الباب الخامس

تطبيق الفئات فى نظرية الاحتمالات

مقدمة فى الاحتمالات

يعرف الاحتمال p للحدث A كما يأتى : اذا أمكن وقوع الحدث A بطرق عددها s من طرق كلية متساوية الوقوع عددها n فأن

$$p = P(A) = \frac{s}{n}$$

فمثلا عند رمى زهر النرد فأنه يمكن ظهور عدد زوجى بثلاث طرق من طرق كلية عددها سته متساوية الاحتمال فى الحدوث — لذلك تكون

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

فراغ العينة والاحداث : Sample Space and events

تسمى الفئة S لجميع النتائج الممكنة لتجربة معينة بفراغ العينة . ويسمى أى عنصر فى S بالعينة ويكون العنصر A فئة جزئية من فراغ العينة S ويسمى الحدث A الذى يحتوى على عينة واحدة $A \in S$ بحدث أولى وتكون الفئة الخالية φ والفئة S نفسها عينتان وتسمى φ فى كثير من الاحوال بالحدث المستحيل كما تسمى S بالحدث الاكيد .

ويمكننا ربط الاحداث لتكوين أحداث جديدة باستعمال عمليات الفئات :

1) $A \cup B$ هو الحدث الذى يقع إذا وقع A أو B

(ii $A \cap B$ هو الحدث الذى يقع إذا وقع كل من A ، B

(iii A^c (الحدث المكمل للحدث A) هو الحدث الذى يقع إذا لم يقع A
ويسمى الحدثان A , B مانعين إذا كان $A \cap B = \phi$ أى أن الحدثين غير مشتركين أى يكون الحدثان A , B مانعين إذا كان من المستحيل حدوثهما فى نفس الوقت .

مثال (١)

عند رمى رمى زهر النرد فأن فراغ العينة يحتوى على ستة أعداد محتملة أى

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

نفرض أن حدث ظهور عدد زوجى هو A وأن حدث ظهور عدد فردى هو B وأن حدث ظهور عدد أولى هو C أى أن :

$$A = \{ 2, 4, 6 \} , \quad B = \{ 1, 3, 5 \} , \quad C = \{ 2, 3, 5 \}$$

وينتج أن

$$A \cup C = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

هو حدث ظهور عدد زوجى أو عدد أولى (أى لا يقبل القسمة إلا على نفسه)

$$B \cap C = \{ 3, 5 \}$$

هو حدث ظهور عدد فردى أو أولى

$$C^c = \{ 1, 4, 6 \}$$

هو حدث عدم ظهور عدد أولى

مع ملاحظة أن A ، B حدثان مانعين أى $A \cap B = \phi$

أو بعبارة أخرى لا يمكن ظهور عدد زوجى وعدد فردى فى نفس الوقت

مثـال (٢)

نرمى قطعة نقود ثلاث مرات ونلاحظ ظهور الصور H وظهور الكتابة T يحتوى فراغ العينة S على ثمانية عناصر :

$$S \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$$

نفرض أن حدث ظهور صورتين أو أكثر على التوالى هو A وأن حدث ظهور صور فقط أو كتابة فقط هو B

$$A = \{ HHH, HHT, THH \}, \quad B = \{ HHH, TTT \}$$

لذلك

$$A \cap B = \{ HHH \}$$

هو الحدث الأولى الذى تظهر فيه الصور فقط

وحدث ظهور خمس صور هو الفئة الخالية ϕ

فروض الاحتمال : Axioms of Probability

نفرض أن S هى فراغ العينة ، ε هى مجموعة الأحداث ، P دالة حقيقية معرفة فى ε . تسمى P دالة احتمال ويسمى P (A) باحتمال الحدث A إذا تحققت الفروض الآتية :

i) لكل حدث A $\quad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

ii) $P(S) = 1$

iii) إذا كان A,B حدثين مانعين فأن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

١٧) إذا كانت $A_1 , A_2 , \dots \dots$ متتابعة من الأحداث المانعة فأن

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \dots$$

نظرية ١) : إذا كانت ϕ هي الفئة الخالية فأن $P(\phi) = 0$

الاثبات : نفرض أن A فئة ما فتكون A ، ϕ غير مشتركتين أى أن:

$$A \cup \phi = A$$

وحسب iii) فأن

$$P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi)$$

ولكن $A \cup \phi = A$

$$\therefore \; P(A) = P(A) + P(\phi)$$

$$\therefore \; P(\phi) = 0$$

نظرية ٢) : إذا كان A^c هو الحدث المكمل للحدث A فأن

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

الاثبات : يمكن اعتبار أن فراغ العينة S مكون من الحدثين المانعين A ، A^c أى أن $S = A \cup A^c$ وحسب (ii) ، (iii) :

