الباب السابع

الفئات (SETS)

تعرف الفئة بأنها تجمع من الأشياء معرفة جيدا وتظهر الفئات فى فروع كثيرة من الرياضة وخصوصا فى نظرية الاحتمالات التى سنشرحها فى البابين القادمين ويرمز للفئات بالحروف الكبيرة مثل ... ,A, B, X, Y

يسمى كل عضو من أعضاء فئـــة ما عنصرا ونرمز له بالحروف الصغيرة ... ,a, b, x, y وإذا كان p عنصراً من عناصر الفئة A أى أن p ينتمى إلى الفئة A فأن ذلك يكتب رياضيا على الصورة $p \in A$ إذا كان p لا ينتمى إلى الفئة A أى أن p ليس عنصرا من عناصر A فأن ذلك يكتب على الصورة $p \notin A$

ويمكن تعريف فئة معينة بكتابة عناصرها فمثلا إذا كانت A تحتوى على الاعداد : ,1, 3, 7, 10 فأننا نكتب

$$A = \{ 1, 3, 7, 10 \}$$

أى تفصل العناصر بالحرف و وتكتب داخل قوسين من النوع { }
ويمكن أيضا تعريف فئة معينة بذكر الخواص التى تحققها عناصرها فمثلا إذا كانت B هى فئة الأعداد الصحيحة الزوجية فأننا نستعمل حرف فى العادة x ليمثل عنصراً أختياريا ونكتب

$$B = \{ x : \text{عدد زوجى } x \}$$

وتقرأ « B هى فئة الاعداد الصحيحة x بحيث تكون x عدد زوجى »

ويحسن أستخدام هذا التعريف عندما يكون عدد عناصر الفئة كبيرا أو إذا تعذر ذكر جميع عناصر الفئة . وتقرأ النقطتين : بحيث يكون

مثـال (١)

إذا كانت $B = \{ x :$ عدد صحيح $x, x, > 0 \}$ فأنه يمكن كتابة

$$B = \{ 1, 2, 3, \cdots \}$$

مع ملاحظة أن $-5 \notin B$ ، $2 \in B$ ، $\pi \notin B$

ويستعمل فى العادة الرموز الخاصة الآتية :

$N =$ فئة الأعداد الصحيحة الموجبة $1, 2, 3, \ldots$

$Z =$ فئة الأعداد الصحيحة $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

$R =$ فئة الأعداد الحقيقية

$Q =$ فئة الأعداد الجذرية

الفئات المحدودة واللانهائية : Finite and Infinie sets

يمكن أن تكون الفئة محدودة أو لانهائية — وتكون الفئة محدودة إذا أحتوت على عدد معين من العناصر المختلفة أى عند عد العناصر المختلفة للفئة تصل عملية العد إلى نهاية . وفيما عدا ذلك تكون الفئة لانهائية .

فمثلا إذا كانت M هى فئة أيام الاسبوع فأن M فئة محدودة

وإذا كانت : $N = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots, \ldots \}$ فأن N فئة لانهائية

كذلك إذا كانت : $\{ x$ نهر من أنهار العالم : $x \} = P$

فبالرغم من صعوبة معرفة عدد أنهار العالم الا أن P ما زالت فئة محدودة

تساوى الفئات : Equality of Sets

يقال أن الفئتين A ، B متساويتان إذا كان كل عنصر ينتمى إلى الفئة A ينتمى أيضا إلى الفئة B وكل عنصر ينتمى إلى الفئة B ينتمى أيضا إلى الفئة A

مثال (٢)

نفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{3, 1, 4, 2\}$ وينتج أن

$A = B$ أى أن $\{3, 1, 4, 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$

لأن كل من العناصر $1, 2, 3, 4$ فى الفئة A ينتمى إلى الفئة B وكل من العناصر $3, 1, 4, 2$ فى الفئة B ينتمى إلى الفئة A . ويلاحظ أن الفئة لا تتغير اذا تغير ترتيب عناصرها .

