الباب السادس

الاحتمالات المشروطة

CONDITIONAL PROBABILITY

نفرض أن E حدث ما فى فراغ عينـــة S بحيث يكون $P(E) \geqslant 0$. يعرف احتمال وقوع حدث A إذا وقع الحدث E أو بعبارة أخرى الاحتمال المشروط للحـدث A بمعلوميـة وقوع الحدث E والذى يكتب على الصورة $P(A/E)$ بأنه يساوى $\frac{P(A \cap E)}{P(E)}$

ويمكن اثبات صحة هذا التعريف بسهولة كما يأتى :

يتناسب احتمال A المشروط بوقوع E أى $P(A/E)$ مع $P(A \cap E)$

$$\therefore \quad P(A/E) = k\, P(A \cap E)$$

حيث k معامل مطلوب تعيينـه ويمكن ايجـاد k بملاحظة أن الاحتمال المشروط لوقوع الحدث E بمعلومية وقوع الحدث E يساوى 1

$$\therefore \quad P(E/E) = k\, P(E \cap E) = k\, P(E) = 1$$

$$\therefore \qquad k = \frac{1}{P(E)}$$

وينتج تبعا لذلك أن

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

وكحالة خاصة إذا كان S فراغ عينة متساوى الاحتمال وكانت | A | هى

عدد العناصر فى الحدث A فان

$$P(A \cap E) = \frac{|A \cap E|}{|S|} , P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

وينتج تبعا لذلك أن

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{|A \cap E|}{|E|}$$

لذلك إذا كان S فراغ عينة متساوى الاحتمال فأن

$$P(A/E) = \frac{\text{عدد العناصر فى } A \cap E}{\text{عدد العناصر فى } E}$$

أو

$$P(A/E) = \frac{\text{عدد الطرق لحدوث } A \text{ ، } E}{\text{عدد طرق حدوث } E}$$

نظرية الضرب فى الاحتمالات المشروطة : نعلم أن

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

$$\therefore \quad P(A \cap E) = P(E) \, . \, P(A/E)$$

ولكن

$$P(A \cap E) = P(E \cap A)$$

$$\therefore \quad P(E \cap A) = P(E) \, . \, P(A/E)$$

وهى نظرية الضرب فى الاحتمالات المشروطة ويمكن تعميمها كما يأتى :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

$$= P(A_1)\ P(A_2/A_1)\ P(A_3/A_1) \cap A_2\ \cdots\ P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

مثال (١)

يحتوى صندوق على 12 صنفا منها أربعة أصناف فاسدة ــ فاذا سحبت ثلاثة أصناف عشوائيا من الصندوق الواحد تلو الآخر ــ أوجد الاحتمال p حتى تكون الثلاثة أصناف المسحوبة كلها غير فاسدة .

احتمال أن يكون فى السحب الأول صنفا غير فاسد هو $\frac{8}{12}$

احتمال أن يكون فى السحب الثانى صنفا غير فاسد هو $\frac{7}{11}$

احتمال أن يكون فى السحب الثالث صنفا غير فاسد هو $\frac{6}{10}$

وحسب نظرية الضرب ينتج أن

$$p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

مثال (٢)

إذا رسب 25 % من طلبة السنة الاعدادية فى كليـــة الهندسة فى الرياضة ورسب 15 % فى الكيمياء ورسب 10 % فى الرياضـــة والكيمياء فاذا اختير طالب عشوائيا أوجد

i) احتمال رسوب هذا الطالب فى الرياضة إذا كان راسبا فى الكيمياء

ii) احتمال رسوبه فى الكيمياء إذا كان راسبا فى الرياضة

iii) احتمال رسوبه فى الرياضة والكيمياء معا

نفرض أن

$M = \{$ الطلبة الراسبون فى الرياضة $\}$

$C = \{$ الطلبة الراسبون فى الكيمياء $\}$

$P(M) = 0.25,\ P(C) = 0.15,\ P(M \cap C) = P(C \cap M) = 0.10$

i) احتمال رسوب الطالب فى الرياضة بمعلومية رسوبه فى الكيمياء هو :

$$P(M/C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3}$$

ii) احتمال رسوب الطالب فى الكيمياء بمعلومية رسوبه فى الرياضة هو :

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{0.10}{.25} = \frac{2}{5}$$

iii) احتمال رسوب الطالب فى الرياضة أو الكيمياء هو :

$$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C)$$

$$= 0.25 + 0.15 - 0.10 = .30 = \frac{3}{10}$$

مثال (٣)

إذا كان A,B حدثين بحيث يكون :

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{3},\ \text{and } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