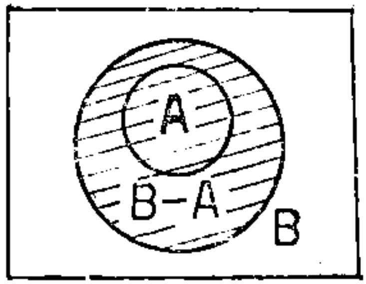
$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

$$\therefore \; P(A^c) = 1 - P(A)$$

نظرية ٣) : إذا [illegible] $\subset B$ [illegible] $P(A)$ [illegible]

الاثبات : إذا كانت $A \subset B$ [illegible] أن B تتكون من الحدثين المانعين A ، $B - A$) كما هو مبين فى الشكل) أى :

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$



مظللة B

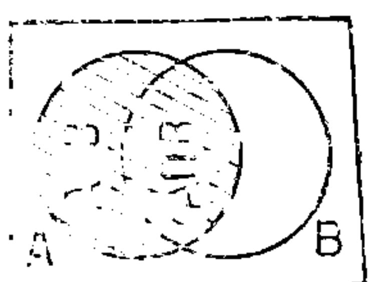
ولكن حسب (i)، $0 \leqslant P(B-A) \leqslant 1$ لذلك ينتج أن $P(A) \leqslant P(B)$

نظرية ٤) : إذا كان A,B أى حدثين فأن

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

الاثبات : يمكن اعتبار أن A تتكون من الحدثين المانعين $A - B$ ، $A \cap B$

(كما هو مبين بالشكل) أى



مظللة A

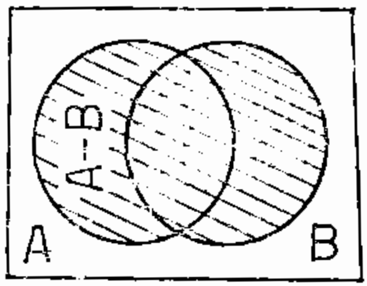
$$P(A) = P(A -- B) + B(A \cap B)$$

$$\therefore \quad P(A-B) = B(A) - P(A \cap B)$$

نظرية ٥) : إذا كان A ، B أى حدثين فأن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الاثبات : يمكن اعتبار أن $A \cup B$ يتكون من الحدثين المانعين $A - B$ ،
B (كما هو مبين فى الشكل) أى



مظللة $A \cup B$

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

وحسب (iii) ونظرية (4) ينتج أن

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

$$= \{ P(A) - P(A \cap B) \} + P(B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

فراغ الاحتمالات المحدودة Finite Probability Space

نفرض أن S فراغ عينة محدود أى

$$S = \{ a_1 , a_2 , \cdots , a_n \}$$

فيمكن الحصول على فراغ احتمال محدود بفرض أنه لكل نقطة $a_i \in S$
يوجد عدد حقيقى p_i يسمى احتمال a_i يحقق الخاصتين الآتيتين :

i) كل p_i غير سالب $p_i \geq 0$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 \quad \text{أى} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad (ii$$

لذلك يمكن تعريف الاحتمال $P(A)$ لأى حـدث A بأنه مجموع احتمالات نقط A .

مثـال (٣)

إذا رميت ثلاث قطع نقود ولوحظ عدد الصور ـ فأن فراغ العينة فى حالة ظهور الصور هو $S = \{0, 1, 2, 3\}$ ويكون :

$$P(0) = \frac{1}{8}, \; P(1) = \frac{3}{8}, \; P(2) = \frac{3}{8}, \; P(3) = \frac{1}{8}$$

حيث أن كل احتمال غير سالب ومجموع الاحتمالات يساوى 1

نفرض أن A هو حدث ظهور صورة واحدة على الأقل وأن B هو حدث ظهور كل الصور أو كل الكتابة .

$$\therefore A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{0, 3\}$$

فحسب التعريف :

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(B) = P(0) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

مثـال (٤)

اشترك ثلاث أشخاص A, B, C فى سباق جرى فأذا كان احتمال فوز A

ضعف احتمال فوز B واحتمال فوز B ضعف احتمال فوز C أوجد احتمال فوز كل منهم . أى $P(A), P(B), P(C)$

