# النظرية الحركية وقوانين التوازن

## 1.3- مقدمة

بغية البرهان على القوانين المختلفة المسؤولة عن التوازن الترموديناميكي، سوف نفترض أنّ البلازما المدروسة متولدة من غاز معتدل محتويً ضمن حيز معزول عن الخارج.

في درجة حرارة الغرفة (300K) وبغياب المنبع الكهربائي لا تكون الطاقة الحركية المتوسطة للجسيمات كافية لتوليد الأزواج إلكترون-أيون بالتصادم. سنرى، أنّ درجة الحرارة الحركية للغاز يقابلها توزع الجسيمات بالطاقة، وبعض هذه الطاقات قد يكون أكبر بكثير من الطاقة المتوسطة. ومنه فإن وصف حالة غاز أو بلازما ما ينتج عن تحليل إحصائي: تكون حالة التوازن بدرجة حرارة معطاة مرتبطة بقانون توزع احتمال الحالات المدروسة.

حين تزداد درجة حرارة الغاز فإنّ تزايد الطاقة الحركية المتوسطة يسمح بنقل الطاقة بين الجسيمات بفضل التصادمات غير المرنة: حيث إنّ طاقتها الداخلية (الكامنة) تتغير، وتمتلئ السويات الأولى لدوران واهتزاز الجزيئات عندما تبلغ الطاقة الحرارية $\frac{1}{10}$ من الإلكترون فولت (الفصل الثاني، الفقرة 2.4.2). ومن أجل قيم أكبر من الإلكترون فولت، يمكن للحالات الإلكترونية أن تكون مشغولة؛ ومن أجل طاقات أعلى، تنتج تصادمات تفاعلية مؤدية إلى تولد أصناف جديدة (تأين، تكسير جزيئات، تفاعلات كيميائية).

من أجل كل درجة حرارة هناك حالة توازن تتعلق بالآليات الناتجة. ومن أجل درجة حرارة توازن حركية عالية نسبياً (بضعة إلكترون- فولت) يتأين الغاز

الابتدائي المعتدل، ويجب الأخذ بالحسبان، مجموعة العمليات التصادمية من النوع المرن وغير المرن والتفاعلي. وتتكون البلازما المتشكلة بهذه الطريقة من عدة أصناف تتحول بفضل التصادمات (تأين، تفكك، إعادة اتحاد) أو تثار (أو تزال إثارتها). يكون الوسط المدروس إذاً مؤلفاً من إلكترونات، وأيونات، وجسيمات معتدلة (ذرات وجزيئات وجذور)، ومن فوتونات كلها تتبادل الطاقة فيما بينها: تقود هذه الحالة إلى تعريف درجات حرارة توازن خاصة بكل آلية مدروسة. فالتوازن الترموديناميكي الكامل يعني درجة حرارة واحدة، مما يعني أن التصادمات المعنية هي تصادمات عكوسة ضمن بلازما متجانسة ومستقرة. هذه الحالة المثالية هي تقريب ضروري لحالة البلازما، وتتوصل الجملة لحالة التوازن بشكل أسرع كلما كانت التصادمات بين مختلف الأصناف من الجسيمات أكثر تواتراً وكلما كانت المقاطع الفعالة أكبر (سنعود لهذه المسألة في الفصل الرابع).

## 2.3- النظرية الحركية

### 1.2.3- معادلة التغير الميكروسكوبي للجسيمات

#### تابع التوزع الموضعي

لنعتبر جملة مؤلفة من N جسيم محتواة ضمن حجم V. وبفرض أنّ درجة الحرارة عالية بشكل كافٍ وأنّ الوسط ذو ضغط منخفض وذلك لكي تكون المتراجحة (1.16) محققة تكون الجسيمات ضمن هذه الشروط ممثلة بحزمة موجية متموضعة جيداً (ازدياد صغير بالنسبة للمسافة المتوسطة بين الجسيمات) وهذا يعني بأنه يمكن معالجتها بشكل تقليدي [9].

نبحث عن عدد الجسيمات $d^6N$ التي يكون شعاع موضعها بين $\vec{r}$ و $\vec{r}+d\vec{r}$ وشعاع سرعتها بين $\vec{w}$ و $\vec{w}+d\vec{w}$. هذا العدد متناسب مع:

- الحجم $d^3r$ الذي يحتوي نهاية الشعاع $\vec{r}$ في فراغ الموضع.
- الحجم $d^3w$ الذي يحتوي نهاية الشعاع $\vec{w}$ في فراغ السرع.

ومنه:

$$d^6N \propto d^3r\, d^3w \qquad (3.1)$$

وتكون معادلة الأبعاد محققة للعلاقة (3.1) باستخدام معامل تناسب يدعى تابع التوزع ويكتب $f(\vec{r},\vec{w},t)$ :

$$f(\vec{r},\vec{w},t)=\frac{d^6N}{d^3rd^3w} \qquad (3.2)$$

يمثل هذا التابع توزع السرعات الموضعي للجسيمات الموجودة في اللحظة t في الحجم $d^3r$ [32 , 33]. أثناء الزمن يتحرك الـ N جسيم في الفراغ، ويمكن لسرعاتها أن تتغير بفعل القوى الخارجية المطبقة عليها. وفي اللحظة $t'>t$ يمكن أن نكتب:

$$d^6N'=f(\vec{r}',\vec{w}',t')d^3r'd^3w' \qquad (3.3)$$

ويمكن وصف هذه الحركات في فراغ السرع وفراغ الموضع، بافتراض أن:

$$\begin{aligned}\delta t&=t'-t\\ \delta\vec{r}&=\vec{r}'-\vec{r}=\vec{w}\delta t\\ \delta\vec{w}&=\vec{w}'-\vec{w}=\vec{\gamma}\delta t=\frac{\vec{F}}{m}\delta t\end{aligned} \qquad (3.4)$$

حيث نسمي $\vec{\gamma}$ التسارع الذي تخضع له الجسيمات ذات الكتلة m تحت تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$.

بغياب التصادمات، تصبح جميع الجسيمات الموجودة في اللحظة t ضمن العنصر فوق الحجمي (عنصر حجمي سداسي الأبعاد). $d^3rd^3w$ تتواجد في اللحظة $t'$ ضمن العنصر $d^3r'd^3w'$ أي:

$$d^6N=d^6N' \qquad (3.5)$$

حيث إنّ تغير الزمن المعتبر $\delta t$ صغير جداً، ونلفت النظر إلى أنَّ (نظرية دي ليوفيل) [1] الحجم العنصري سداسي الأبعاد في الفراغ الطوري يبقى محفوظاً أي:

$$d^3rd^3w=d^3r'd^3w' \qquad (3.6)$$

ويمكن الوصول بسهولة إلى هذه النتيجة بملاحظة أنَّ التغير $\delta\vec{r}.\delta\vec{w}$ (3.4) بالحجم الابتدائي هو عبارة عن نشر من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن ($\delta t^2$).

بتعويض (3.2) و (3.3) في (3.5) نجد، وبعد الأخذ بالحسبان (3.6) أنَّ:

$$f(\vec{r},\vec{w},t)=f(\vec{r}',\vec{w}'t') \qquad (3.7)$$

أو أيضاً:

$$f(\vec{r},\vec{w},t) = f(\vec{r}+\vec{w}\delta t, \vec{w}+\frac{\vec{F}}{m}\delta t, t+\delta t) \qquad (3.8)$$

إن نشر المعادلة (3.8) في سلسلة تايلور يعطي معادلة بولتزمان من دون طرف أيمن:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{w}.\vec{\nabla}_r+\frac{\vec{F}}{m}.\vec{\nabla}_w\right) f(\vec{r},\vec{w},t)=0 \qquad (3.9)$$

وفي حال غياب التصادمات، يسمح حل هذه المعادلة بتعيين تابع التوزع الموضعي $f(\vec{r},\vec{w},t)$ بوجود قوة خارجية.

في الحالة العملية، حين تتحرك الجسيمات فإنها تخضع لتصادمات تغير توزعها الفراغي وسرعاتها. وهكذا يتأثر تابع توزعها ويجب إتمام المعادلة (3.9) بإضافة حدود منبع (توليد) وضياع (خسارة). وتكتب المحصلة (3.8) على النحو التالي:

$$f\left(\vec{r}+\vec{w}\,\delta t, \vec{w}+\frac{\vec{F}}{m}\delta t, t+\delta t\right) = f(\vec{r},\vec{w},t)+\delta f(\vec{r},\vec{w},t) \qquad (3.10)$$

حيث $\delta f(\vec{r},\vec{w},t)$ هو التصحيح الناتج عن التصادم. بفرض:

$$\delta f(\vec{r},\vec{w},t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c \delta t \qquad (3.11)$$

تصبح المعادلة (3.9):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{w}.\vec{\nabla}_r+\frac{\vec{F}}{m}.\vec{\nabla}_w\right) f(\vec{r},\vec{w},t)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c \qquad (3.12)$$

هذه العلاقة محققة من أجل كل جسيم مادي.

ويعرف في البلازما تابع توزع من أجل كل صنف من الجسيمات، ولقد جرى في الحالة العملية تبني الترميز التالي:

- كل صنف (إلكترونات، وأيونات، وجسيمات معتدلة) سوف يميز بالدليل K.
- الجسيمات من صنف معين الواقعة في حالة داخلية طاقتها $E_i$ سوف تميز بالدليل i.

وبالتالي يكتب تابع التوزع الموضعي لمجموعة الجسيمات من الصنف K ذات الطاقة الداخلية $E_i$ :

$$f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)$$

وبما أنّ هذا التابع هو حل لمعادلة التغير (3.12) يكون لدينا:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{w}_{Ki}.\vec{\nabla}_r+\frac{\vec{F}_{Ki}}{m_K}.\vec{\nabla}_w\right)f_{Ki}(\vec{r},\vec{w},t)=\left(\frac{\partial f_{Ki}}{\partial t}\right)_c \tag{3.13}$$

يحصل على الوصف الميكروسكوبي للبلازما بكتابة مجموعة المعادلات الخاصة بكل صنف كما ذكر سابقاً. وتكون هذه المعادلات مترابطة فيما بينها بفعل التصادم، والتي تأخذ بالحسبان العمليات المرنة وغير المرنة التي تحصل بين جميع مركبات البلازما (إلكترونات، أيونات، جسيمات معتدلة، فوتونات) [32، 33].

وتغير التصادمات المرنة توزع السرعات من دون أي تغيير لطبيعة الجسيمات أو لحالتها الداخلية. أمّا التصادمات غير المرنة فيمكن أن تغير الصنف K (تأين، تفكك، التصاق) وحالة الإثارة الداخلية i (ستدرس هذه الآليات بالتفصيل في الفصل الرابع).

**معادلة بولتزمان**

إن ملاحظات الفقرة السابقة تظهر بوضوح أنّ الجملة (3.13) غير خطية بسبب التصادمات التي تربط المعادلات بعضها بعضاً[34]. ولتسهيل الدراسة، سوف نفرض أن التصادمات غير المرنة أقل تواتراً من التصادمات المرنة. وسنقبل أنها لا تساهم إلاّ قليلاً بتغيرات تابع التوزع الموضعي $f(\vec{r},\vec{w},t)$ ، مما يجعل هذه الدراسة مقتصرة على صنف واحد، مما يسمح بالتخلي عن الدليلين K و i.

لنعتبر، ضمن هذه الشروط، التصادمات المرنة لجسيمات من الصنف نفسه ذات سرعات ابتدائية $\vec{w}_1$ و $\vec{w}_2$ ، وذات سرعات نهائية $\vec{w}'_1$ و $\vec{w}'_2$ . عندئذ يكون:

$$\begin{aligned} f_1 &= f(\vec{r},\vec{w}_1,t) \\ f_2 &= f(\vec{r},\vec{w}_2,t) \end{aligned} \tag{3.14}$$

تابعا توزعها قبل الصدم.

و:

$$f'_1 = f(\vec{r}, \vec{w}'_1, t) \quad (3.15)$$
$$f'_2 = f(\vec{r}, \vec{w}'_2, t)$$

تابعا توزعها بعد الصدم.

تكتب معادلة بولتزمان بوجود طرفٍ ثانٍ (3.12) من أجل جسيمات شعاع موضعها $\vec{r}$ وشعاع سرعتها $\vec{w}_1$ واقعة ضمن الحجم $d^3r\, d^3w_1$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}_1.\vec{\nabla}_r + \frac{\vec{F}}{m}.\vec{\nabla}_{w_1}\right) f_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_c \quad (3.16)$$

ويمكن تجزئة حد التصادم $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_c$ إلى جزأين:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_c = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_+ - \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_- \quad (3.17)$$

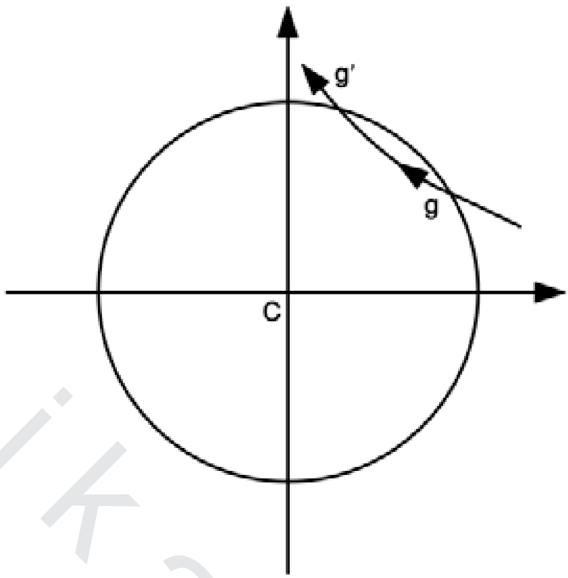
حيث يمثل التغيران $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_+$ و $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_-$ بالترتيب منابع توليد ومصارف ضياع الجسيمات ذات شعاع الموضع $\vec{r}$ والسرعة $\vec{w}_1$ المحتواة في الحجم $d^3r\, d^3w_1$. تمثل المنابع بالجسيمات التي تكون سرعتها بعد التصادم $\vec{w}'_1$، في حين تمثل المصارف بالجسيمات التي تكون سرعتها $\vec{w}_1$ قبل التصادم.

من أجل حساب $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_c$ سوف نفرض ما يلي:

- الكثافة قليلة بما يكفي لكي لا نأخذ بالحسبان إلاّ التصادمات بين جسمين.
- القوى الخارجية ليس لها تأثير في التصادمات (وبالأخص، أنّ المقطع الفعال للتصادم لا يكون متأثراً بأي فعل خارجي).
- منطقة التصادم معزولة عن باقي الجملة وبعيدة عن جدران الوعاء الحاوي.
- سرعة الجسيمات غير مرتبطة بموضعها (فرضية الشواش الجزيئي).

وبالتالي يمكن تمثيل التصادم بين جسيمين بجسيم وهمي (الشكل 2.4) يتحرك بالنسبة لمركز الكتلة. ويمكن إذاً تعريف كرة تفاعل متمركزة في C

(الشكل 3.1) تمثل الحجم $d^3r$ ، الذي يحتوي رأس شعاع الموضع $\vec{r}$ لكلا الجسيمين اللذين يتبادلان التأثير.