مثال (٣)

نفرض أن $C = \{5, 6, 5, 7\}$ ، $D = \{7, 5, 7, 6\}$ وينتج أن

$C = D$ أى أن $\{7, 5, 7, 6\} = \{5, 6, 5, 7\}$

لأن كل عنصر فى C ينتمى إلى D وكل عنصر فى D ينتمى إلى C .

ويلاحظ أن الفئة لا تتغـــير إذا كررت عناصرها ــ كذلك فأن الفئة $\{5, 6, 7\}$ تساوى كل من الفئتين C ، D

نفرض أن $E = \{ x : x^2 - 3x = -2 \}$ ، $F = \{ 2, 1 \}$ ،
$G = \{ 1, 2, 2, 1 \}$ وينتج أن

$$E = F = G$$

الفئة الخالية : Empty Set

من المناسب أستعمال ما يسمى بالفئة الخالية أى الفئة التى لا تحتوى على أى
عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ

مثال (٥)

نفرض أن $A = \{ x : x^2 = 9$ ، x عدد زوجى $\}$ لذلك تكون A
هى الفئة الخالية ϕ

مثال (٦)

نفرض أن B هى فئة الأحياء من الناس فى العالم الذين يزيد سنهم عن ٥٠٠
سنة فحسب الاحصائيات المعروفة فأن B هى الفئة الخالية ϕ

مثال (٧)

نفرض أن $C = \{ \phi \}$

فأن $\phi \neq C$ لأن الفئة C تحتوى على عنصر واحد وليست فئـــة خالية

الفئات الجزئية : Subsets

إذا كان كل عنصر من A هو عنصر فى B أيضا تسمى A فئة جزئية من B أو بعبارة أخرى تكون A فئة جزئية من B إذا كان $x \in A$ يتطلب $x \in B$ ويعبر عن هذا بالرمز :

$$A \subset B$$

وتقرأ A فئة جزئية من B

مثال (٨)

الفئة $\{1, 3, 5\}$ A هى فئة جزئية من $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ لأن كل عدد 5 ,3 ,1 الذى ينتمى إلى A ينتمى أيضا إلى B

مثال (٩)

الفئة $E = \{2, 4, 6\}$ هى فئة جزئية من $F = \{6, 2, 4\}$ لأن كل عدد من 6 ,4 ,2 الذى ينتمى إلى E ينتمى أيضا إلى F ويلاحظ فى هذا المثال أن $E = F$ لذلك يمكن أن نقول أن كل فئة هى فئة جزئية من نفسها

مثال (١٠)

نفرض أن $G = \{x :$ عدد زوجى $x\}$ أى $G = \{2, 4, 6, 8 \cdots\}$

ونفرض أن $F = \{x : 2$ أس موجب للعدد $x\}$ أى أن

$$F = \{2, 4, 8, 16, \cdots\}$$

لذلك $F \subset G$

وحسب التعريف السابق للفئة الجزئية يمكن تعريف تساوى فئتين كما يأتى:

تعريف : تتساوى الفئتان A ، B أى $A = B$ إذا كان :

$$A \subset B \ , \ B \subset A$$

ونكتب $A \not\subset B$ إذا لم تكن A فئة جزئية من B .

ملاحظة (i) : تعتبر الفئة الخالية ϕ فئة جزئية من كل فئة .