أوجد قيمة

i) $P(A/B)$ ii) $P(B/A)$ iii) $P(A \cup B)$

iv) $P(A^c / B^c)$ v) $P(B^c / A^c)$

$$\text{i)}\quad P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ii)}\quad P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{iii)}\quad P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\text{iv)}\quad P(A^c/B^c) = \frac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)}$$

ولكن

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

وحسب قانون دى مورجان :

$$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\therefore\quad P(A^c \cap B^c) = P(A\cup B)^c$$

$$= 1 - P(A\cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore\quad P(A^c/B^c) = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

$$\text{v)}\quad P(B^c/A^c) = \frac{P(B^c\cap A^c)}{P(A^c)}$$

ولكن

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$P(B^c/A^c) = P(A^c \cap B^c) = \frac{5}{12}$$

$$P(B^c/A^c) = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

مثال (٤)

أوجد قيمة $P(B/A)$ علما بأن :

i) A فئة جزئية من الفئة B

ii) A ، B حدثين مانعين

i) إذا كانت A فئة جزئية من الفئة B فأن $A \cap B = A$ لذلك

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

ii) إذا كان A ، B حدثين مانعين أى فئتين غير مشتركتين فأن

$A \cap B = \phi$ لذلك :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\phi)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

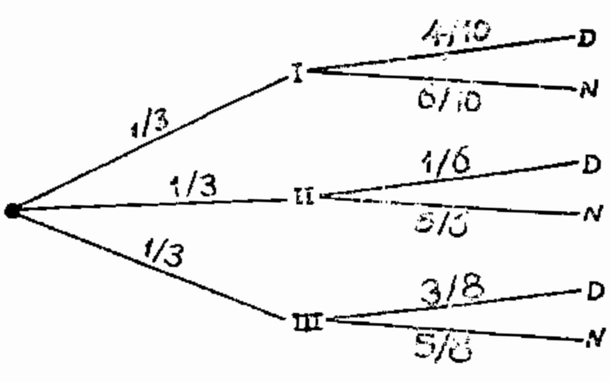
اشكال الشجرة Tree Diagrams

تسمى المتابعة المحدودة للتجارب التي لكل تجربة منها عدد محدود من النتائج معروف احتمالاتها ـ بعملية احتمالية محددة . وأنسب طريقة لوصف مثل هذه العملية وحساب احتمال وقوع أي حدث هي استعمال طريقة شكل الشجرة كما سيتبين من الأمثلة ، وسنستعمل نظرية الضرب لحساب الاحتمال الناتج عن مسار معين في الشجرة .

مثال (٥)

ثلاث صناديق I, II, III يحتوى الصندوق I على عشر لمبات منها أربع لمبات فاسدة ويحتوى الصندوق II على ست لمبات منها لمبة واحـــدة فاسدة ويحتوى الصندوق III على ثماني لمبات منها ثلاث لمبات فاسدة .

فإذا اخترنا صندوقا عشوائيا وسحبنا منه لمبة عشوائيا أوجد الاحتمال p حتى تكون اللمبة المسحوبة فاسدة .



في هذه الحالة توجد متتابعة في تجربتين .

I) اختيار أحد الصناديق الثلاثة .

ii) اختيار لمبة وقد تكون فاسدة D أو غير فاسدة N .

ويوضح شكل الشجرة هذه العملية ويعطى الاحتمال لكل فرع من الشجرة .

احتمال وقوع أى مسار خاص من الشجرة حسب نظرية الضرب يساوى حاصل ضرب احتمالات كل فرع من المسار - وعلى سبيل المثال احتمال اختيار الصندوق I ثم لمبة فاسدة يساوى $\frac{1}{3} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{15}$

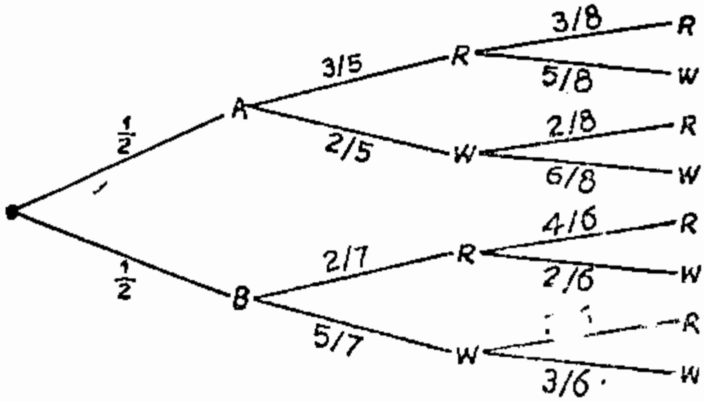
ونظرا لأنه توجد ثلاثة مسارات مانعة تؤدى إلى لمبة فاسدة فأن الاحتمال المطلوب p يساوى مجموع احتمالات هذه المسارات أى أن :

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

مثال (٦)

يحتوى الصندوق A على ثلاث كرات حمراء وكرتان بيضاءتان ويحتوى الصندوق B على كرتان حمراوتان وخمس كرات بيضاء . فأذا اختير صندوق عشوائيا وسحبت منه كرة ووضعت فى الصندوق الثانى ثم سحبت بعد ذلك كرة من الصندوق الثانى أوجد الاحتمال p حتى تكون الكرتان المسحوبتان من نفس اللون .

