كتابة التعريف (5.212) على النحو:

$$D_a = D_i \frac{1 + \dfrac{\mu_i D_e}{\mu_e D_i}}{1 + \dfrac{\mu_i}{\mu_e}} \tag{5.213}$$

ومع أخذ (5.195) و (5.196) بالحسبان، يصبح:

$$D_a \simeq D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) \tag{5.214}$$

وبفرض أنّ الأيونات الموجبة تكون مشحونة بشحنة أولية واحدة أي $(Z_i = 1)$، انطلاقاً من العلاقتين (5.211) و (5.205) نجد أيضاً:

$$\vec{\nabla}_r . [n_K < \vec{w}_K >] = - D_a \Delta_r n_K \tag{5.215}$$

ومنه:

$$n_K < \vec{w}_K > = - D_a \vec{\nabla}_r n_K + \vec{C} \tag{5.216}$$

حيث $\vec{C}$ هو شعاع ثابت (بفرض أن المعاملات المختلفة للانتشار ثابتة في الفراغ).

أي إنّ تدفقات الجسيمات المشحونة K لا تختلف عن بعضها إلاّ بفارق ثابت، وينتشر كل صنف بمعامل الانتشار نفسه، آلا وهو معامل الانتشار D_a . من العبارتين (5.216) و (5.201) يستنتج الحقل الناتج عن الشحنات الفراغية $\vec{E}_c$:

$$\vec{E}_c = \pm \frac{D_K - D_a}{\mu_K} \frac{\vec{\nabla}_r n_K}{n_K} \pm \frac{\vec{C}}{n_K \mu_K} \qquad (5.217)$$

حيث تعبر الإشارة + عن الأيونات الموجبة والإشارة - عن الإلكترونات.

يحسب توزع الكثافات (5.211)، والتدفقات (5.216) والحقل الناتج عن الشحنة الفراغية (5.217) بحسب الحالة الفيزيائية المطروقة (مما يسمح بتحديد الشروط الحدية وتعيين الشعاع $\vec{C}$). فإذا كانت البلازما مثلاً محتواة ضمن وعاء جدرانه معزولة، فإن التدفقات على الجدران تكون متساوية (التيار الكلي معدوم، لأنه لا يمكن لأي شحنة أن تغادر الوعاء). ومنه يكون الشعاع $\vec{C}$ معدوماً [59,1]. يؤدي هذا الشرط إلى (5.216):

$$n_K < \vec{w}_K > = -D_a \vec{\nabla}_r n_K \qquad (5.218)$$

ومن (5.212) و (5.217):

$$\vec{E}_c = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\vec{\nabla} n_e}{n_e} \qquad (5.219)$$

5.4 حدود التصادم

5.4.1 حدود الصدم للجسيمات

سنتطرق، في هذا القسم الأخير، إلى حدود الصدم في معادلة النقل للجسيمات، وذلك مع التذكير بالآليات المختلفة للنقل التي تم عرضها في الفصول الثلاثة الأخيرة.

ويمكن كتابة الحد الأيمن من المعادلة (5.63) على الشكل التالي [56,32]:

$$\left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_c = \left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,e} + \left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,i} + \left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,r} + \left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,n} \qquad (5.220)$$

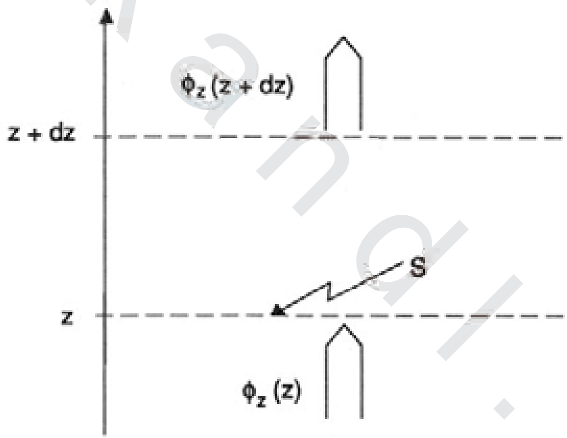
وقد حذف الدليل i الذي يشير إلى حالة الإثارة وذلك لتسهيل العبارة.

إن الحد الأول من المعادلة (5.220) هو حد الصدم المرن والصدم فائق المرونة superelastic، أما الحد الثاني فهو يعبر عن الصدم غير المرن والتفاعلي، والحد الثالث

فهو يخص التفاعل مع الإشعاع، وأخيراً يعالج الحد الأخير التفاعلات النووية (يفترض أن هذه التفاعلات غير موجودة نظراً للطاقات الحركية الصغيرة المتوافرة في بلازما المخابر).