الشكل 3.1

يدخل هذا الجسيم ضمن الحجم بسرعة نسبية g ويخرج بسرعة نسبية g' حيث:

$$\begin{aligned} g &= \left|\vec{w}_2 - \vec{w}_1\right| \\ g' &= \left|\vec{w}'_2 - \vec{w}'_1\right| \end{aligned} \qquad (3.18)$$

لا تتغير السرعة النسبية أثناء عملية الصدم، بفضل انحفاظ العزم الحركي للحركة النسبية (2.22)، أي أن:

$$g = g' \qquad (3.19)$$

كما تبقى الحجوم الأولية محفوظة أيضاً في فضاء السرع [9]:

$$d^3w_1 \; d^3w_2 = d^3w'_1 \; d^3w'_2 \qquad (3.20)$$

نلاحظ من الشكل 3.1، أنه يمكن التحرك على المسار الوهمي، إما بالاتجاه المباشر (ضياع)، أو بالاتجاه المعاكس (منبع). ويمكن الوصول إلى حصيلة الضياع باستخدام العلاقة (2.89):

$$d^3N = \sigma(g,\theta,\varphi)n_1 \; n_2 \; g \; dt \; dV \, d\Omega \qquad (3.21)$$

يعتبر $dV$ هنا، أنه الحجم $d^3r$ المعد لوصف التصادم الثنائي. وتعرف كثافة الجسيمات بالعلاقة (1.32):

$$n(\vec{r},t)=\frac{d^3N}{d^3r} \tag{3.22}$$

يمكن أيضاً أن نكتب (3.2) على النحو:

$$n(\vec{r},t)=\iiint f(\vec{r},\vec{w},t)d^3w \tag{3.23}$$

في الواقع، تمثل العلاقة (3.21) جميع الجسيمات من صنف واحد، التي يمكنها مغادرة الحجم $dV$ أثناء الزمن $dt$، وبالإمكان ملاحظتها ضمن الزاوية الصلبة $d\Omega$. بغية التمييز بين مختلف أنواع السرع، يجب الأخذ بالحسبان فقط الجسيمات ذات السرعتين الابتدائيتين $\vec{w}_1$ و $\vec{w}_2$، أي:

$$\begin{aligned} d^3n_1 &= f_1(\vec{r},\vec{w}_1,t)\,d^3w_1 \\ d^3n_2 &= f_2(\vec{r},\vec{w}_2,t)\,d^3w_2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

ويعطى عدد الجسيمات الخارجة من الحجم $dV$، التي تكون رؤوس أشعة سرعاتها قبل الصدم محتواة في الحجمين $d^3w_1\ d^3w_2$ حسب (3.21) بالعلاقة:

$$d^{11}N_-=\sigma(g,\theta,\varphi)d^3n_1d^3n_2\,g\,dt\,d^3r\,d\Omega \tag{3.25}$$

وحسب (3.24) يكون:

$$d^{11}N_-=\sigma(g,\theta,\varphi)\ f_1\,d^3w_1\ f_2\,d^3w_2\,g\,dt\,d^3r\,d\Omega \tag{3.26}$$

ويحسب مجموع الضياعات من أجل السرع $\vec{w}_1$ بالمكاملة على السرع $\vec{w}_2$ وعلى الزاوية الصلبة، أي:

$$d^7N_-=d^3w_1\ d^3r\ dt\int d\Omega\iiint\sigma(g,\theta,\varphi)\ g\ f_1\ f_2\ d^3w_2 \tag{3.27}$$

ومنه يكون حد الضياع:

$$\frac{d^7N_-}{d^3w_1\ d^3r}=dt\int d\Omega\iiint\sigma(g,\theta,\varphi)\ g\ f_1\ f_2\ d^3w_2 \tag{3.28}$$

إن العلاقة (3.28) لها أبعاد تابع توزع موضعي (3.2)، وبفرض أن:

$$df_-=\frac{d^7N_-}{d^3w_1\ d^3r} \tag{3.29}$$

نحصل على:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_- = \int d\Omega \iiint \sigma(g,\theta,\varphi)\, g\, f_1\, f_2\, d^3 w_2 \qquad (3.30)$$

ويمكن حساب حد المنبع بشكل مماثل بأخذ التصادم المعاكس (الشكل 3.1). ويكون لدينا في هذه الحالة:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_+ = \int d\Omega \iiint \sigma(g',\theta,\varphi)\, g'\, f'_1\, f'_2\, d^3 w'_2 \qquad (3.31)$$

تكون الجسيمات الداخلة في كرة التصادم، ذات تابعي توزع موضعي $f'_1$ و $f'_2$ وسرعتين $\vec{w}'_1$ و $\vec{w}'_2$. وبأخذ العلاقتين بالحسبان (3.19) و (3.20)، وإذا لم يتغير المقطع الفعال، نجد:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_+ = \int d\Omega \iiint \sigma(g,\theta,\varphi)\, g\, f'_1\, f'_2\, d^3 w_2 \qquad (3.32)$$

بجمع النتائج (3.17)، (3.30)، (3.32) يكون:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_C = \int d\Omega \iiint \sigma(g,\theta,\varphi)\, g\, (f'_1\, f'_2 - f_1\, f_2)\, d^3 w_2 \qquad (3.33)$$

المعروف بتكامل الصدم.

وتصبح أخيراً معادلة بولتزمان بوجود طرف ثانٍ (3.16) على النحو:

(3.34)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{w}_1.\vec{\nabla}_r + \frac{\vec{F}}{m}.\vec{\nabla}_{w_1}\right) f_1 = \int d\Omega \iiint \sigma(g,\theta,\varphi)\, g\, (f'_1\, f'_2 - f_1\, f_2)\, d^3 w_2$$

هذه النتيجة صالحة من أجل جميع الجسيمات المادية في البلازما ضمن تقريب التصادمات المرنة.

### 2.2.3- معادلة التغير الميكروسكوبي للفوتونات

لتكن جملة مؤلفة من $N_\nu$ فوتون محتواة ضمن حجم V. باتباع معالجة مشابهة لما ورد في الفقرة السابقة، يمكن تعريف تابع توزع موضعي للفوتونات، يرمز له بـ $f_\nu(\vec{r}, p_\nu, t)$ [33,32]. وكتقريب أولي يمكن أن يهمل الحد الخاص بالقوة في المعادلة (3.12) فتصبح معادلة بولتزمان للفوتونات على النحو:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{w}_v.\vec{\nabla}_r\right)f_v(\vec{r},p_v,t)=\left(\frac{\partial f_v}{\partial t}\right)_c \qquad (3.35)$$

حيث إنّ $\vec{w}_v$ هي سرعة انتشار الإشعاع في الوسط و $p_v$ هي اندفاع الفوتونات.

يمثل الطرف الثاني حد الصدم. وهو يخص العمليات الإشعاعية، ويأخذ بالحسبان الأفعال المتبادلة مع جسيمات الوسط، والتبادلات الحاصلة أثناء عمليات الصدم غير المرن.

## 3.3- التوزعات الإحصائية المستمرة للجسيمات

### 1.3.3- تابع توزع السرعات

ليكن لدينا بلازما محتواة في وعاء مغلق درجة حرارة جدرانه T ثابتة. وبسبب تصادم الجسيمات المتعددة فيما بينها، ومع جدران الوعاء تتشكل حالة توازن ترموديناميكي. يسعى تابع التوزع لكل صنف في البلازما نحو تابع توزع ما، حيث إنّ الزمن اللازم للوصول إلى هذه الحالة يتعلق بتواتر الصدم بين الجسيمات.

يمكن الحصول على تابع التوزع الخاص هذا بحل معادلة بولتزمان الميكروسكوبية للنقل (3.34)، بشرط أن تستخدم الفرضيات التالية [33,32,9,1]:

- الجسيمات غير خاضعة لقوى خارجية $(\vec{F}=0)$.
- تضمن التصادمات المرنة التوزع المتساوي للطاقة [11,5] ضمن البلازما، ومنه تكون حالة الجملة مستقرة حين تصل إلى حالة التوازن أي $\left(\frac{\partial f}{\partial t}=0\right)$.
- تكون تبادلات الطاقة الحركية والاندفاع متماثلة وسطياً في كل نقطة في الفراغ، ومنه ينتج أن تابع التوزع في حالة التوازن بالموضع $\vec{r}$ أي $(\vec{\nabla}_r f=0)$.

تكتب معادلة بولتزمان ضمن هذه الشروط (3.34) على النحو:

$$0=\int d\Omega \iiint \sigma(g,\theta,\varphi)g\left[f_o(\vec{w}'_1)f_o(\vec{w}'_2)-f_o(\vec{w}_1)f_o(\vec{w}_2)\right]d^3w_2 \qquad (3.36)$$

حيث $f_o(\vec{w})$ هو تابع توزع السرعات في حالة التوازن الترموديناميكي.

تكون المساواة (3.36) محققة بفرض أنّ:

$$f_o(\vec{w}_1)\,f_o(\vec{w}_2)=f_o(\vec{w}'_1)\,f_o(\vec{w}'_2) \qquad (3.37)$$

أو:

$$\ln f_o(\vec{w}_1) + \ln f_o(\vec{w}_2) = \ln f_o(\vec{w}'_1) + \ln f_o(\vec{w}'_2) \qquad (3.38)$$

تُعبِّر هذه المعادلة عن انحفاظ تابع التوزع في حالة التوازن أثناء عملية الصدم. تماثل هذه النتيجة قوانين انحفاظ الطاقة الحركية (2.27) والاندفاع (كمية الحركة) (2.14) أثناء عملية تصادم مرن أي:

$$\frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 w'^2_2 \qquad (3.39)$$

$$m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2 = m_1 \vec{w}'_1 + m_2 \vec{w}'_2 \qquad (3.40)$$

وبالتالي فإنّ هناك خمسة توابع يمكن أن تحقق المساواة (3.38):

$$\begin{aligned} \ln f_0(\vec{w}) &= \text{constante} \\ &= mw_x, mw_y, mw_z \\ &= \frac{1}{2} mw^2 \end{aligned} \qquad (3.41)$$

وكل عبارة خطية من هذه التوابع هي أيضاً حل للمعادلة (3.38)، بفرض أنّ:

$$\ln f_o(\vec{w}) = \ln A - B(\vec{w} - \vec{w}_o)^2 \qquad (3.42)$$

حيث A و B والمركبات الثلاثة لـ $\vec{w}_o$ هي ثوابت كيفية تحدد بالشروط الفيزيائية للتوازن. وعليه يكون:

$$f_o(\vec{w}) = A \exp\left[-B(\vec{w} - \vec{w}_o)^2\right] \qquad (3.43)$$

تُحسب انطلاقاً من المعادلة (3.23)، الكثافة المتوسطة للصنف المعتبر:

$$\bar{n} = \iiint f_o(\vec{w})\, d^3w \qquad (3.44)$$

ويمكن أن يكتب:

$$\bar{n} = A\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-B(w-wo)_x^2}\, d(w - w_o)_x\right]^3 \qquad (3.45)$$

أو [35]:

$$\bar{n} = A\left(\frac{\pi}{B}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (3.46)$$

مما يسمح بالتحقق أنّ B هو ثابت موجب.

كما تسمح العبارة (3.44) بإعطاء معنىً فيزيائياً لتابع التوزع في حالة التوازن $f_o(\vec{w})$ بكتابة:

$$\iiint \frac{1}{\bar{n}} f_o(\vec{w})\, d^3w = 1 \qquad (3.47)$$

ويمثل المقدار:

$$d^3 P_s = \frac{1}{\bar{n}} f_o(\vec{w})\, d^3w \qquad (3.48)$$

إذاً احتمال وجود جسيم شعاع سرعته يتراوح بين $\vec{w}$ و $\vec{w} + d\vec{w}$ . وانطلاقاً من تعريف الاحتمال (3.48) تُحسب السرعة المتوسطة [36]:

$$< \vec{w} > = \iiint \vec{w}\, d^3 P_s \qquad (3.49)$$

أو:

$$< \vec{w} > = \frac{1}{\bar{n}} \iiint \vec{w}\, f_o(\vec{w})\, d^3 w \qquad (3.50)$$

وتصبح المعادلة باستخدام $\vec{w}_o$ و $f_o(\vec{w})$ :

$$\begin{aligned} < \vec{w} > &= \frac{A}{\bar{n}} \iiint (\vec{w}-\vec{w}_o) e^{-B(w-w_o)^2} d^3w \\ &+ \frac{1}{\bar{n}} \iiint \vec{w}_o f_o(\vec{w}) d^3w \end{aligned} \qquad (3.51)$$

يكون الحد الأول معدوماً بسبب تنحي الوسط [11] ويعبر عن الحد الثاني بملاحظة أنّ $\vec{w}_o$ ثابت، وباستخدام (3.47) يكون:

$$< \vec{w} > = \vec{w}_o \qquad (3.52)$$

إذاً المقدار $\vec{w}_o$ هو السرعة المتوسطة للجسيمات. وبما أنه فرضنا أنّ البلازما محتواة ضمن وعاء مغلق، فليس لها إذاً حركة انسحابية كلية، ومنه فإنّ سرعتها المتوسطة معدومة:

$$\vec{w}_o = 0$$

وأخيراً تعين الطاقة الحركية المتوسطة بحساب:

$$< K > = \iiint \frac{1}{2} m\, w^2\, d^3 P_s \qquad (3.53)$$

باستخدام (3.48) يُحصل على:

$$< K > = \frac{m}{2\bar{n}} \iiint w^2\, f_o(\vec{w})\, d^3 w \qquad (3.54)$$

بأخذ (3.43) و (3.46) يكون:

$$f_o(w) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \bar{n}\, e^{-B w^2} \tag{3.55}$$

ومنه:

$$< K > = \frac{m}{2}\left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} w^2\ e^{-B w^2}\ 4\pi\ w^2\ dw \tag{3.56}$$

باستخدام التناظر الكروي للتعبير عن $d^3w$ . نجد أن [35,11]:

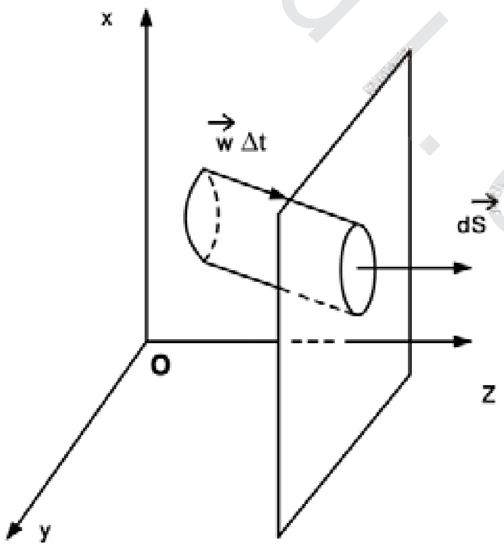
$$< K > = \frac{3}{4}\ \frac{m}{B} \tag{3.57}$$

يمكن تعيين الثابت B بالتعبير عن الطاقة الحركية المتوسطة كتابع للضغط P المطبق من قبل الجسيمات على جدران الوعاء. لنعتبر جسيمات ذات سرعة كيفية $\vec{w}$ تتحرك نحو جدار عمودي على المحور Oz (الشكل 3.2) وأثناء عملية التصادم المرن، يكون الاندفاع المعطى للجدار من قبل جسيم ذي سرعة $\vec{w}$ هو [11]:

$$\Delta p_z = 2\, m\, w_z \tag{3.58}$$

تشكل الجسيمات ذات السرعة $\vec{w}$ التي ترد إلى السطح العنصري $d\vec{S}$ أثناء زمن $\Delta t$ أسطوانة ذات حجم (الشكل 3.2) يعبر عنه بالعلاقة:

$$dV = dS\ w_z\ \Delta t \tag{3.59}$$



الشكل 3.2

وتُعطى كثافة الجسيمات ذات السرعة $\vec{w}$ بالعلاقة (3.24) أي:

$$d^3n = f_o(w)\, d^3w \qquad (3.60)$$

يساوي عدد الجسيمات المحتوى ضمن الحجم dV إلى:

$$d^4N = dS\, w_z\, \Delta t\, f_o(w)\, d^3w \qquad (3.61)$$

ومنه فإن الضغط المطبق على الجدار من قبل الجسيمات ذات هذا الصنف من السرعة هو:

$$d^3P = \frac{\Delta p_z}{\Delta t}\frac{d^4N}{dS} \qquad (3.62)$$

ويعبر عنه بـ:

$$d^3P = 2m w_z^2\; f_o(w)\, d^3w \qquad (3.63)$$

ويُحصل على الضغط الكلي من المكاملة على كل السرعات التي تكون مركبتها $w_z$ موجبة (متجهة نحو الجدار). وباستخدام $f_o(w)$ من العلاقة (3.55) يكون:

$$p = 2\bar{n}\, m\left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} w_z^2\, e^{-Bw_z^2}\, dw_z \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bw_x^2} dw_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bw_y^2} dw_y \qquad (3.64)$$

ومنه [35,11]:

$$P = \frac{\bar{n}\, m}{2B} \qquad (3.65)$$

باستبدال B في العلاقة (3.57) نجد (علاقة برنولي):

$$< K > = \frac{3}{2}\frac{P}{\bar{n}} \qquad (3.66)$$

تُعطى، تجريبياً، معادلة الحالة لغاز كامل في حالة التوازن الترموديناميكي [5] بالعلاقة:

$$P = \bar{n}\, k\, T \qquad (3.67)$$

ومنه نستنتج التوزع المتساوي للطاقة (3.66):

$$< K > = \frac{3}{2}\, k\, T \qquad (3.68)$$

وكذلك عبارة الثابت B (3.65):

$$B = \frac{m}{2kT} \tag{3.69}$$

ومنه يكتب تابع التوزع (3.55) في حالة التوازن على النحو:

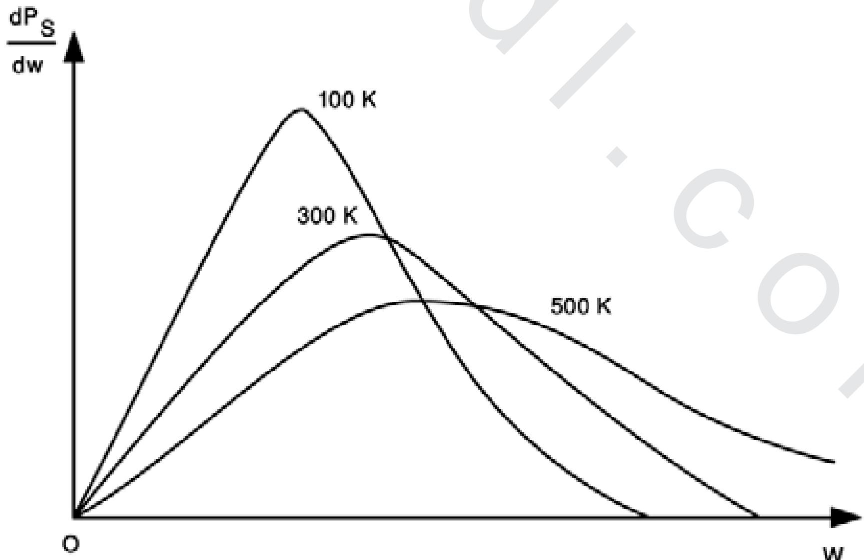
$$f_o(w) = \bar{n}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-mw^2/2kT} \tag{3.70}$$

الذي يعرف باسم توزع ماكسويل - بولتزمان.