ما هو احتمال فوز B أو C أى $P(B,C)$

نفرض أن $P(C) = p$ فيكون $P(A) = 4p$ ، $P(B) = 2p$

$$\therefore 4p + 2p + p = 1 \qquad \therefore p = \frac{1}{7}$$

$$\therefore P(A) = \frac{4}{7} \;,\; P(B) = \frac{2}{7} \;,\; P(C) = \frac{1}{7}$$

$$P(B,C) = P(B) + P(C) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

مثال (٥)

صنع زهر نرد بطريقة تجعل ظهور عدد معين عند رمى الزهر يتناسب مع العدد . (أى أن احتمال زهور العدد ٦ مثلا ضعف احتمال ظهور العدد ٣) فأذا كانت :

$C = \{$ عدد فردى $\}$ ، $B = \{$ عدد أولى $\}$ ، $A = \{$ عدد زوجى $\}$

i) أوصف فراغ العينة أى أوجد احتمال كل عينة

ii) أوجد $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$

iii) أوجد احتمال : **اولا** : ظهور عدد زوجى أو أولى .

ثانيا : ظهور عدد فردى أولى .

ثالثا : ظهور A وعدم ظهور B .

i) نفرض أن $P(1) = p$ فيكون

$$P(6) = 6p \text{ ، } P(5) = 5p \text{ ، } P(4) = 4p \text{ ، } P(3) = 3p \text{ ، } P(2) = 2p$$

$$\therefore \; p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1 \qquad \therefore p = \frac{1}{21}$$

وينتج أن :

$$P(1) = \frac{1}{21}, \; P(2) = \frac{2}{21}, \; P(3) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7},$$

$$P(4) = \frac{4}{21}, \; P(5) = \frac{5}{21}, \; P(6) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$$\text{ii)} \quad P(A) = P\{2, 4, 6\} = P(2) + P(4) + P(6)$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$$P(B) = P\{2, 3, 5\} = P(2) + P(3) + P(5)$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$$

$$P(C) = P\{1, 3, 5\} = P(1) + P(3) + P(5)$$

$$= \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

iii) اولا : أحتمال ظهور عدد زوجى أو أولى هو $P\{A \cup B\}$

$$P\{A \cup B\} = P\{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$= P(2) + P(3) + P(4) + (5) + P(6)$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{20}{21}$$

أو بطريقة أخرى : احتمال ظهور عدد زوجى أو أولى هو احتمال عدم ظهور الرقم 1 أى

$$P(A \cup B) = 1 - P(1) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

ثانيا : احتمال ظهور عدد أولى فردى هو $P(B \cap C)$

$$P(B \cap C) = P(3, 5) = P(3) + P(5)$$

$$= \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{8}{21}$$

ثالثا : احتمال ظهور A وعدم ظهور B هو $(A \cap B^c)$

$$P(A \cap B^c) = P(4, 6) = P(4) + P(6)$$

$$= \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{10}{21}$$

الفراغات المحدود المتساوية الاحتمال : Finite Equiprobable Spaces

فى كثير من المسائل العملية فأن النتائج المختلفة لفراغات العينة تكون احتمالاتها متساوية الوقوع ومثل هذا الفراغ المحدود S الاحتمال الذى فيه كل عينة لها نفس الاحتمال يسمى الفراغ المتساوى الاحتمال أو المنتظم . بوجه خاص إذا إحتوى S على n من النقط فان احتمال كل نقطة يساوى $\frac{1}{n}$ كذلك إذا أحتوى الحدث A على r من النقط فأن احتمال وقوعه يساوى $\frac{r}{n}$ أو بعبارة أخرى

$$P(A) = \frac{\text{عدد العناصر فى } A}{\text{عدد العناصر فى } S}$$

أو

$$P(A) = \frac{\text{عدد الطرق التى يمكن أن يقع بها الحـــدث } A}{\text{عدد الطرق التى يمكن أن يقع بها فراغ العينة } S}$$

وهذا القانون فى $P(A)$ يستعمل فقط بالنسبة إلى الفراغ المتساوى الاحتمال ولا يمكن استعماله بوجه عام .

كذلك يستعمل التعبير « عشوائى » أو حيثما اتفق فقط بالنسبة إلى الفراغ المتساوى الاحتمال . ويستعمل التعبير : نختار نقطة عشوائية (أو حيثما اتفق) من الفئة S للدلالة على أن S فراغ متساوى الاحتمال أى أن كل عينة فى S لها نفس الاحتمال .