ملاحظة (ii) : إذا لم تكن A فئة جزئية من B أى $A \not\subset B$ لذلك يوجد على الأقل عنصر واحد فى A لايكون عنصرا فى B

الفئة الجزئية بمعنى الكلمة : Proper Supset

نظرا لأن أى فئة A فئة جزئية من نفسها تسمى B فئة جزئية بمعنى الكلمة من الفئة A إذا كان : أولا B فئة جزئية من A وثانياً B لاتساوى A أى أن B فئة جزئية بمعنى الكلمة من الفئة A إذا كان :

$$B \subset A \quad \text{and} \quad B \neq A$$

مثـال (١١)

إذا كانت A فئة جزئية من B ، B فئة جزئية من C أثبت أن A فئة جزئية من C

أى إذا كانت $A \subset B$ ، $B \subset C$ فالمطلوب أثبات أن $A \subset C$ أى يجب أثبات أن أى عنصر ينتمى إلى A ينتمى أيضا إلى C

نفرض أن x عنصرا فى A أى $x \in A$ ونظرا لأن A فئة جزئية من B لذلك تنتمى أيضا x إلى B أى $x \in B$

ولكن حسب الفرض $B \subset C$ وينتج أن أى عنصر فى B يحتوى x يكون عنصرا فى C أى أن $x \in A$ تتطلب $x \in C$ وحسب التعريف تكون $A \subset C$

الفئة الشاملة : Universal Set

فى جميع التطبيقات الخاصة بالفئات فأن جميع الفئات موضوع البحث تكون فئات جزئية من فئة ثابتة وتسمى هذه الفئة بالفئة الشاملة ويرمز لها بالرمز U فمثلا فى الهندسة المستوية تحتوى الفئة الشاملة على جميع النقط فى المستوى

مثال (١٢)

نعتبر المعادلة :

$$(x+1)\ (2x-3)\ (3x+4)\ (x^2-2)\ (x^2+1) = 0$$

التى حلها على صورة فئة (أى الفئة التى عناصرها جذور المعادلة) هو

$$S = \left\{-1, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, i, -i\right\}$$

بفرض أن الفئة الشاملة هى فئة كل الأعداد المركبة . وإذا كانت الفئة الشاملة هى R (أى فئة جميع الأعداد الحقيقية) فأن الحل على صورة فئة هو

$$A = \left\{-1, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$$

(مثال ١٣)

إذا كانت A فئة جزئية من الفئة الخالية ϕ أثبت أن $A = \phi$

الفئة الخالية ϕ هى فئة جزئية من جميع الفئات وكحالة خاصة من الفئة A أى $\phi \subset A$ ولكن حسب الفرض $A \subset \phi$ وحسب التعريف ينتج أن $A = \phi$

مثال (١٤)

أثبت أنه توجد فئة خالية واحدة فقط

نفرض أن ϕ ، ϕ_1 فئتان خاليتان

نظرا لأن ϕ فئة خالية فأنه ينتج أن $\phi \subset \phi_1$

كذلك نظرا لأن ϕ_1 فئة خالية فأنه ينتج أن $\phi_1 \subset \phi$

وينتج من ذلك أن $\phi_1 = \phi$ لذلك توجد فئة خالية واحدة فقط

مثال (١٥)

عند دراسة التعداد الانسانى فأن الفئة الشاملة تحتوى على جميع البشر الموجودين فى العالم .

مثال (١٦)

أثبت أن الفئات الآتية غير متساوية

$$\phi , \{0\} , \{\phi\}$$

الفئة ϕ لا تحتوى على عنصر أنها الفئة الخالية

الفئة $\{\phi\}$ تحتوى على عنصر واحد هو الفئة الخالية

الفئة $\{0\}$ تحتوى على عنصر واحد هو الصفر

لذلك تختلف كل فئة من الفئات الثلاث عن الأخرى

عمليات الفئات : Set operations

سنعرف فى هذا البند عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق بين فئتين

الاتحاد : Union نفرض أن A ، B فئتان اختياريتان يعرف أتحاد A ، B والذى سنرمز له بالرمز $A \cup B$ بأنه الفئة التى تتكون من عناصر الفئتين A ، B معا أى

$$A \cup B = \{ x : x \in A \quad \text{or} \quad x \in B \}$$

أى أن $A \cup B$ هى فئة جميع العناصر التى تنتمى إلى A أو B أو كليهما وتقرأ A أتحاد B