نرسم شكل الشجرة المبين مع ملاحظة أنه إذا اختير الصندوق A وسحبت كرة حمراء ووضعت فى الصندوق B فأنه يكون فى هذا الصندوق ثلاث كرات حمراء وخمس كرات بيضاء .



ونظرا لأنه يوجد أربعة مسارات تؤدى إلى اختيار كرتين من نفس اللون ينتج أن :

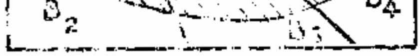
$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{901}{1680}$$

القواطيع ونظرية بايى : Partitions and Paye's theorem :

نفرض أن $\{ B_1 , B_2 , \cdots , B_n \}$ فئة من الأحداث تكون قاطوعا من فراغ العينة S حيث $P(B_i) \neq 0$ لقيم $i = 1 , \cdots , n$ نفرض أن A أى حدث من S بحيث يكون $P(A) \neq 0$ لذلك لقيم $k = 1 , 2 , \cdots , n$

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)}$$



A مظللة

الحدث A هو اتحاد الاحداث الاتية :

$$B_1 \cap A \;,\; B_2 \cap A \;,\; \cdots \;,\; B_n \cap A$$

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cdots\cdots \cup (B_n \cap A)$$

$$\therefore\; P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \cdots + P(B_n \cap A)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)$$

وحسب تعريف الاحتمال المشروط

$$P(B_k / A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)}$$

ويثبت المطلوب . ولكن

$$P(B_k \cap A) = P(A \cap A_k) = P(B_k)\, P(A/B_k)$$

$$\therefore \quad P(B_k / A) =$$

$$\frac{P(B_k)\ P(A/B_k)}{P(B_1) P(A/B_1) + P(B_2) P(A/B_2) + \cdots + P(B_n) P(A/B_n)}$$

وهى صورة أخرى من نظرية باى .

مثال (٧)

تنتج ثلاث ماكينات A , B , C 10% , 30% , 60% على الترتيب من العدد الكلى من الاصناف التى ينتجها مصنع . ونسب الأصناف الفاسدة التى تنتجها هـذه الماكينات 4% , 3% , 2% على الترتيب فاذا اختير أحد الأصناف عشوائيا ووجد أنه فاسد . أوجد احتمال أن يكون هذا الصنف من انتاج الماكينة C

نفرض أن $x = \{$أصناف فاسدة$\}$

احتمال أن يكون الصنف من انتاج الماكينة C بمعلومية أن الصنف فاسد يساوى $P(C/x)$ وحسب نظرية باى

$$P(C/x) = \frac{P(C)\ P(x/C)}{P(A)\,P(x/A) + P(B)\,P(x/B) + P(C)\,P(x/C)}$$

$$= \frac{(.10)\ (.04)}{(.60)\ (.02) + (.30)\ (.03) + (.10)\ (.04)}$$

$$= \frac{4}{25}$$

الاحداث المستقلة :

يقال للحدث B أنه مستقل عن الحدث A إذا كان احتمال وقوع B لايتأثر بوقوع A أو عدم وقوعه . أو بعبارة أخرى إذا كان احتمال وقوع B يساوى الاحتمال المشروط لوقوع B بمعلومية حدوث A أى

$$P(B) = B(B/A)$$

فبالتعويض عن $P(B)$ بدلا من $P(B/A)$ فى نظرية الضرب وهى :

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B/A)$$

ينتج أن :

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

تعريف : يكون الحدثان B , A مستقلين إذا كان

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

مثال (٨)

احتمال أصابة قذيفة A لهدف يساوى $\frac{1}{4}$ واحتمال أصابة قذيفة B لنفس الهدف يساوى $\frac{3}{5}$ أوجد احتمال أصابة الهدف إذا أطلقت كلا من القذيفتين B , A على الهدف

فى هذا المثال

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{5}$$

احتمال اصابة الهدف إذا أطلقت كلا من القذيفتين A ، B هو $P(A \cup B)$ ونظرا لان اصابة الهدف بكل من A أو B لا يتأثر أحدهما بالآخر ينتج أن

$$P(A \cap B) = P(A).\,P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A).\,P(B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4}.\frac{2}{5} = \frac{11}{20}$$