يصبح احتمال أن نجد جسيماً سرعته واقعة بين w و w + dw ، مع أخذ تنحي الوسط بالحسبان معطى بالعلاقة:

$$dP_s = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-mw^2/2kT} 4\pi\, w^2\, dw \tag{3.71}$$

يمثل الشكل 3.3 تغيرات $dP_s / dw$ من أجل درجات حرارة مختلفة. نلاحظ أن انخفاضاً في درجة الحرارة يترافق بتزايد احتمالات السرعات الضعيفة، ويتناقص عرض التوزع عند منتصف الارتفاع. وفي درجات الحرارة الأكثر ارتفاعاً، نلاحظ أن التابع يمتد أكثر على محور السرعة، مع بقاء السطح تحت المنحني ثابتاً (3.47).




الشكل 3.3

### 2.3.3- تابع توزع الحقل الكهربائي

بإمكاننا دائماً، في بلازما ما، أن نعين في نقطة اختيارية الحقل الكهربائي الناتج عن توزع الجسيمات المشحونة. في الحالة العملية، نجزئ حساب الحقل الميكروي إلى جزأين:

- الجزء الأول (التواترات أو الترددات العالية): ناتج عن الإحصاء على إلكترونات تكون درجة حرارتها عالية بشكل عام.

- الجزء الثاني (التواترات المنخفضة): ناتج عن توزع الأيونات ذات درجة الحرارة الأخفض بكثير.

تكون الطريقة الإحصائية نفسها لكل مركبة من المركبتين.

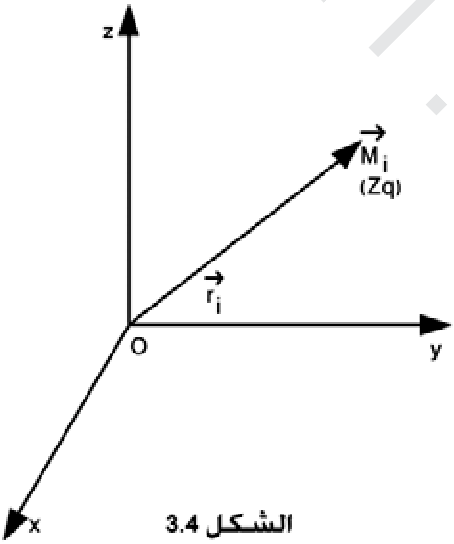
ليكن $\vec{E}_i$ الحقل الكولوني في نقطة ما **O** (الشكل 3.4) الناتج عن جسيم مشحون $(Zq)$ الواقع على مسافة $\vec{r}_i$ من **O**:

$$\vec{E}i = \frac{-Zq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \qquad (3.72)$$

وتكون محصلة الحقل في هذه النقطة:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i \qquad (3.73)$$

حيث N هي عدد الجسيمات المشحونة.




الشكل 3.4

ليكن $P_s(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N)$ هو احتمال وجود الجسيم 1 في النقطة $M_1$ ، والجسيم 2 في النقطة $M_2$ ...إلخ. وبما أنّ $\vec{E}$ يتعلق بتوزع الشحنات في الفراغ، نعرف تابع توزع الحقل $W(\vec{E})$ على النحو:

$$W(\vec{E}) = \int_1\int_2 ... \int_N \delta\left(\vec{E} - \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\right) P_s(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N)\, d^3r_1...d^3r_N \qquad (3.74)$$

يتناسب هذا التابع مع احتمال وجود حقل كهربائي بين $\vec{E}$ و $\vec{E}+d\vec{E}$ في النقطة **O**. تكتب $P_s(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N)$ كتقريب أولي من أجل جملة جسيمات مستقلة عن بعضها بالشكل:

$$P_s(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N) = P_s(\vec{r}_1)P_s(\vec{r}_2)...P_s(\vec{r}_N) \qquad (3.75)$$

الفرضية السابقة صالحة من أجل وسط مخلخل بشكل كافٍ، لكي تكون التأثيرات المتبادلة بين الجسيمات مهملة، وبالتالي لا تؤثر في حساب الحقل الكهربائي في المبدأ **O**. حين يوجد جسيم واحد من N جسيم (N>>1) في هذه النقطة، نعبر عن الشرط (3.75) باستخدام تابع الترابط الزوجي (أو الثنائي) $g(\vec{r}_i)$ بين الشحنة المركزية وباقي النقاط المشحونة في الفراغ، والتي يفترض بأنها غير مترابطة بين بعضها بعضاً (1.107 -1.109) كالتالي:

$$P_s(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N) = \frac{1}{V^N}\prod_{i=1}^{N} g(\vec{r}_i) \qquad (3.76)$$

تبقى هذه العبارة صالحة في جميع حالات البلازما ضعيفة الترابط وتُبسَّط ضمن الشروط التالية:

- إذا كانت الترابطات مع الشحنة المركزية مهملة ( $g(\vec{r}_i) = 1$ الشكل 1.4).
- إذا لم يكن هناك جسيم مشحون في المبدأ O (تابع الترابط مساوٍ للواحد لأن طاقة الفعل المتبادل U بين النقاط O و $M_i$ معدومة (1.114)).

ومنه نجد:

$$P_s(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N) = \frac{1}{V^N} \qquad (3.77)$$

يكتب التوزع (3.74) كتقريب أول:

$$W(\vec{E})=\frac{1}{V^N}\int_1\int_2\ldots\int_N \delta\left(\vec{E}-\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\right)\prod_{i=1}^{N} g(\vec{r}_i)\,d^3r_1\ldots d^3r_N \qquad (3.78)$$

بغية تسهيل عملية حساب $W(\vec{E})$ ندخل تحويل فورييه:

$$F(\vec{k}) = \iiint \exp(i\vec{k}.\vec{E})\,W(\vec{E})\,d^3E \qquad (3.79)$$

ومنه بالمكاملة على الحقل:

$$F(\vec{k})=\frac{1}{V^N}\int_1\int_2\ldots\int_N \exp\left(i\vec{k}.\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\right)\prod_{i=1}^{N} g(\vec{r}_i)\,d^3r_1\ldots d^3r_N \qquad (3.80)$$

وبكتابة التابع الأسي كجداء حدود نجد N حداً متشابهاً:

$$F(\vec{k})=\left(\frac{1}{V}\iiint \exp(i\vec{k}.\vec{E})\,g(\vec{r})\,d^3r\right)^N \qquad (3.81)$$

وبكتابة تابع الترابط (1.114):

$$g(\vec{r}) = 1+(e^{-U/kT}-1) \qquad (3.82)$$

ومنه نحصل من (3.81) على:

$$F(\vec{k}) = F_o(\vec{k})\,(1+\varepsilon_g)^N \qquad (3.83)$$

بفرض أنّ:

$$F_o(\vec{k})=\left(\frac{1}{V}\iiint \exp\left(i\vec{k}.\vec{E}\right)d^3r\right)^N \qquad (3.84)$$

$$\varepsilon_g = \frac{\iiint\left(e^{-U/kT}-1\right)\exp\left(i\vec{k}.\vec{E}\right)d^3r}{\iiint \exp(i\vec{k}.\vec{E})\,d^3r} \qquad (3.85)$$

الحد الأخير هو تصحيح ناتج عن الترابطات الثنائية.

يُحسب $F_o(k)$ بالمكاملة على الزوايا بفرض أن البلازما متناحية [15]:

$$F_0(k)=\left(\frac{4\pi}{V}\int\frac{\sin(kE)}{kE}r^2dr\right)^N \qquad (3.86)$$

وتكتب هذه العبارة أيضاً:

$$F_0(k)=\left[\frac{4\pi}{V}\int r^2dr-\frac{4\pi}{V}\int\left(1-\frac{\sin(kE)}{kE}\right)r^2dr\right]^N \qquad (3.87)$$

بإدخال:

$$E = \frac{Zq}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2} \tag{3.88}$$

واستخدام تغيير المتحول:

$$u = k\ E \tag{3.89}$$

نحصل على العلاقة التالية (حيث u هو متحول لا بعدي):

$$F_o(k) = \left[1 - \frac{2\pi}{V}\left(\frac{Zq\,k}{4\pi\varepsilon_o}\right)^{3/2}\int_0^\infty\left(1 - \frac{\sin u}{u}\right)\frac{du}{u^{5/2}}\right]^N \tag{3.90}$$

بملاحظة أنّ [35]:

$$\int_0^\infty\left(1 - \frac{\sin u}{u}\right)\frac{du}{u^{5/2}} = \frac{4}{15}(2\pi)^{1/2} \tag{3.91}$$

نجد حين تسعى N نحو اللانهاية أن:

$$F_o(k) = \exp\left[-\frac{\sqrt{2}}{15}\,\overline{n}\left(\frac{Zq\,k}{\varepsilon_o}\right)^{3/2}\right] \tag{3.92}$$

حيث $\overline{n}$ هي الكثافة المتوسطة لحاملات الشحنة (1.17):

$$\overline{n} = \frac{N}{V} \tag{3.93}$$

ويمكن أيضاً تبسيط العلاقة (3.92) بإدخال حقل استنظام هولتسمارك Holtsmark:

$$E_o = \frac{q}{4\pi E_o}\frac{1}{r_o^2} \tag{3.94}$$

حيث $r_o$ المسافة المعرفة بالعلاقة:

$$\frac{4}{15}(2\pi)^{3/2}\ \overline{n}_e\, r_o^3 = 1 \tag{3.95}$$

ومنه:

$$E_o = \left(\frac{4}{15}\right)^{2/3}\frac{q}{2\varepsilon_o}\overline{n}_e^{2/3} \tag{3.96}$$

نلاحظ أنّ العلاقة (3.95) قريبة جداً من العلاقة (1.88)؛ حيث إنّ $E_o$ مساوٍ عملياً للحقل $E_e$ الناتج عن إلكترون من البلازما على مسافة $r_e$ (1.93). وعليه نجد (في جملة الواحدات الدولية) أنَّ:

$$E_o = 3.75 \times 10^{-9}\, \overline{n}_e^{2/3} \qquad (3.97)$$

ويصبح التابع (3.92):

$$F_o(k) = \exp\left(-R_n^{3/2} Z^{3/2} u_o^{3/2}\right) \qquad (3.98)$$

بفرض أنّ:

$$u_o = k\, E_o \qquad (3.99)$$

$$R_n = \frac{\overline{n}}{\overline{n}_e} \qquad (3.100)$$

حيث $R_n$ هي نسبة الكثافتين.

نستنتج من (3.83) أنَّ:

$$F(k) = (1+\varepsilon_g)^N \exp\left(-R_n^{3/2} Z^{3/2} u_o^{3/2}\right) \qquad (3.101)$$

ويحصل على تابع توزع الحقل الموضعي بأخذ تحويل فورييه العكسي (3.79):

$$W(\vec{E}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \exp(-i\vec{k}.\vec{E})\, F(\vec{k}) d^3k \qquad (3.102)$$

من أجل بلازما متناحية، لا يتعلق $W(\vec{E})$ إلاّ بطويلة الحقل الموضعي E. بمكاملة المعادلة (3.102) على الزوايا [15]، نحصل على:

$$W(E) = \frac{1}{2\pi^2 E} \int_0^\infty k\, F(k)\, \sin(kE)\, dk \qquad (3.103)$$

يحسب تابع توزع الحقل السلّمي بفرض أنّ:

$$W_s(E) = 4\pi E^2\, W(E) \qquad (3.104)$$

ومنه:

$$W_S(E) = \frac{2E}{\pi} \int_0^\infty k\, F(k)\, \sin(k\, E)\, dk \qquad (3.105)$$

وباستخدام الحقل المختزل:

$$\beta = \frac{E}{E_o} \qquad (3.106)$$

تصبح العلاقة (3.105) بعد أخذ (3.99) بالحسبان:

$$W_S(\beta) = \frac{2\beta}{\pi E_o} \int_0^\infty u_o F(u_o) \sin(\beta u_o) du_o \quad (3.107)$$

ونحصل في النهاية على توزع الحقل الميكروي السلمي بكتابة:

$$H(\beta) = E_o \; W_S(\beta) \quad (3.108)$$

ومنه:

$$H(\beta) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty u_o F(u_o) \sin(\beta u_o) du_o \quad (3.109)$$

يحقق هذا التابع اللا بعدي شرط الاستنظام:

$$\int_0^\infty H(\beta)\, d\beta = 1 \quad (3.110)$$

وحين لا يكون هناك أي ترابط بين الجسيمات، يكون التصحيح $\varepsilon_g$ (3.85) معدوماً (لأن $U=0$). ويصبح التوزع $H(\beta)$ باستخدام (3.101):

$$H(\beta) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty u_o \exp\left(-R_n^{3/2} Z^{3/2} u_o^{3/2}\right) \sin(\beta u_o) du_o \quad (3.111)$$

من أجل غاز من الإلكترونات أو الأيونات وحيدة الشحنة $(R_n = 1, Z = 1)$ نحصل على توزع هولتسمارك:

$$H(\beta) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty u_o \exp\left(-u_o^{3/2}\right) \sin(\beta u_o) du_o \quad (3.112)$$

من أجل الحقول الكبيرة المختزلة $\beta$ ، تكتب هذه العبارة [38,37,33,17,15,14]:

$$H(\beta) \simeq \frac{1.496}{\beta^{5/2}}\left(1 + \frac{5.107}{\beta^{3/2}} + \frac{14.43}{\beta^2} + \ldots\right) \quad (3.113)$$

وحين لا تعود الترابطات مهملة فإن النشر (3.113) يمكن حسابه باستخدام تقريب الجار الأقرب [15,14]. نفرض عندئذ أن الجسيمات التي لها علاقة بحساب $H(\beta)$ هي الجسيمات المشحونة الأقرب إلى نقطة الحساب **O** (أي تلك التي تولد الحقل الكولوني الأكبر). بفرض أنّ البلازما متناحية، نكتب أن الاحتمال $P_N(r)$ لإيجاد N جسيم على مسافة تقع بين r و r +dr من المبدأ **O** تساوي لاحتمال توليد حقل مختزل بين $\beta$ و $\beta + d\beta$:

$$H(\beta)\,d\beta = P_N(r)\,4\pi r^2 dr \tag{3.114}$$

حيث $P_N(r)$ يعطى بالعلاقة:

$$P_N(r) = N\,P_S(r) \tag{3.115}$$

ومع (1.107):

$$P_S(r) = \frac{1}{V} g(r) \tag{3.116}$$

بالتعويض في (3.114) نحصل على (3.93):

$$H(\beta)\,d\beta = \bar{n}\,g(r)\,4\pi r^2\,dr \tag{3.117}$$

حيث $\bar{n}$ هي الكثافة المتوسطة للجسيمات المشحونة.

باستخدام المسافة المختزلة:

$$\rho_r = \frac{r}{r_o} \tag{3.118}$$

حيث $r_o$ معرف بالعلاقة (3.95) نجد أنّ:

$$H(\beta)\,d\beta = \frac{\bar{n}}{\bar{n}_e}\frac{15}{2(2\pi)^{1/2}} g(\rho_r)\,\rho_r^2\,d\rho_r \tag{3.119}$$

من أجل المركبة الإلكترونية $(\bar{n} = \bar{n}_e)$ للحقل الميكروي، نحصل على تابع الارتباط correlation (1.118):

$$g(\rho_r) = \exp\left(-\Lambda e \frac{e^{-v_c \rho_r}}{v_c \rho_r}\right) \tag{3.120}$$

وذلك باستخدام التعريف (1.100) لوسيط الارتباط الإلكتروني $v_c (r_0 \simeq r_e)$ .