إنّ العلاقة (5.220) تحتوي على حدود ربح وحدود ضياع بالنسبة لصنف الجسيمات المعتبر، علماً أنّ الآليات المدروسة هنا لا تأخذ بالحسبان مفاعيل السطح لجدران الوعاء الذي يحتوي البلازما. كما أنّ العبارة (5.220) تربط مجموعة الأصناف ببعضها البعض (جسيمات معتدلة، مشحونة، فوتونات) ولذلك كان تعيين مثل هذا الحد أساسياً.

إنّ التصادمات المرنة مسؤولة عن النقل بوساطة انتشار الصنف المعتبر. ليكن لدينا المفعول الناتج عن تدفق مستمر لجسيمات تجتاز حجماً محدداً بسطحين متوازيين S، المسافة بينهما dz (الشكل 5.2) [36].



الشكل 5.2

يمكن حساب تغير عدد الجسيمات ضمن هذا الحجم Sdz بدلالة الزمن، وذلك بحساب الفرق بين عدد الجسيمات الداخلة إلى الحجم وعدد الجسيمات الخارجة منه في واحدة الزمن:

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_K\, S\, dz) = S\phi_Z\,(z) - S\phi_Z\,(z + dz) \qquad (5.221)$$

حيث n_K و ϕ_Z هي بالترتيب الكثافة والتدفق في الاتجاه z للصنف K.

ونحصل، عند إجراء نشر تايلور للتابع $\phi_Z(z + dz)$:

$$\frac{\partial n_K}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_z}{\partial z} \qquad (5.222)$$

إنّ النتيجة السابقة لا تأخذ بالحسبان إلاّ تغيرات الكثافة الناتجة عن التدفق وحيد الاتجاه، وبالتالي يجب أن تضاف المساهمات المتأتية عن التدفق في الاتجاهات الأخرى للحصول على توازن موضعي كامل، ومنه [58]:

$$\frac{\partial n_K}{\partial t} = -\vec{\nabla}_r . \vec{\phi}_K \qquad (5.223)$$

باستخدام العبارة العامة للتدفق (قانون فيك)، نجد حد الصدم المرن للجسيمات المعتدلة (5.159):

$$\left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,e} = \vec{\nabla}_r . \left[D_K \vec{\nabla}_r n_K \right] \qquad (5.224)$$

والذي يصبح، عندما يكون حد الانتشار ثابتاً في الفراغ:

$$\left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,e} = D_K \Delta_r n_K \qquad (5.225)$$

في الحالة التي تكون فيها الجسيمات المشحونة خاضعة لتأثير حقل كهربائي خارجي، يمكن أن نحصل على التدفق الكلي (بفرض أن درجة الحرارة ثابتة) بإضافة تدفق الانتشار الحر (5.173) إلى التدفق الناتج عن حركة الشحنات في الحقل الكهربائي (5.179)، ويكون:

$$\vec{\phi}_K = -D_K \vec{\nabla}_r n_K \pm n_K \mu_K \vec{E} \qquad (5.226)$$

إنّ هذه النتيجة مطابقة لـ (5.201) حيث إنّ الحقل الكهربائي في (5.226) يأخذ بالحسبان الحقل الكهربائي الخارجي والحقل الناتج عن الشحنة الفراغية:

$$\vec{E} = \vec{E}_E + \vec{E}_c \qquad (5.227)$$

ومنه، يستنتج حد الصدم المرن للجسيمات المشحونة (5.223):

$$\left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,e} = \vec{\nabla}_r . \left[D_K \vec{\nabla}_r n_K \mp n_K \mu_K \vec{E} \right] \qquad (5.228)$$

حيث إنّ إشارة - تعبر عن حالة الأيونات الموجبة وإشارة + عن حالة الإلكترونات والأيونات السالبة.

يمكن اعتبار آلية انتقال الشحنات بفعل الحقل (التدفق الناتج عن الحركية) مرنة، طالما أنّ الطاقات المكتسبة من قبل الجسيمات المشحونة غير كافية لتحريض ظاهرتي التفكك أو التأين.

إنّ حد الصدم غير المرن والتفاعلي الذي تم شرحه في الفقرة (4.5) ينتج عن العمليات الأولية الموصوفة في الفقرة 4.5، وعليه يكون:

$$\left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,i} = S_{K,i} - P_{K,i} \qquad (5.229)$$

حيث إنّ $S_{K,i}$ و $P_{K,i}$ هما على الترتيب حدا الربح والخسارة في الصنف المعتبر K.