التقاطع : Intersection

يعرف تقاطع A ، B الذى يرمز له بالرمز $A \cap B$ بأنه فئة العناصر التى تنتمى إلى كل من A ، B أى أن $A \cap B$ هى فئة العناصر المشتركة فى كل من A ، B وتقرأ A تقاطع B وتكتب

$$A \cap B = \{ x : x \in A \quad \text{and} \quad x \in B \}$$

ومن تعريف الأتحاد والتقاطع ينتج مباشرة أن

i) $A \cup B = B \cup A$

ii) $A \cap B = B \cap A$

iii) $A \subset (A \cup B)$ and $B \subset (A \cup B)$

iv) $A \cap B \subset A$ and $A \cap B \subset B$

وإذا لم توجـــد أى عناصر مشتركة فى الفئتين A ، B أى أن A ، B غير مشتركتين disjoint فأن التقاطع A ، B هو الفئة الخالية ϕ أى

$$A \cap B = \phi$$

الفرق : Difference

الفرق بين الفئتين A ، B هو فئة العناصر الموجودة ، فى A والغير موجودة فى B ويرمز له بالرمز

$$A - B$$

أى أن

$$A - B = \{ x : x \in A \ , \ x \notin B \}$$

ويلاحظ أن A — B ، B فئتان غير مشتركتين أى أن

$$(A - B) \cap B = \phi$$

كذلك تحتوى الفئة A على A — B كفئة جزئية أى أن

$$(A - B) \subseteq A$$

ومن السهل إثبات أن أى فئتين من الفئات الثلاث الآتية :

$$(A - B) \ , \ A \cap B \text{ and } (B - A)$$

غير مشتركين أى أن تقاطع أى فئتين من هذه الفئات هو الفئة الخالية ϕ أى أن

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \phi \ , \ (A - B) \cap (B - A) = \phi \ ,$$

$$(A \cap B) \cap (B - A) = \phi$$

The Complement set الفئة المكملة

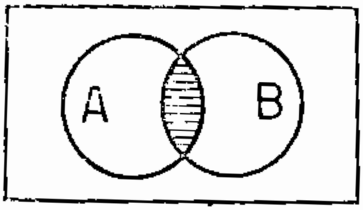
إذا كانت A فئة ما فأن الفئة التي تحتوى على جميع العناصر الموجودة فى الفئة الشاملة U والغير موجودة فى A تسمى الفئة المكملة للفئة A ويرمز لها بالرمز A^c أى أن

$$A^c = \{ x : x \in U , x \notin A \}$$

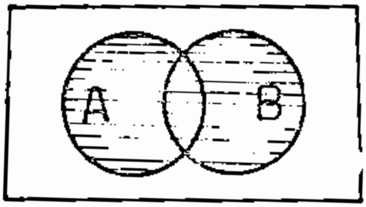
أى أن الفئة المكملة A^c هى الفرق بين الفئة الشاملة U والفئة A أى

$$A^c = U - A$$

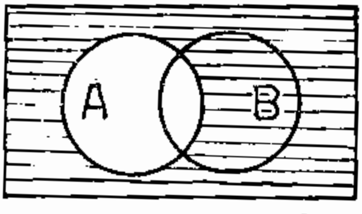
والاشكال الآتية والتى تسمى أشكال فن Venn diagrams توضح عمليات الفئات المختلفة وقد مثلت الفئات بمساحات مستوية بسيطة ومثلت الفئة الشاملة U بالمساحة داخل المستطيل كله .