يكتب الحقل المختزل لإلكترون (3.94):

$$\beta = \frac{1}{\rho_r^2} \tag{3.121}$$

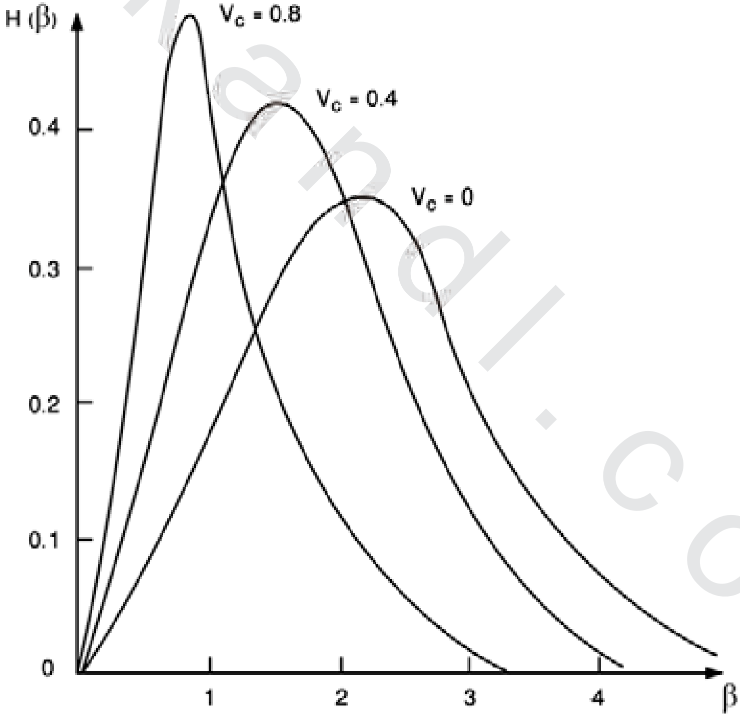
إن النشر المقارب لـ $H(\beta)$ يصبح (3.119)، باستخدام تعريف وسيط البلازما الإلكتروني (1.103):

$$H(\beta) = \frac{15}{4(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\beta^{5/2}} \exp\left[-\frac{1}{3} v_c^2 \beta^{1/2} e^{-v_c/\beta^{1/2}}\right] \tag{3.122}$$

من أجل المركبة الأيونية (حيث يحمل الأيون Z شحنة أولية)، يجب أن نأخذ بالحسبان فعل التحجيب من قبل الإلكترونات التي تحيط بكل أيون ونحصل على الحقل المختزل انطلاقاً من العبارة (1.65) لحقل دباي-هوكل الفعال (1.65). وعليه نجد [14]:

$$\beta = \frac{Z}{\rho_r^2}(1 + v_c\rho_r)e^{-v_c\rho_r} \qquad (3.123)$$

ويستنتج الحقل الميكروي $H(\beta)$ من (3.119) باستخدام التعريفين (1.115) و (1.70) لتابع الارتباط الثنائي التقليدي لأيونين [14]. تُبيِّن النتائج التحليلية الحاصلة من تقريب الجوار القريب، أنه حين تنعدم الارتباطات $v_c = 0$ يسعى توزع الحقل الميكروي $H(\beta)$ نحو توزع هولتسمارك. وعلى الأخص تسمح العبارة (3.122) بإيجاد الحد الأساسي في (3.113).




الشكل 3.5

على الرغم من أنّ الحسابات السابقة قد أجريت ضمن الشروط الأكثر بساطة (من دون ارتباط أو مع أفعال تبادل ضعيفة)، فإنه لا يمكن مكاملة العبارة

(3.111) تحليلياً في الحالة العامة (خارج الحد المقارب). في الحالة العملية يتعلق التوزع $H(\beta)$ بشروط الكثافة ودرجة الحرارة للبلازما، هذه المقادير أخذت بالحسبان بوساطة حدود الارتباط [14]. حيث يعين التابع $H(\beta)$ عددياً بحساب وسيط الارتباط الإلكتروني $v_e$ (1.102) الخاص بالبلازما المدروسة. وهذا الأخير يتناسب طرداً مع الكثافة الإلكترونية وعكساً مع درجة الحرارة، ونلفت الانتباه إلى أنّ توزع هولتسمارك هو التوزع عند الحد ذي درجات الحرارة العالية - والكثافات الضعيفة ($v_e = 0$). من أجل بلازما تحوي جسيمات وحيدة الشحنة (Z=1)، القيمة العظمى لـ $H(\beta)$ [14] تكون دائماً (الشكل 3.5) عند قيمة للحقل المختزل $\beta$ بين 1 و 1.6 (قمة هولتسمارك)، مما يعطي مرتبة للحقول الميكروية الأكثر احتمالاً من حيث الوجود داخل بلازما واقعة في حالة التوازن، وذلك مع الأخذ بالحسبان تعريفي الحقل المختزل (3.106) وحقل الاستنظام (3.97).

نلاحظ أن القيمة العظمى لِـ $H(\beta)$ تتحرك نحو الحقول الضعيفة وينقص عرضها عند نصف ارتفاع المنحني حين تزداد الارتباطات بين الجسيمات، في حين يبقى السطح تحت المنحني ثابتاً (3.110). هذه النتائج عامة وتبقى صحيحة من أجل كل أنواع الحقول الميكروية [15, 14, 12].

على الرغم من أنّ حساب $H(\beta)$ ضمن البلازما المتوازنة معقد، فإنّ معرفة توزع الحقل الميكروي تكون ذات فائدة كبيرة بفضل المعلومات التي يعطيها. وعلى الأخص فإنّ دراسة فعل ستارك Stark الناتج من تأثيره في جسيمات البلازما المعتدلة (النقطة المعتدلة) والأيونات (النقطة المشحونة) تعطينا معلومات عن كثافة ودرجة حرارة الوسط [40, 39, 15, 14].

## 4.3- التوزعات الجزئية الإحصائية المتقطعة للجسيمات

### 1.4.3- التوابع الترموديناميكية للتوازن

#### توابع التوزع الجزئية

رأينا في الفصل الثاني، أنه يمكن وصف كل جسيم في البلازما بمعرفة درجات حريته الداخلية والخارجية. تصف المتحولات الخارجية الحركة الانسحابية

للجسيمات بين التصادمات. وتصف المتحولات الداخلية حالات الإثارة الممكنة للجسيمات المعتدلة (ذرات وجزيئات) والأيونات. ويمكن بالتالي تجزئة طاقة كل جسيم في البلازما إلى أربعة حدود:

$$E_i = E_i^t + E_i^e + E_i^v + E_i^r \qquad (3.124)$$

الحد الأول هو الطاقة الحركية للانسحاب (خارجية)، والحدود الثلاثة التالية هي طاقات الإثارة الإلكترونية، والاهتزازية، والدورانية (داخلية) على الترتيب.

لنفرض أننا ندرس صنفاً معيناً من البلازما (جسيم معتدل أو أيون). إنَّ عدد الجسيمات $N_i$ من بين الـ $N$ جسيم من هذا الصنف التي توجد في مستوى الإثارة $E_i$ معطى بالتوزع الإحصائي (الحالة الميكروسكوبية الأكثر احتمالاً (1.10)):

$$\overline{N}_i = \frac{e^{\mu_c/kT}}{e^{E_i/kT} \pm e^{\mu_c/kT}} \qquad (3.125)$$

وتبسط العبارة السابقة حين يكون:

$$e^{E_i/kT} >> e^{\mu_c/kT} \qquad (3.126)$$

ولكي تكون هذه العلاقة محققة من أجل جميع سويات (مستويات) الطاقة (بما فيها السوية $E_i = 0$)، يجب أن يكون لدينا:

$$1 >> e^{\mu_c/kT} \qquad (3.127)$$

وهذا يكون صحيحاً دائماً في إحصاء بوز-أينشتاين (الكمون الكيميائي $\mu_c$ سالب [8,7]). نستنتج من (3.125) أنَّ:

$$\overline{N}_i = e^{\mu_c/kT} \quad e^{-E_i/kT} \qquad (3.128)$$

وهذا شكل آخر من أشكال توزع بولتزمان (1.13) من أجل السويات المكممة. بحساب $\overline{N}_i$ نجد (1.11):

$$N_i = e^{\mu_c/kT} \quad g_i \quad e^{-E_i/kT} \qquad (3.129)$$

نحصل على العدد الكلي للجسيمات من هذا الصنف بأخذ المجموع على جميع سويات الطاقة (الداخلية والخارجية)، أي:

$$N = \sum_i N_i \qquad (3.130)$$

بتجزئة الوزن الإحصائي $g_i$ إلى جداء بحسب درجة الانطباق لكل نوع من أنواع سويات الطاقة:

$$g_i = g_i^t\, g_i^e\, g_i^v\, g_i^r \qquad (3.131)$$

نحصل على:

$$N = e^{\mu_c/kT} \quad Z(T) \qquad (3.132)$$

بفرض أنّ:

$$Z(T) = Z^t(T)\, Z^e(T)\, Z^v(T)\, Z^r(T) \qquad (3.133)$$

حيث $Z^t$ ، $Z^e$ ، $Z^v$ ، $Z^r$ هي على الترتيب توابع التوزع الجزئي الانسحابي والالكتروني والاهتزازي والدوراني المعرفة كما يلي:

$$Z^t(T) = \sum_{i(t)} g_i^t\, e^{-E_i^t/kT} \qquad (3.134)$$

$$Z^e(T) = \sum_{i(e)} g_i^e\, e^{-E_i^e/kT} \qquad (3.135)$$

$$Z^v(T) = \sum_{i(v)} g_i^v\, e^{-E_i^v/kT} \qquad (3.136)$$

$$Z^r(T) = \sum_{i(r)} g_i^r\, e^{-E_i^r/kT} \qquad (3.137)$$

إنّ $Z^t$ هو تابع توزع جزئي خارجي في حين أنّ $Z^e$ و $Z^v$ و $Z^r$ هي توابع توزع جزئية داخلية.

تحسب سويات الطاقة $E_i$ بحل معادلات القيم الذاتية في الميكانيك الكوانتي. ويحسب تابع التوزع الجزئي الانسحابي $Z^t$ (3.134) بحساب مستويات الطاقة الانسحابية التي يمكن حسابها من الدراسة الكوانتية لجسيم محتوىً ضمن علبة على شكل متوازي مستطيلات أضلاعه $a_1$ و $a_2$ و $a_3$ [11] حيث نجد:

$$E_i^t = \frac{h^2}{8m}\left[\frac{n_{i,1}^2}{a_1^2} + \frac{n_{i,2}^2}{a_2^2} + \frac{n_{i,3}^2}{a_3^2}\right] \qquad (3.138)$$

مما يمكن كتابته أيضاً:

$$E_i^t = E_{i,1}^t + E_{i,2}^t + E_{i,3}^t \qquad (3.139)$$

وبما أن هذه السويات غير منطبقة $(g_i^t = 1)$ فيمكن كتابة تابع التوزع الجزئي الخارجي (3.134) على الشكل:

$$Z^t(T) = Z^{t,1}(T)\, Z^{t,2}(T)\, Z^{t,3}(T) \qquad (3.140)$$

مع:

$$Z^{t,1}(T) = \sum_{n_{i,1}} e^{-E_{i,1}^t/kT} \qquad (3.141)$$

حيث إنّ $Z^{t,2}$ و $Z^{t,3}$ لها الشكل العام نفسه.

بفرض أنّ:

$$\alpha_1 = \frac{h^2}{8 m a_1^2 kT} \qquad (3.142)$$

يصبح تابع التوزع الجزئي (3.141) وفقاً لـ (3.138 و 3.139) على الشكل:

$$Z^{t,1}(T) = \sum_{n_{i,1}=1}^{\infty} e^{-\alpha_1 n_{i,1}^2} \qquad (3.143)$$

وبما أن العلبة تحوي عدداً من الجسيمات فإن طول الأحرف $a_1, a_2, a_3$ يكون دائماً أكبر من المسافة المتوسطة بين الجسيمات d (1.23). ويفترض أنّ الشرط (1.24) محقق دائماً (بلازما غير متضاعفة)، ومنه يكون لدينا:

$$\lambda_B << d < a_1, a_2, a_3 \qquad (3.144)$$

وبأخذ (1.21) بالحسبان، نستنتج أنّ:

$$\alpha_1 << 1 \qquad (3.145)$$

وبما أن الفرق بين سويات الطاقة يسعى نحو الصفر، يمكن أن نستخدم التقريب المستمر:

$$\sum_{n_{i,1}=1}^{\infty} e^{-\alpha_1 n_{i,1}^2} \simeq \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 n_{i,1}^2}\, dn_{i,1} \qquad (3.146)$$

ومنه [35]:

$$\sum_{n_{i,1}=1}^{\infty} e^{-\alpha_1 n_{i,1}^2} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha_1}\right)^{1/2} \qquad (3.147)$$

أي:

$$Z^{t,1}(T) = \frac{a_1}{h}(2\,\pi mkT)^{1/2} \qquad (3.148)$$

ويصبح تابع التوزع الجزئي الخارجي (للانسحاب) (3.140):

$$Z^{t}(T) = \frac{V}{h^3}(2\,\pi mkT)^{3/2} \qquad (3.149)$$

حيث V هو حجم العلبة:

$$V = a_1\,a_2\,a_3 \qquad (3.150)$$

يحسب تابع التوزع الجزئي الإلكتروني $Z^e$ بإدخال سويات طاقة الإثارة الإلكترونية في العبارة (3.135). من أجل ذرة الهيدروجين أو الأيونات الهيدروجينية (نواة مشحونة Z مرة) يكون لدينا [11]:

$$E_i^e = Z^2 Rhc\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (3.151)$$

حيث n هو العدد الكوانتي الرئيسي و R هو ثابت رايدبرغ (Rydberg) المعرف بالعلاقة [11,10]:

$$R = \frac{mq^4}{4\,\pi\hbar^3 c} \qquad (3.152)$$

ويُعطى تضاعف (انطباق، تفسخ) سوية من الطاقة بالعلاقة (قاعدة شتونر Stoner):

$$g_i^e = 2\,n^2 \qquad (3.153)$$

ومنه يكتب تابع التوزع الجزئي الإلكتروني (3.135):

$$Z^e(T) = \sum_{n=1}^{n_1} 2n^2 \exp\left[-Z^2\,\frac{Rhc}{kT}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right] \qquad (3.154)$$

حيث $n_1$ هو الحد الفعال لآخر حالة مرتبطة قبل عتبة التأين [33].

أمّا توابع التوزع الجزئي الاهتزازي والدوراني فحسابهما أكثر تعقيداً بسبب الترابط الذي يظهر بين هذه الحالات [43,42,41,33,7]. بغية تسهيل هذه الدراسة، سوف نعالج فقط حالة الجزيئات ثنائية الذرات مع الاكتفاء بالحدود الرئيسة للاهتزاز والدوران.

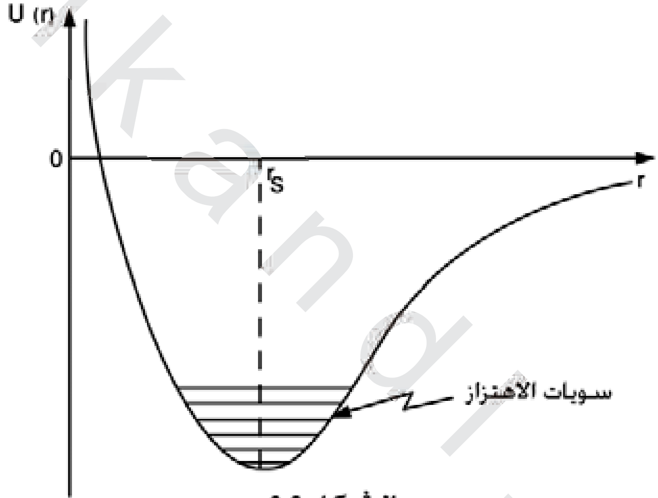
يكتب تابع التوزع الجزئي الاهتزازي $Z^v$ بأخذ سويات الطاقة الاهتزازية $E_i^v$. إذا دُعيت r بالمسافة الفاصلة بين النواتين اللتين تشكلان الجزيء فإن الطاقة الكامنة للتأثير المتبادل تتغير بحسب القانون الممثل في الشكل 3.6.

لتكن سويات الطاقة الاهتزازية الأولى تتعلق بمسافة الاستقرار الأعظمي $r_S$ بين النواتين. يمكن، بجوار $r_S$ ، تمثيل التابع $U(r)$ بقطع مكافئ: ومنه فإن سويات طاقة الاهتزاز ضمن هذا التقريب يمكن استنتاجها من حل معادلة قيم الهاملتوني الذاتية للجزيء، على اعتبار أنّ الكمون يتغير كقطع مكافئ (هزاز توافقي). وعليه نجد [11]:

$$E_i^v = \left(v + \frac{1}{2}\right)h\nu \qquad (3.155)$$

حيث $v$ هو العدد الكوانتي الاهتزازي ( $v = 0,1,2,...$ )، وتكون سويات الطاقة لهزاز ذي بعد واحد غير متضاعفة (منطبقة) أي:

$$g_i^v = 1 \qquad (3.156)$$




الشكل 3.6

ومنه (3.136) يكون:

$$Z^v(T) = \sum_{v=0}^{\infty} \exp\left[-\left(v + \frac{1}{2}\right)\frac{h\nu}{kT}\right] \qquad (3.157)$$

أو:

$$Z^v(T) = \exp\left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)\sum_{v=0}^{\infty} \exp(-\alpha_2 v) \qquad (3.158)$$

بفرض أنّ:

$$\alpha_2 = \frac{h\nu}{kT} \qquad (3.159)$$

ومنه نجد [35]:

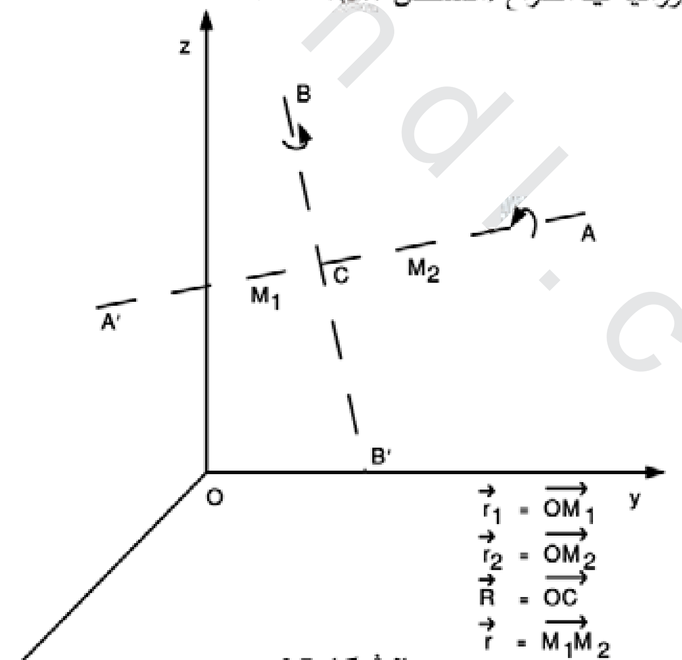
$$Z^{v}(T) = \frac{\exp\left(-\frac{\alpha_2}{2}\right)}{1-\exp(-\alpha_2)} \qquad (3.160)$$

أو:

$$Z^{v}(T) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(h\nu/2kT)} \qquad (3.161)$$

هـذه النتيجـة ليـست صـالحة إلاّ كتقريـب أول، إذ إن المجمـوع في العبـارة (3.157) لا يمكـن أن يكـون ممتداً حتـى اللانهاية بسبب فرضية القطـع المكـافئ المعتبرة بجوار $r_s$.