في فرضية التصادمات بين جسيمين والتي يمكن التعبير عنها بالصيغة العامة (2.4):

$$P + Q \rightarrow X + Y \qquad (5.230)$$

يكون لدينا (4.30) [44]:

$$S_{K,i} = \frac{dn_K}{dt} = k_c n_P n_Q \qquad (5.231)$$

وذلك عندما تكون n_K هي كثافة صنف نهائي (ناتج التفاعل)، يكون:

$$-P_{K,i} = \frac{dn_K}{dt} = -k_c n_K n_Q \qquad (5.232)$$

عندما تكون n_K هي كثافة صنف أولي (داخل في التفاعل) (الصنف P في هذه الحالة).

وكمثال، لندرس بعض الآليات الخاصة (حيث إنّ n_i, n_e, n_o هي كثافات الجسيمات المعتدلة، والإلكترونات، والأيونات على الترتيب).

- التأين ((5.203) و (5.204)):

$$\begin{aligned} S_{e,i} = \left(\frac{\partial n_e}{\partial t}\right)_{c,i} &= k_c^{ion} n_o n_e \\ &= \nu_c^{ion} n_e \end{aligned} \qquad (5.233)$$

وأن:

$$\nu_c^{ion} = k_c^{ion} n_o \qquad (5.234)$$

حيث إنّ k_c^{ion} و ν_c^{ion} هما معاملا التأين وتواتره.

- إعادة الاتحاد ((4.130) - (4.136)):

$$-P_{e,i} = \left(\frac{\partial n_e}{\partial t}\right)_{c,i} = -k_c^{rec} n_i n_e \qquad (5.235)$$

$$= -\nu_c^{rec}\, n_e$$

وأن:

$$\nu_c^{rec} = k_c^{rec}\, n_i \qquad (5.236)$$

حيث k_c^{rec} و ν_c^{rec} هما معاملا إعادة الاتحاد وتواتره.

إنّ حد الصدم الإشعاعي يعبر عن تبادل الطاقة بين الجسيمات والإشعاع (الفقرتان 3.5.2 و 4.5). ويمكن أيضاً فصله إلى منابع $S_{K,r}$ و مفاقيد $P_{K,r}$ للجسيمات [32]:

$$\left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,r} = S_{K,r} - P_{K,r} \qquad (5.237)$$

من أجل مجموعة صنف واحد K للجسيمات المشحونة (أي دون الأخذ بالحسبان حالات الإثارة الداخلية)، يكون كلّ من التأين الفوتوني ((4.107)، (4.108)) وفك الالتصاق الفوتوني منبعاً للجسيمات، في حين أنّ إعادة الاتحاد الإشعاعي ((4.132) - (4.134)) تكون عبارة عن ضياع لها.

أمّا بالنسبة للجسيمات المعتدلة (وذلك بالتركيز على حالة إثارة معينة)، فإنّ الإثارة الفوتونية ((4.101)-(4.103)) هي منبع للجسيمات في حين أنّ إزالة الإثارة الفوتونية ((4.104)- (4.106)) وإزالة الإثارة التلقائية ((4.157) - (4.160)) هي عبارة عن ضياعات. وعلى سبيل المثال، تكتب إزالة الإثارة التلقائية لفوتون واحد (3.305):

$$-P_{K,r} = \left(\frac{\partial n_K}{\partial t}\right)_{c,r} = -A_{lk}\, n_K \qquad (5.238)$$

حيث إنّ n_K هي كثافة الذرات في حالة الإثارة l، و A_{lk} هو معامل أينشتاين للإصدار التلقائي.

5.4.2- حدود الصدم من أجل الإشعاع

إنّ حد الصدم في معادلة نقل الإشعاع (معادلة النقل الإشعاعي) يمكن أيضاً أن تكتب بشكل أوضح [60,32]. في فرضية أن تكون قرينة انكسار البلازما قريبة من الواحد، تكون سرعة انتشار الإشعاع w_ν مساوية لسرعة الضوء c ومنه تكتب المعادلة (5.114):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I_\nu(\vec{r},\vec{\Omega},t)+\vec{\Omega}.\vec{\nabla}_r\, I_\nu(\vec{r},\vec{\Omega},t)=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_c \tag{5.239}$$

حيث إنّ $\vec{\Omega}$ هو اتجاه الانتشار ($\vec{\Omega}$ هو شعاع الواحدة).

ويكتب معامل الصدم بالشكل:

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_c = j_\nu - k_\nu I_\nu \tag{5.240}$$

حيث j_ν و k_ν هما معاملا الإصدار والامتصاص.