مثال (٩)

احتمال إصابة ثلاث رجال لهدف هو $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ على الترتيب ويطلق كل رجل طلقة واحدة على الهدف

i) أوجد الاحتمال p حتى يصيب أحد الرجال الهدف

ii) إذا أصاب الهدف أحد الرجال فقط ـ أوجد احتمال أن تكون هذه الاصابة من الرجل الاول

نعتبر الاحداث : { الرجل الأول يصيب الهدف } = A ،
{ الرجل الثانى يصيب الهدف } = B ، { الرجل الثالث يصيب الهدف } = C

$$P(A) = \frac{1}{6}\ ,\ P(B) = \frac{1}{4}\ \text{and}\ P(C) = \frac{1}{3}$$

الأحداث الثلاثة مستقلة وفيها

$$P(A^c) = \frac{5}{6}\ ,\ P(B^c) = \frac{3}{4}\ ,\ P(C^c) = \frac{2}{3}$$

i) نفرض أن { رجل واحد يصيب الهدف } = E

$$\therefore \quad E = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

$$p = P(E) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{72}$$

ii) احتمال إصابة الرجل الأول للهدف بمعلومية أن رجلا واحد فقط يصيب الهدف يساوى $P(A/E)$

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

$$P(A \cap E) = P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A)\, P(B^c) \,.\, P(C^c)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12},$$

$$P(E) = \frac{31}{72} \quad \text{(كما سبق إثباته)}$$

$$\because \quad P(A/E) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31}$$

مثال (١٠)

احتمال أن يعيش رجل عشر سنوات أكثر من زوجته يساوى $\frac{1}{4}$ واحتمال

أن تعيش زوجته عشر سنوات أخرى يساوى $\frac{1}{3}$ أوجد احتمال :

i) أن يعيش الزوجان عشر سنوات

ii) أن يعيش أحدهما على الأقل عشر سنوات

iii) أن لا يعيش أحدهما عشر سنوات

v) أن تعيش الزوجة فقط عشر سنوات

نفرض أن A هو الحدث لأن يعيش الزوج عشر سنوات وأن B هو الحدث لأن تعيش الزوجة عشر سنوات فيكون

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

i) احتمال أن يعيش الرجل وزوجته عشر سنوات هو $P(A \cap B)$
ونظراً لأن B ، A حدثين مانعين أى لا يتوقف وقوع أحدهما على الآخر .

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

ii) احتمال أن يعيش الرجل أو زوجته على الأقل عشر سنوات هو $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

أو بطريقة أخرى : احتمال أن يعيش الرجل أو زوجته على الأقل عشر سنوات هو

$$1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A^c)\,P(B^c)$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

iii) احتمال أن لا يعيش كل من الرجل أو زوجته عشر سنوات هو
$P(A^c \cap B^c)$

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)\;P(B^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

(لأن حدوث كل من A^c ، B^c لا يتوقف على الآخر)

iv) احتمال أن تعيش الزوجة فقط عشر سنوات هو $P(A^c \cap B)$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)\;P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

المحاولات المستقلة أو المكررة : Independent or Repeated Trials

نفرض أن S فراغ عينة محدودة ـ نعنى بقولنا محاولات مستقلة أو مكررة أن فراغ الاحتمال T يحتوى على مركبات عددها n من العناصر المرتبة فى الفراغ العينة S بحيث يكون احتمال العنصر الذى عدد مركباته n يساوى حاصل ضرب احتمالات مركباته أى أن

$$P(S_1, S_2, \cdots, S_n) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdots P(S_n)$$

مثال (١١)

احتمال اصابة نوع معين من القذائف لهدف يساوى 0,3 أوجد عــدد

القذائف التى يجب اطلاقها حتى يكون احتمال إصابة الهدف يساوى على الأقل 80%

احتمال عدم اصابة القذيفة للهدف يساوى .7 لذلك يكون احتمال عدم أصابة n من القذائف للهدف يساوى $(0.7)^n$ لذلك نبحث عن أصغر قيمة تأخذها n التى تجعل

$$1 - (.7)^n > .8 \qquad \therefore \qquad (.7)^n < .2$$

$$(.7)^1 = .7 \ , \ (.7)^2 = .49 \ , \ (.7)^3 = .343, \ (.7)^4 = 0.2401$$

$$(.7)^5 = .16807$$

لذلك يجب اطلاق خمس قذائف على الأقل حتى يكون احتمال أصابة الهدف لا يقل عن 80 %