أمّا تابع التوزع الجزئي الدوراني $Z^r$ فيُحصل عليه بأخذ سويات الطاقة $E_J^r$. ويمكـن كتقريـب أول اعتبـار الجـزيء ثنائي الـذرة كدوّار صلب، أي عبـارة عـن كتلتين $m_1$ و $m_2$ تبقـى المسافة $r$ بينهما ثابتة أثناء الـزمن، وتقـوم هـذه المجموعة بحركات دورانية في الفراغ (الشكل 3.7).




الشكـل 3.7

سنفترض أنّ حالات الطاقة الدورانية تعين بشكل أساسي من دوران الجزيء حول المحور B'B الذي يمر بمركز الكتلة C (مما يعني إهمال الآثار الناتجة عن درجات الحرية حول المحور A'A). ويكتب عزم العطالة:

$$I_B = m_1\left(\overrightarrow{CM_1}\right)^2 + m_2\left(\overrightarrow{CM_2}\right)^2 \qquad (3.162)$$

بفرض أنّ:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM_1} &= \vec{r}_1 - \vec{R} \\ \overrightarrow{CM_2} &= \vec{r}_2 - \vec{R} \end{aligned} \qquad (3.163)$$

ونحصل، إذا أخذنا بالحسبان (2.12) و (2.13):

$$\overrightarrow{CM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \qquad (3.164)$$

$$\overrightarrow{CM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \qquad (3.165)$$

ومنه (3.162):

$$I_B = \mu r^2 \qquad (3.166)$$

حيث $\mu$ هي الكتلة المختزلة المعرَّفة بالعلاقة (2.24).

يسمح حل معادلة قيم الهاملتوني الذاتية للدوار الصلب rigid rotator ضمن هذا التقريب بحساب طاقة الدوران:

$$E_i^r = B_r J(J+1)hc \qquad (3.167)$$

حيث J هو العدد الكوانتي الدوراني للجزيئة (J=0,1,2,...) و $B_r$ هو ثابت الدوران المعرف بـ:

$$B_r = \frac{h}{8\pi^2 c I_B} \qquad (3.168)$$

وباستخدام درجة تضاعف حالات الدوران [33,10,7]:

$$g_i^r = 2J+1 \qquad (3.169)$$

يكتب تابع التوزع (3.137):

$$Z^r(T) = \sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)\exp\left[-B_r J(J+1)\frac{hc}{kT}\right] \qquad (3.170)$$

أو:

$$Z^r(T) = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1)\exp\left[-\alpha_3 J(J+1)\right] \qquad (3.171)$$

بفرض أنّ:

$$\alpha_3 = \frac{B_r\, hc}{kT} \qquad (3.172)$$

وبما أن فرق الطاقة بين سويتي دوران متتاليتين ضعيف جداً (من مرتبة $10^{-3}\,eV$)، يكون لدينا دائماً:

$$\alpha_3 << 1 \qquad (3.173)$$

ويبرر الشرط (3.173) استخدام التقريب المستمر:

$$\sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)\exp\left[-\alpha_3 J(J+1)\right] \simeq \int_0^{\infty}(2J+1)e^{-\alpha_3 J(J+1)}dJ \qquad (3.174)$$

ومنه:

$$\sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)\exp\left[-\alpha_3 J(J+1)\right] \simeq \frac{1}{\alpha_3} \qquad (3.175)$$

أو:

$$Z^r(T) = \frac{kT}{B_r\, hc} \qquad (3.176)$$

هذه النتيجة ليست صالحة بشكل دقيق إلاّ من أجل دوار صلب. ويجب أن تأخذ الدراسة الكاملة بالحسبان حركة الدوران حول المحور A'A ، وتغيرات المسافة بين النواتين أثناء الحركة مما يولد تزاوجاً بين الحالات الاهتزازية.

تسمح جملة النتائج السابقة بكتابة تابع التوزع الجزئي (3.133) بالشكل التالي:

$$Z(T) = Z^{ext}(T)\; Z^{int}(T) \qquad (3.177)$$

حيث (3.149):

$$Z^{ext} = \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2} \qquad (3.178)$$

و:

$$Z^{int}(T) = Z^e(T)\; Z^v(T)\; Z^r(T) \qquad (3.179)$$

حيث $Z^e$ و $Z^v$ و $Z^r$ مُعرَّفة بالعلاقتين (3.154)، (3.161)، وأخيراً يُكتب التابع $Z(T)$ بالصيغة العامة:

$$Z(T) = \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2}\, Z^{int}(T) \qquad (3.180)$$

وذلك بفصل تابع التوزع الجزئي الداخلي $Z^{int}(T)$ عن حد الانسحاب (الخارجي).

**التوابع الترموديناميكية**

تُعيَّن التوابع الترموديناميكية في البلازما انطلاقاً من توابع التوزع الجزئية الخاصة بكل صنف من الجسيمات (إلكترونات، أيونات، جسيمات معتدلة). تكمن الخطوة الأولى في حساب هذه التوابع لصنف واحد. في هذه الحالة البسيطة، نحصل على الأنتروبية انطلاقاً من فرضية بولتزمان (العلاقة بين الأنتروبية والحالة الماكروسكوبية الأكثر احتمالاً) أي [5]:

$$S = Nk + Nk\ln\frac{Z(T)}{N} + \frac{E}{T} \qquad (3.181)$$

حيث $N$ هو عدد جسيمات هذا الصنف، $E$ الطاقة الكلية له و $Z(T)$ تابع التوزع الجزئي لكل جسيم [33] المعطى بالعلاقة (3.180).

باستخدام تقريب ستيرلينغ Stirling [35,5] في (3.181)، نجد أن:

$$S = k\ln Z^{tot}(T) + \frac{E}{T} \qquad (3.182)$$

بفرض:

$$Z^{tot}(T) = \frac{Z^N(T)}{N!} \qquad (3.183)$$

حيث $Z^{tot}(T)$ هو تابع التوزع الجزئي الكلي.

تحسب التوابع الترموديناميكية من طاقة هلمهولتز Helmholtz الحرة $F$ [33,32,9,8,7,5]:

$$F = E - TS \qquad (3.184)$$

ومنه:

$$F = -kT\ln Z^{tot}(T) \qquad (3.185)$$

نستنتج الطاقة من علاقة هلمهولتز [5]:

$$-\frac{E}{T^2} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{E}{T}\right)_V \qquad (3.186)$$

ومنه:

$$E=kT^2\left(\frac{\partial \ln Z^{tot}(T)}{\partial T}\right)_V \qquad (3.187)$$

وتصبح الأنتروبية (3.182):

$$S=k\ln Z^{tot}(T)+kT\left(\frac{\partial \ln Z^{tot}(T)}{\partial T}\right)_V \qquad (3.188)$$

ويحسب الضغط من التفاضل الكلي لتابع هلمهولتز (3.164) من أجل تحول عكوس:

$$dF = -S\,dT - P\,dV$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV \qquad (3.189)$$

ومنه:

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \qquad (3.190)$$

بتعويض F (3.185) في عبارة الضغط (3.190)، نجد:

$$P = kT\left(\frac{\partial \ln Z^{tot}(T)}{\partial V}\right)_T \qquad (3.191)$$

وتستنتج الإنتالبية (السخانة) enthalpy من التعريف [5]:

$$H = E + PV \qquad (3.192)$$

أي:

$$H = kT^2\left(\frac{\partial \ln Z^{tot}(T)}{\partial T}\right)_V + kTV\left(\frac{\partial \ln Z^{tot}(T)}{\partial V}\right)_T \qquad (3.193)$$

وإنتالبية جيبس Gibbs الحرة [5]:

$$G = H - TS \qquad (3.194)$$

تكتب أيضاً:

$$G = kTV\left(\frac{\partial \ln Z^{tot}(T)}{\partial V}\right)_T - kT \ln Z^{tot}(T) \qquad (3.195)$$

نلاحظ أنّ جميع التوابع الترموديناميكية F (3.185)، E (3.187)، (3.188) S، P (3.191)، H (3.193) و G (3.195) تكتب اعتماداً على تابع التوزع الجزئي الكلي $Z^{tot}(T)$ (3.183).

إذا تبنينا فرضية الغاز الكامل من أجل الصنف المعتبر في البلازما (جسيمات غير متآثرة فيما بينها ومن دون حالات طاقة داخلية)، يختزل تابع التوزع الجزئي (3.180) إلى الجزء الخارجي (3.178)، أي:

$$Z(T) = \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2} \qquad (3.196)$$

ويكتب تابع التوزع الجزئي الكلي (3.183):

$$Z^{tot}(T) = \frac{1}{N!}\left[\frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2}\right]^N \qquad (3.197)$$

ونحصل ابتداءً من (3.187) و (3.191) و (3.193) على:

$$E = \frac{3}{2}NkT \qquad (3.198)$$

$$P = \frac{NkT}{V} \qquad (3.199)$$

$$H = \frac{5}{2}NkT \qquad (3.200)$$

وتصبح الإنتالبية الحرة (3.195):

$$G = -NkT \ln\left[\frac{Z(T)}{N}\right] \qquad (3.201)$$

باستخدام العلاقة العامة (3.132):

$$\frac{Z(T)}{N} = e^{-\mu_c/kT} \qquad (3.202)$$

نحصل على:

$$G = N\,\mu_c \qquad (3.203)$$

ومنه من أجل غاز نقي يمثل الكمون الكيميائي الإنتالبية الحرة من أجل جسيم واحد [33,5].

لم نأخذ حتى الآن سوى صنف واحد من الجسيمات. في حين أنه في بلازما محتوية على مزيج من الإلكترونات والأيونات والجسيمات المعتدلة (ذرات وجزيئات)، يجب أن نأخذ التوابع الترموديناميكية بالحسبان لكل الأصناف. ومما يزيد من تعقيد هذه المسألة أنّ التصادمات بين الجسيمات هي ذات ثلاثة أنواع (الفصل الثاني): مرنة (2.2)، وغير مرنة (2.3)، وتفاعلية (2.4). تغير الأولى درجات الحرية الخارجية، والثانية درجات الحرية الداخلية، في حين أنّ الأخيرة تغير طبيعة صنف الجسيم (تأين، تفكك...). وتعدل التصادمات التفاعلية من العدد $N_K$ وهو عدد الجسيمات من الصنف K، وهذه الآليات تصبح أسهل مع ارتفاع درجة الحرارة (بسبب زيادة التهيج الحراري). ويكتب العدد الكلي لجسيمات البلازما في حالة التوازن كما يلي:

$$N = \sum_K N_K \qquad (3.204)$$

تكتب الطاقة، من أجل صنف معطى K، بغياب الآليات التفاعلية (3.187):

$$E_K = kT^2 \left( \frac{\partial \ln Z_K^{tot}(T)}{\partial T} \right)_V \qquad (3.205)$$

لنفرض أنه تحدث تصادمات تفاعلية تؤدي إلى تأين - إعادة اتحاد أو تفكك

- إعادة اتحاد، عندئذ يكون لدينا:

$$P+Q \rightleftarrows PQ+\Delta E \qquad (3.206)$$

حيث $\Delta E$ هي طاقة التفاعل التي يمكن أن تكون:

$$\Delta E = E_S + \delta E_S \qquad (3.207)$$

حيث $E_S$ هي طاقة العتبة threshold اللازمة للتأين أو التفكك؛ و $\delta E_S$ هي انخفاض هذه العتبة (سنرى لاحقاً أنّ $\delta E_S$ سالبة) في حالة التأين، يحصل هذا الفعل نتيجة التأثير المتبادل الكولوني بين الجسيمات المشحونة المتشكلة والبلازما. وعليه يكون لدينا:

- تأين: $E_S = E_S^{ion}$ $\delta E_S \neq 0$

- تفكك: $E_S = E_S^{dis}$ $\delta E_S = 0$

كل جسيم (P,Q) يتشكل أثناء التفاعل يحمل نصف الطاقة ΔE ، وتكتب الطاقة المعطاة لكل جسيم K بالعلاقة:

$$\mu'_K + \delta\mu'_K = \frac{1}{2}\Delta E \qquad (3.208)$$

حين يتم تشكيل $N_K$ جسيم بموجب الآليات المذكورة سابقاً، فإنّ الطاقة $E_K$ لهذا الصنف تزداد بكمية قدرها $N_K(\mu'_K + \delta\mu'_K)$ أي (3.205):

$$E_K = kT^2\left(\frac{\partial \ln Z_K^{TOT}(T)}{\partial T}\right)_V + N_K(\mu'_K + \delta\mu'_K) \qquad (3.209)$$

ويكتب أيضاً:

$$E_K = kT^2\left(\frac{\partial \ln \overline{Z}_K^{TOT}(T)}{\partial T}\right)_V \qquad (3.210)$$

بفرض أنّ:

$$\overline{Z}_K^{tot}(T) = Z_K^{tot}(T)\, e^{-N_K(\mu'_K+\delta\mu'_K)/kT} \qquad (3.211)$$

علماً أنّ (3.183):

$$Z_K^{tot}(T) = \frac{Z_K^{N_K}(T)}{N_K\,!} \qquad (3.212)$$

ونحصل على:

$$\overline{Z}_K^{tot}(T) = \frac{\overline{Z}_K^{N_K}(T)}{N_K\,!} \qquad (3.213)$$

وأنَّ:

$$\overline{Z}_K(T) = Z_K(T)\, e^{-(\mu'_K+\delta\mu'_K)/kT} \qquad (3.214)$$

وبتعويض عدد الجسيمات $N_K$ من الصنف K (3.132):

$$N_K = e^{\mu_{c,K}/kT} Z_K(T) \qquad (3.215)$$

نحصل على:

$$N_K = \overline{Z}_K(T) \qquad (3.216)$$

بفرض أنّ:

$$\mu_{c,K} = -(\mu'_K + \delta\mu'_K) \qquad (3.217)$$

يمثل الكمون الكيميائي هنا الطاقة اللازمة لتشكل جسيم من الصنف K.

تكتب الأنتروبية لكل صنف من الأصناف (3.182):

$$S_K = k \ln \overline{Z}_K^{tot}(T) + \frac{E_K}{T} \qquad (3.218)$$

وتكتب الأنتروبية الكلية لمائع متجانس بحسابات [33] كما يلي:

$$S = \sum_K S_K \qquad (3.219)$$

أي:

$$S = k \ln \overline{Z}^{tot}(T) + \frac{E}{T} \qquad (3.220)$$

وأن:

$$E = \sum_K E_K \qquad (3.221)$$

$$\overline{Z}^{tot}(T) = \prod_K \overline{Z}^{tot}(T) \qquad (3.222)$$

تصبح طاقة هلمهولتز الحرة (3.185):

$$F = -kT \ln \overline{Z}^{tot}(T) \qquad (3.223)$$

وتستنتج الطاقة انطلاقاً من (3.210) و (3.221):

$$E = kT^2 \left( \frac{\partial \ln \overline{Z}^{TOT}(T)}{\partial T} \right)_V \qquad (3.224)$$

يكتب كل من الضغط (3.191)، والإنتالبية (3.193)، والإنتالبية الحرة (3.195):

$$P = kT \left( \frac{\partial \ln \overline{Z}^{tot}(T)}{\partial V} \right)_T \qquad (3.225)$$

$$H = kT^2 \left( \frac{\partial \ln \overline{Z}^{tot}(T)}{\partial T} \right)_V + kTV \left( \frac{\partial \ln \overline{Z}^{tot}(T)}{\partial V} \right)_T \qquad (3.226)$$

$$G = kTV\left(\frac{\partial \ln \overline{Z}^{tot}(T)}{\partial V}\right)_T - kT\ln \overline{Z}^{tot}(T) \qquad (3.227)$$

تكتب هذه التوابع الترموديناميكية الكلية انطلاقاً من تابع التوزع الجزئي الكلي $\overline{Z}^{tot}(T)$ . باستخدام العلاقات (3.222)، (3.213)، (3.214) و (3.180) يمكن أن نكتب بشكل بيِّن [33] ما يلي:

$$\overline{Z}^{tot}(T) = \prod_K \frac{1}{N_K!}\left[\frac{V}{h^3}(2\pi m_K kT)^{3/2} Z_K^{int}(T)\, e^{-(\mu'_K+\delta\mu'_K)/kT}\right]^{N_K} \qquad (3.228)$$

ونحصل على وجه الخصوص بالنسبة للطاقة (3.224) والضغط (3.225) على:

$$E = \sum_K N_K\left[\frac{3}{2}kT + \mu'_K + \delta\mu'_K + kT^2\left(\frac{\partial \ln Z_K^{int}(T)}{\partial T}\right)_V\right] \qquad (3.229)$$

$$P = \sum_K \frac{N_K kT}{V} - \sum_K N_K\left[\frac{\partial(\mu'_K + \delta\mu'_K)}{\partial V}\right]_T \qquad (3.230)$$

نلاحظ أنّ الضغط داخل البلازما هو ضغط غاز كامل، مصحح بسبب الأفعال المتبادلة $\delta\mu'_K$ . نحسب هذا التصحيح بفرض ( $\mu'_K$ لا يتعلق بالحجم):

$$\Delta P = \sum_K N_K\left(\frac{\partial(\delta\mu'_K)}{\partial V}\right)_T \qquad (3.231)$$

تُعيَّن $\Delta P$ بتقدير $\delta\mu'_K$ ( 3.207، 3.208 ):

$$\delta\mu'_K = \frac{1}{2}\,\delta E_S \qquad (3.232)$$

إنّ آلية التفكك $(\delta E_S = 0)$ لا تسبب تغيراً في الضغط. في حالة التأين $(\delta E_S \neq 0)$ نقول إنّ الأيون المتشكل يتبادل التأثير بشكل أساسي مع الإلكترونات الأقرب إليه، أي:

$$\delta E_S = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_o r_{ie}} \qquad (3.233)$$

حيث $r_{ie}$ هي المسافة بين الإلكترون والأيون.