تُعبِّر المعادلة (5.240) عن مجموع الآليات الإشعاعية التي تحدث عندما تنتشر الفوتونات في المادة؛ فهي تعبر عن التغير dI_ν للشدة النوعية عندما يجتاز الإشعاع السماكة cdt. المعامل j_ν يخص العمليات التلقائية في حين أنّ k_ν يخص الآليات المتعلقة بكثافة الطاقة الإشعاعية الموضعية (امتصاص، وإصدار محثوث). بفرض [60]:

$$j_\nu = j_{\nu_c} + \sum_{k,l} j_{kl} \tag{5.241}$$

$$k_\nu = k_{\nu_c} + \sum_{k,l} k_{kl} \tag{5.242}$$

حيث إنّ j_{ν_c} و k_{ν_c} هما معاملا الإصدار والامتصاص المؤلفين من إشعاع الكبح ((4.115) - (4.119)) وإشعاع الكبح العكسي ((4.120)،(4.121))، أما j_{kl} و k_{kl} فهما المعاملان الناتجان عن الانتقالات بين المستويات المكممة (طاقة الإثارة الداخلية للجسيمات).

يمكن التعبير عن j_{kl} و k_{kl} بعلاقتين تقريبيتين نحصل عليهما من التحليل البعدي البسيط، باستخدام عبارة الشدة النوعية بدلالة كثافة الطاقة الإشعاعية (3.273)، يستنتج (3.274):

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_c = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial t}\right) \tag{5.243}$$

وباستخدام التعريفين (5.109) و (5.111) يكون:

$$u_\nu = n_\nu < h\nu >$$

ومنه نحصل على:

$$\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial t}\right) = \frac{< h\nu >}{V}\left(\frac{\partial N_\nu}{\partial t}\right) \tag{5.244}$$

حيث إنّ V هو الحجم الذي يحتوي على N_ν فوتون.

ومنه نجد (5.243):

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_c = \frac{< h\nu >}{4\pi V}\left(\frac{\partial N_\nu}{\partial t}\right) \tag{5.245}$$

لنأخذ الإسكان التلقائي للسوية k انطلاقاً من السوية l (الشكل 3.11).

يكون لدينا (3.305):

$$d N_k = -d N_l = A_{lk} N_l \, dt \tag{5.246}$$

ومنه:

$$\frac{d N_k}{dt} = A_{lk} N_l \tag{5.247}$$

إنّ إسكان السوية k وإزالة إسكانها الناتجين عن كثافة الطاقة الإشعاعية الموضعية، يمكن الحصول عليهما من دراسة عمليتي الامتصاص اعتباراً من السوية k والإصدار المحثوث اعتباراً من المستوى l (الشكل 3.11). ومنه يستنتج ((3.303) و (3.304)) أن:

$$d N_k = B_{lk} N_l u_\nu dt - B_{kl} N_k u_\nu dt \tag{5.248}$$

وتصبح إذا أخذت بالحسبان (3.315) على النحو:

$$\frac{d N_k}{dt} = -B_{kl}\left(N_k - \frac{g_k}{g_l} N_l\right) u_\nu \tag{5.249}$$

ومنه أيضاً (3.274):

$$\frac{d N_k}{dt} = -B_{kl}\left(N_k - \frac{g_k}{g_l} N_l\right) \frac{4\pi}{c} I_\nu \tag{5.250}$$

وبالانتباه إلى أن (5.247) و (5.250) d متعلقان بالانتقال $k - l$، يمكن كتابة:

$$\frac{< h\nu >}{V} = h \nu_{kl} \phi_{kl}(\nu) \tag{5.251}$$

حيث $\phi_{kl}(\nu)$ هو تابع يعبر عن توزع الإشعاع بدلالة التواتر الناتج عن انتقال الجسيمات التي تصدر وتمتص الفوتونات.

ومنه يحصل على (5.245):

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_c = \frac{h\nu_{kl}}{4\pi}\left(\frac{\partial N_\nu}{\partial t}\right)\phi_{kl}(\nu) \qquad (5.252)$$

وبما أنَ عدد الفوتونات المُصدَرة (أو الممتصة) N_ν يساوي عدد الذرات N_k المُصدِرة أو الماصة، يمكن أن يستنتج المعامل j_{kl} انطلاقاً من (5.252) و (5.247):

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_c = \frac{h\nu_{kl}}{4\pi} A_{lk} N_l \phi_{kl}(\nu) \qquad (5.253)$$

ومنه (5.240):

$$j_{kl} = \frac{h\nu_{kl}}{4\pi} A_{lk} N_l \phi_{kl}(\nu) \qquad (5.254)$$

وبالطريقة نفسها نجد k_{kl} انطلاقاً من (5.252) و (5.250):

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t}\right)_c = -\frac{h\nu_{kl}}{c} B_{kl}\left(N_k - \frac{g_k}{g_l} N_l\right) I_\nu \phi_{kl}(\nu) \qquad (5.255)$$

ومنه (5.240):

$$k_{kl} = \frac{h\nu_{kl}}{c} B_{kl}\left(N_k - \frac{g_k}{g_l} N_l\right)\phi_{kl}(\nu) \qquad (5.256)$$