مثـال (٦)

سحبت ورقة من مجموعة ورق [illegible] (تحتوى على ٥٢ [illegible]) عشوائيا بفرض أن :

$A =$ { ورقة الاسباتى } ، [illegible] { الورقة بنت أو ولد أو شايب }

أوجد قيمة : $P(A)$, $P(B)$ [illegible] $P(A \cap B)$

فى هذه الحالة يتساوى احتمال سحب أى [illegible]

$$P(A) = \frac{\text{عدد [illegible]}}{\text{عدد الورق الكلى}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{\text{عدد الورق من البنت والولد والشايب}}{\text{عدد الورق الكلى}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد الأوراق الاسباتى من البنت والولد والشايب}}{\text{عدد الورق الكلى}} = \frac{3}{52}$$

أو بطريقة أخرى :

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{52}$$

مثـال (٧)

سحبت عينتان عشوائيتان من صندوق يحتوى على ١٢ عينة منها ٤ عينات فاسدة أوجد احتمال سحب

i) عينتان فاسدتان

ii) عينتان غير فاسدتين

iii) عينة فاسدة واحدة على الأقل

نفرض أن $A =$ { العينتان فاسدتان } ، $B =$ { العينتان غير فاسدتين } ،
$C =$ { عينة فاسدة واحدة على الأقل }

عدد طرق أختيار عينتين من ١٢ عينة يساوى $\quad {}^{12}C_2 = 66$

تحدث A بطرق عددها $\quad {}^{4}C_2 = 6$

تحدث B بطرق عددها $\quad {}^{8}C_2 = 28$

i) أحتمال أختيار عينتين فاسدتين يساى $\quad P(A) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

ii) احتمال اختيار عينتين غير فاسدتين يساوى $P(B) = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$

iii) { عينة فاسدة واحدة الأقل } = C تساوى مكملة B أى أن $C = B^c$

$$\therefore P(C) = P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{13}$$

مثال (٨)

يحتوى فصل فى احدى الكليات الجامعية على عشرة شبان وعشرين آنسة ونصف عدد كل من الشبان والآنسات لهم عيون عسلية ـ أوجد الاحتمالات p عند اختيار شخص اختياراً عشرائيا أن يكون شابا أو ذو عيون عسلية (شابا أو آنسة)

نفرض أن { الشخص شابا } = A ، { الشخص ذو عيون عسلية } = B

الاحتمال المطلوب هـــو أختيار شابا (أو فتــاة) ذا عينين عسليتين أى $P(A \cup B)$

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال (٩)

إذا كان B ، A حدثين بحيث يكون :

$$P(A) = \frac{3}{8} , P(B) = \frac{1}{2} \text{ and } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

أوجد :

i) $P(A \cup B)$ ii) $P(A^c)$ and $P(B^c)$ iii) $P(A^c \cap B^c)$

iv) $P(A^c \cup B^c)$ v) $P(A \cap B^c)$ vi) $P(B \cap A^c)$

i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

ii) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

iii) باستعمال قانون دى مورجان :

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$\therefore P(A^c \cap B^c) = P\{(A \cup B)^c\}$

$$= 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

iv) باستعمال قانون دى مورجان :

$(A \cap B) = A^c \cup B^c$

$$\therefore\ P(A^c \cup B^c) = P\{(A \cap B)^c\}$$

$$= 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

أو بطريقـة أخرى

$$P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{v)}\ P(A \cap B^c) = P(A - B)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{vi)}\ P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$$

$$= P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Infinite Sample Spaces : فراغات العينة اللانهائية

كما فى حالة الفراغات المحـــددة نحصل على فراغ احتمالى بفرض أنه لـكل $a_i \in S$ يوجد عدد حقيقى p_i يسمى احتمال a_i بحيث يكون

i) $p_i \geqslant 0$

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ أى $p_1 + p_2 + \cdots\cdots = 1$

ويكون الاحتمال $P(A)$ لأى حدث A هو مجموع احتمالات نقط A

مثال (١٠)

نعتبر فراغ العينة $\{1, 2, 3, \ldots, \infty\} = S$ عند رمى قطعة نقود حتى تظهر صورة حيث n تعبر فى هذه الحالة عن عدد مرات رمى قطعة النقود

$$p(1) = \frac{1}{2}, p(2) = \frac{1}{4}, p(3) = \frac{1}{8}, \ldots \ldots,$$

$$p_n = \left(\frac{1}{2^n}\right), \ldots \ldots, p(\infty) = 0$$

مع ملاحظة أن

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

تمارين

١) بفرض أن $S = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$ ، P هى دالة احتمال فى S أوجد .