من أجل مسافات $r_{ie}$ أصغر من طول ديباي $\lambda_D$ ، تكون التأثيرات المتبادلة فعّالة في حين أنه من أجل مسافات $r_{ie}$ أكبر من $\lambda_D$ تكون هذه التأثيرات مهملة (الفصل الأول الشكل 4.1). بغية أخذ هذه الشروط الفيزيائية بالحسبان، يُحسب التصحيح الوسطي $\delta\mu_K'$ ، كتقريب أول، بفرض أنّ:

$$r_{ie} \simeq \lambda_D \qquad (3.234)$$

حيث اعتبر هنا طول ديباي كمسافة وسطية بين الجسيمات، ويُمكن أيضاً أن يكتب:

$$\lambda_D^3 = \frac{1}{\bar{n}} \qquad (3.235)$$

حيث $\bar{n}$ الكثافة الوسطية لمجموع الجسيمات المشحونة (إلكترونات وأيونات). وبتقريب العبارتين (3.232) و (3.235) يكون:

$$\delta\mu_K' = \frac{-q^2}{8\pi\varepsilon_o}\bar{n}^{1/3} \qquad (3.236)$$

بتعويض (3.236) في عبارة $\Delta P$ (3.231) نجد، مع الأخذ بالحسبان (3.204) أنّ:

$$\Delta P = \frac{-Nq^2}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\partial \bar{n}^{1/3}}{\partial V}\right)_T \qquad (3.237)$$

بكتابة $\bar{n}$ بدلالة العدد الكلي للجسيمات N والحجم V (3.93) ومع الأخذ بالحسبان (3.235) نحصل على:

$$\Delta P = \frac{\bar{n}q^2}{24\pi\varepsilon_o}\quad\frac{1}{\lambda_D} \qquad (3.238)$$

باستخدام تعريف طول ديباي (1.72) نجد:

$$\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_o kT}{\bar{n}q^2} \qquad (3.239)$$

وعليه يكون التصحيح النهائي للضغط كالتالي:

$$\Delta P = \frac{kT}{24\pi\lambda_D^3} \qquad (3.240)$$

ومن (3.230) و (3.240) يكون أيضاً:

$$P \simeq \bar{n}kT - \frac{kT}{24\pi\lambda_D^3} \quad (3.241)$$

### 2.4.3- إسكانات سويات الطاقة المتقطعة

يمكن لكل صنف (جسيمات معتدلة، أيونات) في أي بلازما كانت، أن يشغل سويات من الطاقة معرفة بالعلاقة (3.124). لنرمز بـ K للصنف و i لسوية الإثارة، يعطي $N_{K,i}$ عدد الجسيمات الموجودة في الحالة $E_{K,i}$ بالعلاقة (3.129):

$$N_{K,i} = e^{\mu_{c,K}/kT} g_{K,i} e^{-E_{K,i}/kT} \quad (3.242)$$

بإدخال العدد الكلي للجسيمات من هذا الصنف (3.132)، نجد:

$$\frac{N_{K,i}}{N_K} = \frac{g_{K,i}\ e^{-E_{K,i}/kT}}{Z_K\ (T)} \quad (3.243)$$

بالجمع على كل حالات الطاقة الخارجية (الانسحابية)، يظهر في بسط كسر العلاقة (3.243) تابع التوزع الجزئي الخارجي. بكتابة $Z_K\ (T)$ (3.177)، نحصل بعد التبسيط على:

$$\frac{N_{K,i}}{N_K} = \frac{g_{K,i}\ e^{-E_{K,i}/kT}}{Z_K^{int}\ (T)} \quad (3.244)$$

حيث إنّ $E_{K,i}$ محدودة بحالات الطاقة الداخلية (إلكترونية، اهتزازية، دورانية). وتمثل العبارة (3.244) توزع بولتزمان من أجل حالات الإثارة الداخلية للصنف K في حالة التوازن الترموديناميكي. ويمكن أيضاً كتابتها من أجل الكثافات على النحو:

$$\frac{n_{K,i}}{n_K} = \frac{g_{K,i}\ e^{-E_{K,i}/kT}}{Z_K^{int}\ (T)} \quad (3.245)$$

### 3.4.3- قانون فعل الكتلة

ليكن التصادم التفاعلي العكوس التالي (2.4):

$$P + Q \underset{k_i}{\overset{k_d}{\rightleftarrows}} X + Y + \Delta E \quad (3.246)$$

في الاتجاه المباشر يولد الصدم غير المرن بين الجسيمين المتفاعلين P و Q جسيمين ناتجين X و Y من صنفين مختلفين. ويكون تزايد الكثافتين $n_X$ و $n_Y$ هو نفسه مع الزمن أي:

$$\frac{dn_X}{dt} = \frac{dn_Y}{dt} \qquad (3.247)$$

يكون هذا التغير متناسباً بشكل مباشر مع كثافة المتفاعلين $n_P$ و $n_Q$. وباستخدام معامل تناسب $k_d$ يمكن أن نكتب:

$$\frac{dn_X}{dt} = \frac{dn_Y}{dt} = k_d\, n_P\, n_Q \qquad (3.248)$$

حيث إنّ $k_d$ له أبعاد حجم في واحدة الزمن في حالة تصادمات بين جسيمين. ويمكن أيضاً أن نكتب من أجل التفاعل العكوس:

$$\frac{dn_P}{dt} = \frac{dn_Q}{dt} = k_i\, n_X\, n_Y \qquad (3.249)$$

من الناحية العملية، يكون المعاملان المباشر والعكوس $k_d$ و $k_i$ تابعين للمقطع الفعال الكلي للتفاعل $\sigma_0$ (2.122) (سنعود إلى هذا السؤال في الفصل الرابع). ففي حالة التوازن، يستقر التفاعل، الذي يعبر عنه بالمعادلة التالية:

$$\frac{dn_P}{dt} + \frac{dn_Q}{dt} = \frac{dn_x}{dt} + \frac{dn_y}{dt} \qquad (3.250)$$

باستخدام العلاقتين (3.248) و (3.249)، نستنتج:

$$k_d\, n_P\, n_Q = k_i\, n_X\, n_Y \qquad (3.251)$$

ومنه:

$$\frac{k_d}{k_i} = \frac{n_X\, n_Y}{n_P\, n_Q} \qquad (3.252)$$

والنسبة:

$$A(T) = \frac{k_d}{k_i} \qquad (3.253)$$

هي ثابت التوازن الذي يتعلق بدرجة الحرارة. تعبر العلاقة (3.252) عن قانون فعل الكتلة والتي تسمى أيضاً بقانون غولد برغ فاغ (Guldberg-Waag) [45,44,33,7,5]. إذا انطلقنا من النتائج السابقة، يمكن كتابة A(T) في الحالة

العامة لتصادم تفاعلي حين تكون المتفاعلات والنواتج جسيمات معتدلة. ونستنتج كثافة الأصناف من (3.216):

$$n_K = \frac{\overline{Z}_K(T)}{V} \qquad (3.254)$$

ونحصل على تابع التوزع الجزئي $\overline{Z}_K(T)$ بحذف تصحيح الطاقة (الجسيمات معتدلة)، من (3.214) أي:

$$\overline{Z}_K(T) = Z_K(T)\, e^{-\mu'_K/kT} \qquad (3.255)$$

حيث يعطى $Z_K(T)$ بالعلاقة (3.180):

$$Z_K(T) = \frac{V}{h^3}(2\pi m_K kT)^{3/2}\; Z_K^{int}(T) \qquad (3.256)$$

ويعرف تابع التوزع الجزئي الداخلي لكل صنف من الجسيمات بالعلاقة (3.179). باستخدام العلاقات من (3.254) إلى (3.256) في (3.252)، نحصل على [24]:

$$A(T) = A_o\, e^{-\Delta E/kT} \qquad (3.257)$$

بفرض أنَ:

$$A_o = \frac{m_x m_y}{m_p m_Q}\,\frac{Z_x^{int}(T)\, Z_y^{int}(T)}{Z_p^{int}(T)\, Z_Q^{int}(T)} \qquad (3.258)$$

$$\Delta E = (\mu'_x + \mu'_y) - (\mu'_p + \mu'_Q) \qquad (3.259)$$

العبارة (3.257) هي قانون أرينيوس Arrhenius الذي يسمح بقياس تأثير درجة الحرارة في التوازن التفاعلي.

يمكن أيضاً كتابة التوازن المتعلق بالتفاعلات تفكك - إعادة اتحاد انطلاقاً من النتائج السابقة باستبدال المعادلة (3.246) بالمعادلة (3.206). نحصل إذاً بكتابة (3.252) انطلاقاً من الكثافات (3.254 وحتى 3.256):

$$\frac{n_{PQ}}{n_P n_Q} = \frac{Z_{PQ}^{int}(T)}{Z_P^{int}(T)\, Z_Q^{int}(T)}\;\frac{e^{-(\mu'_{PQ} - \mu'_P - \mu'_Q)/kT}}{(2\pi\mu kT)^{3/2}/h^3} \qquad (3.260)$$

وأنً:

$$\mu = \frac{m_p\, m_Q}{m_p + m_Q} \qquad (3.261)$$

بملاحظة أنّ $\mu'_{PQ}$ معدوم وأخذ العلاقة (3.208) بالحسبان يكون:

$$\mu'_P = \mu'_Q = \frac{1}{2}\,\Delta E \qquad (3.262)$$

ونجد من ((3.260) و (3.207)) أنَّ:

$$\frac{n_P n_Q}{n_{PQ}} = \frac{Z_P^{int}(T)\,Z_Q^{int}(T)}{Z_{PQ}^{int}(T)}\,\frac{(2\pi\mu kT)^{3/2}}{h^3}\,e^{-E_S^{dis}/kT} \qquad (3.263)$$

وهو قانون غولد برغ-فاغ للتوازن التفككي [33].

ويمكن أخيراً استنتاج التوازن بين التأين وإعادة الاتحاد بملاحظة أنه في هذه الحالة، لا يكون انخفاض طاقة التأين $\delta\mu'_K$ معدوماً (3.208). ومن ((3.260) و (3.209)) [33] نحصل على:

$$\frac{n_e n_i}{n_0} = \frac{Z_e^{int}(T)\,Z_i^{int}(T)}{Z_0^{int}(T)}\,\frac{(2\pi\mu kT)^{3/2}}{h^3}\,e^{-(E_S^{ion}+\delta E_S)/kT} \qquad (3.264)$$

حيث إنّ $n_i$ هي كثافة الأيونات الموجبة و $n_o$ كثافة الجسيمات المعتدلة.

بملاحظة أنّ تابع التوزع الجزئي للإلكترون يكون مساوياً لاثنين (تبعاً للسببين) وأنّ كتلة الإلكترون $m_e$ صغيرة جداً مقارنة بكتلة جسيم معتدل أو كتلة أيون، نستنتج:

$$\frac{n_e\,n_i}{n_o} = 2\,\frac{Z_i^{int}(T)}{Z_o^{int}(T)}\,\frac{(2\,\pi\,m_e\,kT)^{3/2}}{h^3}\,e^{-(E_S^{ion}+\delta E_S)/kT} \qquad (3.265)$$

وهو قانون ساها-إيغرت (Saha-Eggert) لتوازن التأين [33,1].

## 5.3- التوزع الإحصائي للإشعاع

### 1.5.3- توزع الإشعاع

ليكن لدينا وعاء مكعب الشكل حجمه V، معزول عن الخارج، ومسخن لدرجة حرارة ثابتة T. تُثار ذرات الجدران في درجة الحرارة هذه، وتصدر إشعاعاً كهرطيسياً نحو الداخل. بفرض أن الحجم V كبير بما يكفي لأن تكون الخصائص الترموديناميكية للإشعاع الموجود داخل الوعاء مستقلة عن طبيعة الجدران [33,11,10,9,5,3]. وعليه نقبل أنّ الوعاء يحتوي أمواجاً كهرطيسية على

كل التواترات، وتنتشر في جميع الاتجاهات بجميع حالات الاستقطاب الممكنة. على المستوى الذري، تجري تبادلات الطاقة بين ذرة من الجدار والإشعاع بوساطة فوتونات ذات طاقة:

$$E_p = h\nu \qquad (3.266)$$

ويمكن تفسير الفرضية السابقة بالقول إن الحجم V يحوي عدداً كبيراً من الفوتونات، ويُمثَّل كلٌ منها بموجة مستوية وحيدة التواتر [9] ذات حقل كهربائي معطى بالعلاقة:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{\varepsilon}\, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad (3.267)$$

حيث إنّ $\vec{\varepsilon}$ هو شعاع واحدة الاستقطاب.

تكون الجملة التي وصفناها، والتي تسمى الجسم الأسود، في حالة توازن حين تصدر الجدران إشعاعاً للداخل بقدر ما تتلقى من طاقة.

يمكن اختبار مثل هذه الجملة تجريبياً بإحداث ثقب صغير في الجدار (لكي يكون تأثير الاضطراب في التوازن الداخلي أقل ما يمكن).

تتعلق الطاقة التي تجتاز هذا الثقب بالمتحولات التالية (الشكل 3.8):

- سطح الثقب $d\vec{S}$
- اتجاه المراقبة $\vec{\Omega}$
- زاوية الكشف الصلبة $d\Omega$
- مجال التواترات المعتبر $d\nu$
- زمن الإصدار $dt$

حيث إنّ $\vec{\Omega}$ هو شعاع الواحدة من دون أبعاد. نلاحظ أنّ المقدار $dE$ متناسب مع كل واحد من هذه المتحولات، أي:

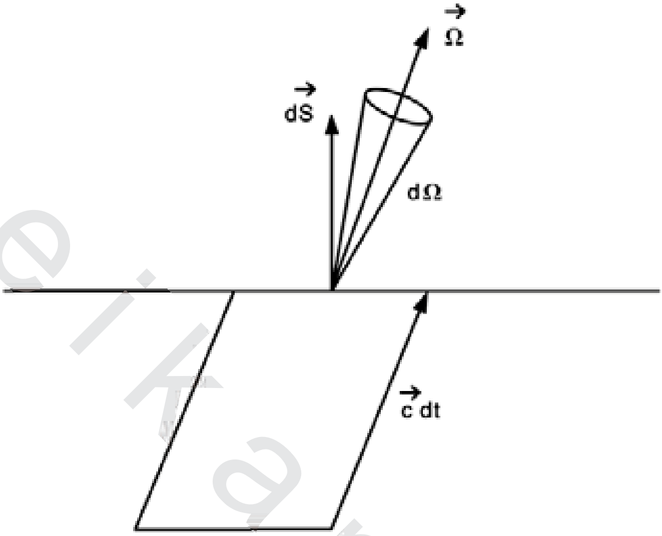
$$d^4E \propto d\vec{S}.\vec{\Omega}\, d\Omega\, d\nu\, dt \qquad (3.268)$$

تكون معادلة الأبعاد لـ (3.268) محققة بإدخال معامل تناسب يدعى الشدة النوعية للإشعاع المعرف بالعلاقة:

$$I_\nu(\vec{\Omega}) = \frac{d^4E}{\vec{\Omega}.d\vec{S}\, d\Omega\, d\nu\, dt} \qquad (3.269)$$

هـذا المقـدار لـه أبعـاد الطاقـة في واحـدة الـسطح وواحـدة الزاويـة الـصلبة، وبالمكاملة نجد:

$$\int I_\nu(\vec{\Omega})\, d\Omega = \frac{d^3E}{\vec{\Omega}.d\vec{S}\, d\Omega\, d\nu\, dt} \qquad (3.270)$$




الشكل 3.8

يمكـن تعيين الطاقـة $d^3E$ مـن كثافـة الطاقـة $u_\nu\, d\nu$ المحتـواة في الوعـاء. نلاحظ أنّ المقدار $d^3E$ الخارج من السطح $d\vec{S}$ أثناء الزمن $dt$ بالاتجاه $\vec{\Omega}$ ليس إلاّ الطاقة المحتواة في أسطوانة ذات حجم $d^2V$ (الشكل 3.8) ذات مقطع $d\vec{S}$ وحرف $\vec{c}\,dt$ (على افتراض أنّ الأمواج الكهرطيسية تنتشر بسرعة الضوء). وعليه نكتب إذاً:

$$d^3E = u_\nu\, d\nu\, d^2V \qquad (3.271)$$

حيث:

$$d^2V = d\vec{S}.\vec{c}\,dt \qquad (3.272)$$

بتعويض (3.271) و (3.272) في (3.270) وبملاحظة أنّ $\vec{c}$ و $\vec{\Omega}$ متوازيان نجد:

$$\int I_\nu(\vec{\Omega})\, d\Omega = c\, u_\nu \qquad (3.273)$$

بفرض أن الإشعاع متناحٍ، عندئذ لن تتعلق الشدة النوعية $I_\nu$ باتجاه المراقبة $\vec{\Omega}$. بمكاملة (3.273) على الزاوية الصلبة $d\Omega$، نحصل على:

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu \qquad (3.274)$$

يمكن حساب كثافة الطاقة في واحدة التواتر $u_\nu$ انطلاقاً من الإحصاء الكوانتي، بملاحظة أنّ الفوتونات الواقعة في الحجم V يمكن اعتبارها كنواتج هزازات توافقية خطية. حيث يسمح الميكانيك الكوانتي [11] بحساب سويات طاقة الهزازات. تصدر الفوتونات أو تمتص أثناء عمليات الانتقال بين سويات الطاقة $E_n$ ، والتي تكون مفصولة عن بعضها بعضاً بعدد صحيح من طاقة الفوتون $E_p$ (3.266) أي:

$$E_n = n E_p \qquad (3.275)$$

ومنه تُحسب الطاقة الوسطية في داخل الوعاء انطلاقاً من الشكل العام للتوزع الإحصائي لسويات الطاقة، أو بمعنى آخر باستخدام العلاقات (3.244)، (3.179) و (3.135) - (3.137):

$$\frac{N_{K,i}}{N_K} = \frac{g_{k,i}\, e^{-E_{K,i}/kT}}{\sum_i g_{k,i}\, e^{-E_{K,i}/kT}} \qquad (3.276)$$

ومنه بإهمال الدليل K (غير مفيد في هذه الحالة) واستبدال i بالدليل n تؤول العلاقة (3.276) إلى:

$$\frac{N_n}{N} = \frac{g_n e^{-E_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-E_n/kT}} \qquad (3.277)$$

وبما أنّ سويات الطاقة غير متضاعفة ($g_n=1$) فمن (3.275) نحصل أخيراً على:

$$\frac{N_n}{N} = \frac{e^{-nE_p/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nE_p/kT}} \qquad (3.278)$$

إنّ النسبة (3.278) هي عبارة عن احتمال وجود هزاز في حالة الإثارة $E_n$ (عدد الهزازات في الحالة $E_n$ على العدد الكلي للهزازات) أي:

$$P_n = \frac{N_n}{N} \qquad (3.279)$$

بالتعريف [36,11,10]، نحصل على الطاقة المتوسطة بحساب:

$$< E_n > = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \; E_n \qquad (3.280)$$

أو مع الأخذ أيضاً بالحسبان العلاقتين (3.278) و (3.279) يكون:

$$<E_n>=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} nE_p e^{-nE_p/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nE_p/kT}} \qquad (3.281)$$

بفرض أنَّ:

$$x=e^{-E_p/kT} \qquad (3.282)$$

نحصل على (3.281) ما يلي:

$$<E_n>=xE_p \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} \qquad (3.283)$$

أو بحساب كلتا السلسلتين أيضاً[11] يكون:

$$<E_n>=\frac{xE_p}{(1-x)} \qquad (3.284)$$

ومنه (3.282):

$$<E_n>=\frac{E_p}{e^{E_p/kT}-1} \qquad (3.285)$$

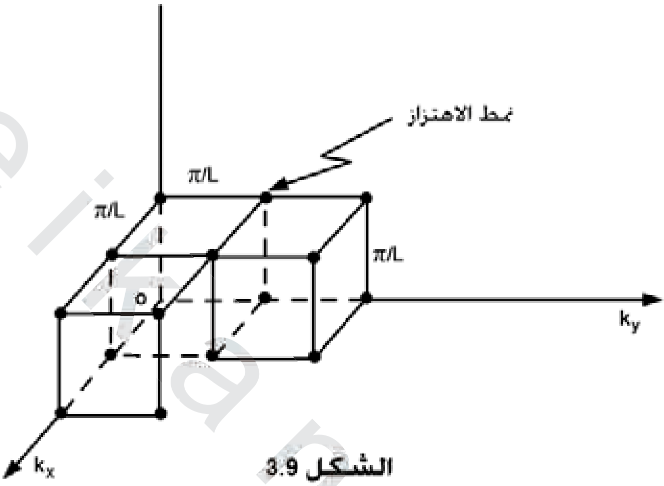
تمثل العبارة السابقة الطاقة المتوسطة لهزاز توافقي خطي ضمن مجال تواتر يتراوح بين $\nu$ و $\nu + d\nu$ ويجب تعيين عدد أنماط الاهتزاز في المجال نفسه من التواتر وذلك لتعيين الطاقة الكلية. إنّ الهزازات محتواة ضمن وعاء مكعب الشكل ذي حجم V وطول حرفه L، والأمواج المستوية وحيدة التواتر التي تنتشر في الوعاء يجب أن تحقق الشروط الحدية [11]:

$$k_j \, L = n_j \, \pi \qquad (3.286)$$

حيث $n_j$ هو عدد صحيح، هذه العلاقة محققة من أجل كل المركبات $k_j$ لشعاع الموجة $\vec{k}$ لكل موجة مستوية وحيدة التواتر (3.267).

تشغل كل عقدة في فراغ أشعة الموجة $\vec{k}$ (والتي تعود إلى نمط اهتزاز) حجماً وسطياً (الشكل 3.9):

$$V_k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \tag{3.287}$$




الشكل 3.9

نحصل على عدد أنماط الاهتزازات في مجال التواتر بين $\nu$ و $\nu + d\nu$ بحساب حجم ثمن الكرة الموجب المحصور بين $k$ و $k + dk$ حيث إنّ:

$$k = 2\pi \frac{\nu}{c} \tag{3.288}$$

ومنه:

$$dV_k = \frac{1}{8} 4\pi k^2 \, dk \tag{3.289}$$

ونستنتج مع الأخذ بالحسبان (3.288) أنَّ:

$$dV_k = 4\pi \left(\frac{\pi}{c}\right)^3 \nu^2 \, d\nu \tag{3.290}$$

نحصل على عدد الأنماط بأخذ نسبة (3.290) على (3.287) أي:

$$dN'_\nu = 4\pi \left(\frac{L}{c}\right)^3 \nu^2 \, d\nu \tag{3.291}$$

وتكتب كثافة الأنماط $dn'_\nu$ في هذا المجال من التواتر:

$$dn'_\nu = \frac{4\pi}{c^3}\nu^2 d\nu \qquad (3.292)$$

من أجل كل موجة مستوية وحيدة التواتر لشعاع الموجة $\vec{k}$ ، توجد حالتان مستقلتان من الاستقطاب $\vec{\varepsilon}$ (3.267). ومنه فإنّ كثافة الأنماط $n'_\nu(\vec{\varepsilon})$ مع أخذ الاستقطاب بالحسبان تكون:

$$n'_\nu(\vec{\varepsilon})\,d\nu = 2\,dn'_\nu \qquad (3.293)$$

و أخيراً، نحصل على كثافة الطاقة في واحدة التواتر في المجال المتراوح بين $\nu$ و $\nu + d\nu$ بحساب ما يلي:

$$u_\nu = n'_\nu(\vec{\varepsilon}) \langle E_n \rangle \qquad (3.294)$$

ومنه باستخدام (3.285)، (3.292)، (3.293) يكون:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{E_p}{e^{E_p/kT}-1} \qquad (3.295)$$

وبتعويض طاقة الفوتون $E_p$ (3.266) نجد علاقة بلانك [33,11 - 7,5,3] على النحو:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \qquad (3.296)$$

نلفت النظر إلى أنّ قانون $u_\nu$ هو تابع لدرجة الحرارة T. يتعين موضع القيمة الأعظمية $(\nu_m, u_{\nu_m})$ لقانون بلانك بحساب مشتق العلاقة (3.296) عند درجة حرارة ثابتة، أي [33,11,7,3]:

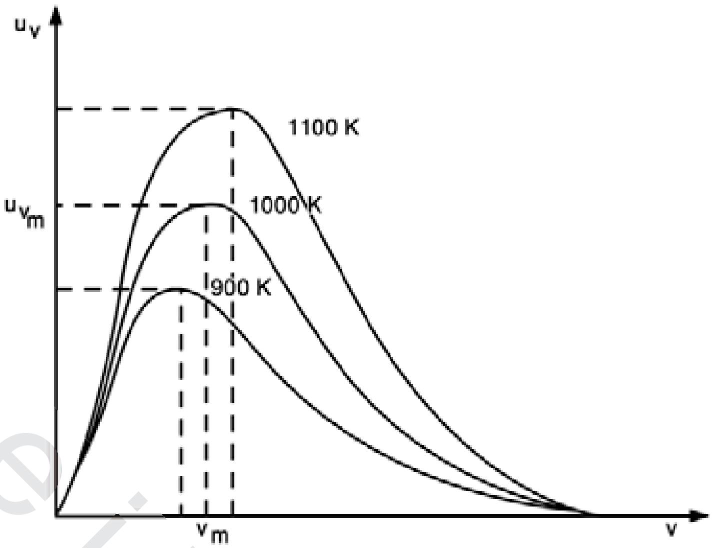
$$\frac{h\nu_m}{kT} \simeq 2.821 \qquad (3.297)$$

العبارة (3.297) هي قانون فين Wien ، حيث تتغير $\nu_m$ بشكل خطي مع درجة الحرارة. في حين أنّ $u_{\nu_m}$ (3.298) تتعلق بـ T بشكل غير خطي (الشكل 3.10).

$$u_{\nu_m} = 1.42\frac{8\pi k^3 T^3}{h^2 c^3} \qquad (3.298)$$

في مجال الأشعة تحت الحمراء والمرئية يمكن تبسيط عبارة $u_\nu$ . ومن أجل حد الأشعة تحت الحمراء (تواترات ضعيفة) يمكن أن نكتب:

$$h\nu \ll kT$$




**الشكل 3.10**

بنشر التابع الأسي في (3.296) نجد [11]:

$$u_\nu = \frac{8\pi\ \nu^2}{c^3} kT \qquad (3.299)$$

وهو قانون رايلي-جينز (Rayleigh-Jeans).

وفي مجال الأشعة المرئية يكون:

$$h\nu >> kT$$

مما يسمح بإهمال الواحد بالمقارنة مع الحد الأسي فنحصل على قانون فيين [11]:

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-h\nu/kT} \qquad (3.300)$$

وبالمكاملة على جميع التواترات يكون:

$$u(T) = \int_0^\infty u_\nu d\nu \qquad (3.301)$$

ونستنتج (3.296) [11,5] ما يلي:

$$u(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3c^3} T^4 \qquad (3.302)$$

وهو قانون ستيفان Stifan. ونرى أنّ كثافة الطاقة $u(T)$ تتغير كتابع لدرجة الحرارة مرفوعة للأس أربعة.

### 2.5.3- تبادل الطاقة بين الجسيمات والإشعاع

لنفرض أن الوعاء الذي وصف في فقرة سابقة، يحتوي على عدد كبير من الذرات المتماثلة. هذه الذرات يمكنها أن تثار أو أن تزال إثارتها بفعل الأمواج الكهرطيسية الموجودة في الحجم المعتبر. هناك ثلاث عمليات أولية يمكن أن تحصل بين سويتين ذريتين $E_k$ و $E_l$ (الشكل 3.11) [33,32,11,3] هي:

- الامتصاص.
- الإصدار المحثوث.
- الإصدار التلقائي.

إنّ التغير $dN_k$ في الإسكان الذري الذي يتعلق في حالة الامتصاص بثلاثة متحولات هي:

- عدد الذرات في الحالة الابتدائية $N_k$.
- كثافة الطاقة في واحدة التواتر $u_\nu$.
- مدة التفاعل dt.

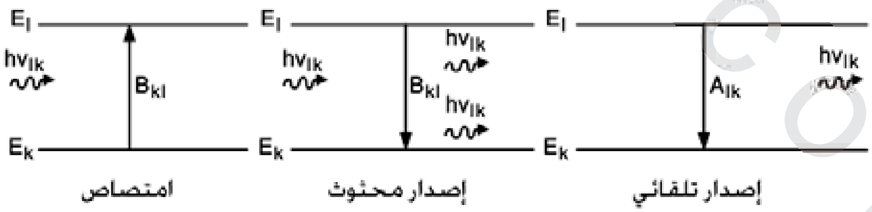
باستخدام معامل التناسب $B_{kl}$ (معامل أينشتاين للامتصاص)، نحصل على:

$$-dN_k = B_{kl} N_k u_\nu dt \qquad (3.303)$$

بمعالجة مماثلة، نجد أنّ التغير $dN_l$ في الإسكان الذري بفعل الإصدار المحثوث يساوي:

$$-dN_l = B_{lk} N_l u_\nu dt \qquad (3.304)$$

حيث $B_{lk}$ هو معامل أينشتاين للإصدار المحثوث.




**الشكل 3.11**

أمّا الإصدار التلقائي فلا يتعلق إلاّ بمتحولين هما:

- عدد الذرات في الحالة الابتدائية $N_l$.
- مدة الإصدار dt.

ومنه نستنتج أنَّ:

$$-dN_l = A_{lk} N_l dt \qquad (3.305)$$

بمكاملة هذه العلاقة الأخيرة نحصل على [11] قانون تناقص الإصدار التلقائي أي:

$$N_l = N_{lo} e^{-t/\tau_l} \qquad (3.306)$$

حيث $N_{lo}$ هي الإسكان الابتدائي لحالة الإثارة $E_l$ ، و $\tau_l$ هو زمن الحياة المعرف كما يلي:

$$\tau_l = \frac{1}{A_{lk}} \qquad (3.307)$$

ولا تكون هذه النتيجة صالحة إلاّ عندما يغيب الإصدار المحثوث. في الحالة العامة (إشعاع موجود في الغاز) يجب الأخذ بالحسبان عمليتي الإصدار ((3.304) و (3.305)) [46,33,32,11,3] أي:

$$-dN_l = B_{lk} N_l u_\nu dt + A_{lk} N_l dt \qquad (3.308)$$

في حالة التوازن، يعوّض الامتصاص والإصدار أحدهما الآخر ويمكن أن نكتب ((3.303) و (3.308)) على النحو:

$$B_{kl} N_k u_\nu dt = B_{lk} N_l u_\nu dt + A_{lk} N_l dt \qquad (3.309)$$

ومنه:

$$u_\nu = \frac{A_{lk}}{B_{kl} \frac{N_k}{N_l} - B_{lk}} \qquad (3.310)$$

إذاً، يمكن استنتاج نسبة الإسكانات المثارة من قانون التوازن (3.244). من أجل الصنف الذري المعتبر، تحسب هذه النسبة من أجل حالات الإثارة $i = k$ و $i = l$ أي (تم إهمال الدليل K الخاص بالصنف):

$$\frac{N_k}{N_l} = \frac{g_k e^{-E_k/kT}}{g_l e^{-E_l/kT}} \qquad (3.311)$$

ومنه:

$$u_\nu = \frac{A_{lk}/B_{lk}}{\frac{B_{kl} g_k}{B_{lk} g_l} e^{h\nu_{lk}/kT} - 1} \qquad (3.312)$$

وذلك بعد فرض أنَّ:

$$E_l - E_k = h\nu_{lk} \qquad (3.313)$$

بمقارنة هذه العبارة الجديدة (3.312) لقانون بلانك مع العلاقة (3.296) نستنتج:

$$\frac{A_{lk}}{B_{lk}} = \frac{8\pi h \nu_{lk}^3}{c^3} \qquad (3.314)$$

و

$$\frac{B_{kl}\, g_k}{B_{lk}\, g_l} = 1 \qquad (3.315)$$

تسمح هذه النتائج بالربط بين معاملات أينشتاين للإصدار والامتصاص. لمعامل الإصدار التلقائي $A_{lk}$ أبعاد مقلوب الزمن (3.307)، ونستنتج أبعاد $B_{kl}$ و $B_{lk}$ من (3.314) و (3.315). نلفت النظر أيضاً إلى أنّ تغيرات الإسكانات (3.303) و (3.304) يمكن أن تكتب أحياناً باستخدام الشدة النوعية $I_\nu$ بدل كثافة الطاقة في واحدة الحجم $u_\nu$. في هذه الحالة، النسبة (3.314) يجب أن تضرب بالمعامل $c/4\pi$ كما في العلاقة (3.274)، مما يعدل أبعاد $B_{kl}$ و $B_{lk}$.