i) $P(a_1)$ إذا كان :

$$P(a_2) = \frac{1}{3} , P(a_3) = \frac{1}{6} , P(a_4) = \frac{1}{7}$$

ii) $P(a_1) , P(a_2)$ إذا كان :

$$P(a_3) = P(a_4) = \frac{1}{4} , P(a_1) = 2 P(a_2)$$

iii) $P(a_1)$ إذا كان :

$$P \{ a_2 , a_3 \} = \frac{2}{3} , P \{ a_2 , a_4 \} = \frac{1}{2} \text{ and } P(a_2) = \frac{1}{3}$$

$$\left[\frac{7}{8} , \frac{1}{3} , \frac{1}{6} , \frac{1}{6} \right]$$

٢) صنعت قطعة نقود بطريقة تجعل احتمال ظهور صورة ضعف احتمال ظهور كتابة أوجد احتمال ظهور صورة واحتمال ظهور كتابة .

$$\left[\frac{2}{3} , \frac{1}{3} \right]$$

٣) يشترك رجلان m_1 , m_2 وثلاث سيدات w_1 , w_2 and w_3 فى مسابقة شطرنج . فاذا كان احتمال فوز أشخاص من نفس الجنس متساو واحتمال فوز الرجل يساوى ضعف احتمال فوز السيدة أوجد

i) احتمال فوز سيدة بالمباراة

ii) إذا تزوج m_1 ، w_3 أوجد احتمال فوز أحدهما بالمباراة

$$\left[\frac{1}{7} , \frac{3}{7} \right]$$

٤) أوجد الاحتمال p لكل من الأحداث الآتية :

i) ظهور عدد زوجى عند رمى زهر طاولة

ii) ظهور شايب عند سحب ورقة من أوراق اللعب

iii) ظهور كتابة واحدة على الأقل عند رمى ٣ قطع نقود

iv) ظهور كرة بيضاء عند سحب كرة واحدة من صندوق يحتوى أربع كرات بيضاء وثلاث كرات حمراء وخمس كرات زرقاء

$$\left[\frac{1}{2} , \frac{1}{13} , \frac{7}{8} , \frac{1}{3} \right]$$

٥) سحبت ثلاث لمبات كهربائية سحبا عشوائيا من بين خمسة عشر لمبة منها خمس لمبات فاسدة أوجد احتمال :

i) عدم وجود لمبة فاسدة من اللمبات التى سحبت

ii) وجود لمبة واحدة بالضبط فاسدة من اللمبات التى سحبت

iii) وجود لمبة واحدة على الأقل فاسدة

$$\left[\frac{24}{91} ; \frac{45}{91} , \frac{67}{91} \right]$$

٦) صنعت قطعة نقود بطريقة تجعل احتمال ظهور صورة H ثلاثة أمثال احتمال ظهور كتابة T أوجد $P(H)$, $P(T)$

$$\left[\frac{3}{4} , \frac{1}{4} \right]$$

٧) اشترك ثلاثة طلبه A , B , C فى مسابقة سباحة فأذا كان احتمال فوز A يساوى احتمال فوز B يساوى ضعف احتمال فوز C أوجد احتمال فوز B أو C فى المسابقة .

$$\left[\frac{3}{5} \right]$$

٨) صنع زهر نرد بطريقة بحيث يكون للاعداد الزوجية نفس الفرصة فى الظهور ـ كذلك يكون للأعداد الفردية نفس الفرصة فى الظهور واحتمال ظهور عدد زوجى ضعف احتمال ظهور عدد فردى ـ أوجد احتمال ظهور :

أ) عدد زوجى　　ب) عدد أولى　　ج) عدد فردى

د) عدد فردى أولى

$$\left[\frac{2}{3} , \frac{4}{9} , \frac{1}{3} , \frac{2}{9} \right]$$

٩) يدرس ستون طالبا من طلبه عددهم ١٢٠ طالبا رياضة ويدرس خمسون طالبا منهم طبيعة ويدرس عشرون طالبا منهم رياضة وطبيعة ـ فأذا اختير طالبا اختيارا عشوائيا أوجد احتمال أن تكون دراسة الطالب :

أ) رياضة أو طبيعة .

ب) مواد أخرى غير الرياضة والطبيعة .

$$\left[\frac{3}{4} , \frac{1}{4} \right]$$

١٠) إذا كان A , B حدثين بحيث يكون

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, \; P(A^c) = \frac{2}{3} \text{ and } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

أوجد

i) $P(A)$ ii) $P(B)$ iii) $P(A \cap B)^c$

$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{12} \right]$