## 6.3- البلازما والتوازن الترموديناميكي

### 1.6.3- قوانين التوازن

لتكن بلازما محتواة في وعاء ذي حجم V. يحسب العدد الكلي للجسيمات N بجمع الأعداد $N_k$ الخاصة بكل صنف (3.204). تتصادم المركبات المختلفة للبلازما (إلكترونات، أيونات، جسيمات معتدلة، فوتونات) فيما بينها (بشكل مرن، غير مرن، تفاعلي) وكذلك مع الجدران. ضمن شروط سوف نوضحها لاحقاً، هذه التصادمات المتعددة هي المسؤولة عن التوازن الترموديناميكي للوسط.

حين يحافظ على درجة حرارة ثابتة للوعاء، يُعبَّر عن شرط التوازن هذا بتعريف:

- درجة حرارة الجدران: $T = T_{par.}$

تسمح التصادمات المرنة، المسؤولة عن تبادل الطاقة الحركية بين الجسيمات بالوصول إلى حالة توازن معطاة بقانون ماكسويل-بولتزمان (3.70) أي:

$$f_o(E) = \bar{n}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-E/kT} \qquad (3.316)$$

حيث E هي الطاقة الحركية.

من حساب الطاقة الحركية المتوسطة (3.54) يُستنتج التوزع المتساوي للطاقة (3.68):

$$< E >= \frac{3}{2}kT \qquad (3.317)$$

مما يسمح من أجل هذا التوازن بتعريف:

- درجة الحرارة الحركية: $T=T_{kin}$

تتغير إسكانات الحالات المثارة أثناء عمليات الصدم غير المرن، بسبب نقل الطاقة (2.112). حين يتم بلوغ حالة توازن الإثارة تتوزع الحالات المثارة بحسب قانون بولتزمان (3.245):

$$\frac{n_{K,i}}{n_K} = \frac{g_{K,i}\, e^{-E_{K,i}/kT}}{\sum_i g_{K,i}\, e^{-E_{K,i}/kT}} \qquad (3.318)$$

حيث $E_{K,i}$ هي طاقة الإثارة في الحالة i للصنف K.

من أجل صنف ما K تكون السويات $E_{K,i}$ معروفة (حل معادلة قيم الهاملتوني الذاتية للذرة أو للجزيئة أو للأيون المعتبر)، ويكون توزع الحالات المثارة مستقراً (3.318) وإن كانت درجة الحرارة T ثابتة. وهذا الشرط يؤدي إلى تعريف:

- درجة حرارة الإثارة: $T=T_{exc}$ .

تكون التصادمات التفاعلية مسؤولة عن تغير العدد $N_k$ لجسيمات الصنف. ولكل نوع من التفاعلات هناك طاقة معينة من قبل الجسيمات الداخلة بالتفاعل والناتجة عنه (2.4) و (2.113) و (3.259). وحين تصل إلى حالة التوازن

التفـاعلي يكـون تـوزع الأصـناف معطـى بقـانون أرينيـوس (3.252)، (3.253) و (3.257):

$$\frac{n_x\, n_y}{n_p\, n_Q} = \frac{k_d}{k_i} = A_o\, e^{-\Delta E / kT} \qquad (3.319)$$

حيث $\Delta E$ هي طاقة التفاعل.

ويكون التوزع (3.319) مستقراً، حين تكون درجة الحـرارة ثابتة مما يؤدي إلى تعريف:

- درجة حرارة التفاعل: $T = T_{rea}$.

إن توازن التفكك هو مثال أول عن الحالة التفاعلية. ويمكن وصفه بقانون غولد برغ-فاغ (3.263):

$$\frac{n_p\, n_Q}{n_{pQ}} = A_1(T)\; e^{-E_S^{dis}/kT} \qquad (3.320)$$

بفرض أنّ:

$$A_1(T) = \frac{Z_P^{int}(T)\, Z_Q^{int}(T)}{Z_{pQ}^{int}(T)} \frac{(2\pi\mu kT)^{3/2}}{h^3} \qquad (3.321)$$

حيث $E_S^{dis}$ هي طاقة التفكك (المعروفة من أجل كل صنف).

ويكون التوزع (3.320) معيناً حين تكون درجة الحـرارة ثابتة، مما يقود إلى تعريف:

- درجة حرارة التفكك: $T = T_{dis}$.

التوازن التأيني هو المثال الثاني عن التصادم التفاعلي في البلازما الذي يعطى بقانون ساها-إيغرت (3.265):

$$\frac{n_e\, n_i}{n_o} = A_2(T)\; e^{-(E_S^{ion} + \delta E_S)kT} \qquad (3.322)$$

وأنَّ:

$$A_2(T) = 2\frac{Z_i^{int}(T)}{Z_o^{int}(T)} \frac{(2\pi\, m_e\, kT)^{3/2}}{h^3} \qquad (3.323)$$

حيث $E_S^{ion}$ هي طاقة التأين و $\delta E_S$ تصحيح الطاقة الناتج عن التفاعلات الكولونية.

يكون توزع الأصناف (3.322) مستقراً إذا كانت درجة الحرارة ثابتة (حيث إنّ $E_S^{ion} + \delta E_S$ تكون معروفة من أجل العمليات المدروسة)، مما يسمح بتعريف:

- درجة حرارة التأين: $T = T_{ion}$.

من أجل وعاء مغلق محفوظ بدرجة حرارة ثابتة، تعطى كثافة الطاقة في واحدة التواتر للإشعاع المحتوى ضمن الحجم V بقانون بلانك:

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{E_P/kT} - 1} \qquad (3.324)$$

حيث $E_P$ هي طاقة الفوتون.

يكون التوزع (3.324) معيناً إذا بقيت درجة الحرارة ثابتة (الشكل 3.10). بالأخص يعطى وضع القيمة الأعظمية $E_{P_m}$ (قانون فيين) بالعلاقة (3.297):

$$E_{P_m} = 2.821\,kT \qquad (3.325)$$

مما يؤدي إلى تعريف:

- درجة حرارة الإشعاع: $T = T_{rad}$.

### 2.6.3- التوازن الترموديناميكي التام

لنفرض أننا ندخل غازاً معتدلاً كهربائياً ضمن وعاء ذي حجم V ودرجة حرارة جدرانه مثبتة على $T_{wall}$. ويتشكل توازن ترموديناميكي بسبب تصادم الجسيمات المعتدلة بين بعضها ومع جدران الوعاء (الذرات والجزيئات) حيث يسعى تابع توزع السرعات في الغاز إلى تابع ماكسويل-بولتزمان (3.316). وتكون درجة الحرارة الحركية $(T_{kin})$ مساوية لدرجة حرارة الجدران $(T_{wall})$ في كل نقطة، إذ إن الغاز متوزع بشكل منتظم في كل حجم الوعاء. وتصل الجملة إلى حالة مستقرة يكون فيها تدرج كل من الكثافة ودرجة الحرارة معدوماً $(\vec{\nabla} T = 0, \vec{\nabla} n = 0)$.

إذا رفعنا درجة حرارة الجدران فإن الطاقة الحركية للجسيمات المعتدلة تتزايد. من أجل درجة حرارة حركية من مرتبة الجزء من مئة من الإلكترون - فولت، يمكن أن تُسكن سويات الإثارة الدورانية للغاز المعتدل (إذا كان جزيئياً) من قبل تصادمات غير مرنة (الفقرة 2.4.2). من أجل درجات حرارة أعلى (جزء من عشرة من الإلكترون- فولت من أجل السويات الاهتزازية وبضعة إلكترون-فولت من أجل السويات الإلكترونية) تبدأ بالظهور آليات الإثارة الإلكترونية والتفكك والتأين. تكون التصادمات المتعددة بين مختلف الأصناف مسؤولة عن تشكل حالة توازن جديدة مستقرة. تضمن التصادمات المرنة التساوي بين مختلف درجات الحرارة الحركية ($T_{kin}$) ودرجة حرارة الجدران ($T_{wall}$). تنقل التصادمات غير المرنة جزءاً من الطاقة الحركية إلى طاقة إثارة كامنة: حيث تكون سويات الإثارة الإلكترونية للجسيمات المعتدلة والأيونات مسكونة (مشغولة) وتوزعها الإحصائي يتبع قانون بولتزمان (3.318)، ومنه يجب أن تكون درجة حرارة الإثارة ($T_{exc}$) مساوية لدرجة الحرارة الحركية ($T_{kin}$). تصدر هذه السويات المثارة فوتونات يعاد امتصاصها من قبل ذرات أو أيونات أخرى في البلازما، ومنه فإنّ الوعاء المغلق يسلك سلوك جسم أسود تتبع فيه كثافة الطاقة في واحدة التواتر قانون بلانك (3.324): ومنه فإنّ درجة حرارة الإشعاع ($T_{rad}$) تساوي درجة حرارة الإثارة ($T_{exc}$). وأخيراً تولد التصادمات التفاعلية عمليات تفكك وتأين بالصدم (تحويل جزء من الطاقة الحركية إلى طاقة كامنة). في حالة التوازن تكون درجات حرارة التفكك ($T_{dis}$) والتأين ($T_{ion}$) مساوية لدرجة الحرارة الحركية ($T_{kin}$): يتبع توزع الجسيمات بحسب الصنف قانون غولد برغ-فاغ (3.320) وقانون ساها-إيغرت (3.322).

وبالنتيجة يتشكل التوازن الترموديناميكي التام (C.T.E) من تساوي جميع درجات الحرارة وانعدام تدرجات درجة الحرارة والكثافة في البلازما المستقرة المتجانسة أي [32 ,41,33]:

$$T=T_{wall}=T_{kin}=T_{exc}=T_{dis}=T_{ion}=T_{rad} \qquad (3.326)$$
$$\vec{\nabla} T = 0$$

$$\vec{\nabla} n = 0$$

ضمن هذه الشروط تكون قوانين التوازن الترموديناميكي المشروحة سابقاً صالحة في كل نقطة، أي قوانين:

- ماكسويل - بولتزمان (3.316).
- بولتزمان (3.318).
- غولد برغ - فاغ (3.320).
- ساها - إيغرت (3.322).
- بلانك (3.324).

وتستنتج التوابع الترموديناميكية (الطاقة E، طاقة هولمهولتزHelmholtz الحرة F، الإنتالبية H، إنتالبية جيبس الحرة G، الأنتروبية S، الضغط P) من تابع التوزع الكلي $\overline{Z}^{tot}(T)$ (3.228). ويمكن أن تحسب من العلاقات (3.220) و (3.223) - (3.227). في حالة التوازن يمكن أيضاً تعيين تابع التوزع الميكروي $H(\beta)$ (3.109). في كل نقطة من البلازما نلفت الانتباه إلى أنّ درجة التأين $\alpha_i$ (المعرفة في الفصل الأول) تتعلق بدرجة حرارة توازن البلازما. وتستنتج علاقة $\alpha_i$ بدرجة الحرارة بسهولة بملاحظة أنّ كثافة حوامل الشحنة في العلاقة (1.4) معطاة بقانون توازن التأين أو قانون ساها وإيغرت (3.322).

بشكل دقيق، يكون التوازن الترموديناميكي التام محققاً إذا تم الاحتفاظ بالإشعاع الصادر ضمن البلازما بشكل كامل، أي إذا كان سلوك الوعاء الحاوي على الغاز المؤين يسلك سلوك جسم أسود. يقضي هذا الشرط بأن تكون البلازما سميكة ضوئياً من أجل جميع الأطوال الموجية، مما يفرض على الإشعاعات أن تمتص بشكل كامل من قبل الجسيمات. في الحالة العملية لا يتحقق هذا الشرط إلاّ في قلب النجوم، في حين أنّ هناك ضياعاً كبيراً بالإشعاع في بلازما المخابر. ومنه فإنّ الشرط C.T.E لا يتحقق إلاّ إذا كان هناك عكوسية ميكروية لجميع العمليات التصادمية (جسيم - جسيم، جسيم - فوتون) المشروحة سابقاً كعمليات (الإثارة، وإزالة الإثارة، والتفكك، والتأين، وإعادة الاتحاد).

وأخيراً فإنّ البلازما خارج التوازن لا يمكن أن تبلغ حالة التوازن الترموديناميكي التام، إلاّ إذا كان عدد التصادمات في واحدة الزمن بين المكونات المختلفة للبلازما كافياً. وبالتالي فإنّ زمن الوصول إلى حالة التوازن يتعلق بتواترات الصدم الذي يضمن انتقال الطاقة بين الجسيمات والفوتونات ضمن الشروط المذكورة سابقاً.

### 3.6.3- التوازن الترموديناميكي الموضعي

كما رأينا في الفقرة السابقة، لا تكون بلازما المخابر في حالة .C.E.T (أو التوازن الترموديناميكي التام) لأن كثافتها ليست كبيرة بما يكفي وحجمها صغير جداً، بشكل غير كافٍ لكي يعاد امتصاص الفوتونات الصادرة من قبل المادة. ومنه تشكل هذه البلازما وسطاً رقيقاً ضوئياً يترك الجزء الأكبر من الإشعاعات الصادرة عن الجسيمات المثارة في البلازما تهرب إلى خارج الوسط. بسبب عدم الارتباط بين المادة والفوتونات فإن التصادمات بين الجسيمات هي التي تضمن نقل الطاقة بين السويات مما يؤدي إلى توازن الجملة.

ونظراً لعدم وجود حالة توازن ترموديناميكي تام في كل البلازما، يمكن أن نعرف، ضمن شروط سيأتي ذكرها لاحقاً، حالة توازن ترموديناميكي موضعي (.L.T.E). لنفرض بأنّ درجة الحرارة الموضعية للتوازن T معروفة في نقطة معينة من البلازما [47]. يعرف التوازن الترموديناميكي الموضعي التام (.C.L.T.E) بالشروط التالية:

$$\begin{gathered} T=T_{wall}=T_{kin}=T_{exc}=T_{dis}=T_{ion} \\ T \neq T^{rad} \\ \vec{\nabla} T \neq 0 \\ \vec{\nabla} n \neq 0 \end{gathered} \qquad (3.327)$$

وتكون كل القوانين ما عدا قانون بلانك، صالحة للاستخدام بشكل موضعي، أي قوانين:

- قانون ماكسويل - بولتزمان (3.316).
- قانون بولتزمان (3.318).
- قانون غولد برغ - فاغ (3.320).
- قانون ساها - إيغرت (3.322).

التوابع الترموديناميكية المعرفة في الفقرة السابقة تكون دائماً صالحة للاستخدام في حالة التوازن الترموديناميكي الموضعي التام.

لكي يتم تحديد فيما إذا كانت البلازما الرقيقة ضوئياً في حالة توازن ترموديناميكي موضعي، يجب أن يكون هناك دراسة مفصلة حول العمليات التصادمية الإشعاعية (نموذج التصادم الإشعاعي). حيث يسمح هذا النموذج بحساب محصلة جميع العمليات من إثارة وإزالة الإثارة والتأين وإعادة الاتحاد التي تحصل ضمن البلازما. وإذا كان هناك عكوسية ميكروية، يكون هناك توازن ترموديناميكي موضعي [41,33,32]. إن تحليلاً دقيقاً لسويات الطاقة للأصناف الموجودة في البلازما (الجسيمات المعتدلة والأيونات) يسمح بمعرفة ما إذا كان هناك حالة توازن ترموديناميكي موضعي تام، حيث نبحث بين سويات الطاقة المكممة لكل صنف عن سويتي الطاقة المتجاورتين المفصولتين بأكبر فاصل طاقي (بشكل عام تكون هاتان السويتان هما السوية الأساسية والسوية المثارة الأولى). وبما أنّ الإثارة وإزالة الإثارة تكون ناتجة عن التصادم بين الجسيمات فإذا كانت العكوسية الميكروية محققة بين هاتين السويتين يمكن أن نقبل بأنها محققة من أجل جميع السويات الأخرى. يمكن أن نقبل بأنها محققة من أجل جميع السويات الأخرى. كتقريب أول، نقول إنه من أجل هاتين السويتين المرجعيتين تكون البلازما في حالة توازن ترموديناميكي موضعي تام إذا كانت نسبة إزالة الإثارة بالتصادم أكبر على الأقل بعشر مرات من نسبة إزالة الإثارة بالإشعاع [33].

حين تكون الكثافة ضعيفة جداً (لا سيما كثافة الإلكترونات)، يكون عدد التصادمات في واحدة الزمن غير كافٍ لتحقيق العكوسية الميكروية لهذه

السويات. وبالتالي لا يكون توازن بولتزمان محققاً إلاّ للسويات الأكثر إثارة (القريبة من حد التأين) ونكون عندها في حالة التوازن الترموديناميكي الموضعي الجزئي (P. L. T. E.) [41,33].