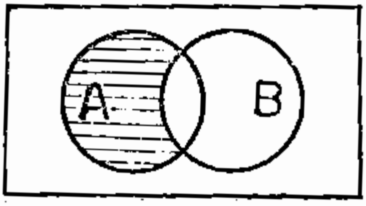
مظللة $A \cap B$



مظللة $A \cup B$



مظللة A^c



مظللة $A - B$

ومن السهل إثبات أن :

$$A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A \quad , \quad A \cup A^c = U \; , \; A \cap A^c = \phi ,$$

$$U^c = \phi \quad , \quad \phi^c = U \quad , \quad (A^c)^c = A$$

أمثلة متنوعة

مثال (١٧)

نفرض أن P هى فئة الأعداد الحقيقية الموجبة ، Q هى فئة الأعداد الحقيقية السالبة .

فيكون $P \cup Q$ أى اتحاد P ، Q يحتوى على كل الأعداد الحقيقية .

مثال (١٨)

نفرض أن $S = \{a, b, c, d\}$ ، $T = \{f, b, d, g\}$

$$\therefore \quad S \cap T = \{b, d\}$$

مثال (١٩)

نفرض أن $V = \{2, 4, 6, \cdots\}$ ، $W = \{3, 6, 9, \cdots\}$

$$\because \; V \cap W = \{6, 12, 18, \cdots\}$$

وذلك [illegible] وفئة W تحتوى على مضاعفات [illegible] $V \cap W$ [illegible]

مثال (٢٠)

نفرض أن $S = \{a, b, c, d\}$ ، $T = \{f, b, d, g\}$

$$\therefore \quad S - T = \{a, c\}$$

مثال (٢١)

نفرض أن R هى فئة الاعداد الحقيقية وأن Q هى فئة الاعداد الجذرية

فتكون $R - Q$ هى الأعداد الحقيقية الغير جذرية

مثال (٢٢)

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{3, 4, 5, 6\}$

وكانت (فئة الأعداد الصحيحة الموجبة) $U = N$

اى أن $U = \{1, 2, 3, \cdots\}$ أوجد :

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) $A - B$ iv) A^c

i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ii) $A \cap B = \{3, 4\}$

iii) $A - B = \{1, 2\}$

iv) $A^c = \{5, 6, 7, \cdots\}$

مثال (٢٣)

إذا كانت $A = \{-1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ،

$C = \{3, 4, 5, 6\}$ أوجد

i) $A \cup B$ ii) $A \cup C$ iii) $B \cup C$ iv) $B \cup B$

وحقق أن

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

ii) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

iii) $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\ 8\}$

iv) $B \cup B = \{2, 4, 6, 8\} = \{B\}$

$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$\therefore (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

مثال (٢٤)

في المثال السابق أوجد :

i) $A \cap B$ ii) $A \cap C$ iii) $B \cap C$ iv) $B \cap B$

وحقق أن

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

i) $A \cap B = \{2, 4\}$

ii) $A \cap C = \{3, 4\}$

iii) $B \cap C = \{4, 6\}$

iv) $B \cap B = \{2, 4, 6, 8\} = \{B\}$

$(A \cap B) \cap C = \{2, 4,\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4\}$

$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 6\} = \{4\}$

$\therefore (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

مثـال (٢٥)

أثبت أن :

(i $A \cap \phi = \phi$

(ii إذا كان $A \cup B = \phi$ فأن $A = \phi$ ، $B = \phi$

(i $A \cap \phi \subset \phi$

ولـكن الفئة الخالية ϕ هى فئة جزئية من أى فئة أى $\phi \subset A \cap \phi$

وينتج من ذلك أن $A \cap \phi = \phi$

(ii $A \subset A \cup B$ ولـكن $A \cup B = U$

$\because A \subset \phi$

كذلك ϕ هى فئه جزئية من أى فئة أى $\phi \subset A$

وينتج أن $A = \phi$ وبنفس الطريقة يمكن أثبات أن $B = \phi$

مثـال (٢٦)

أثبت أن $(A - B) \cap B = \phi$

نفرض أن x تنتمى إلى $(A - B) \cap B$ وحسب تعريف التقاطع فأن :

$$x \in (A - B) \text{ and } x \in B$$

وحسب تعريف الفرق $x \in A$ and $x \notin B$ وحيث أنه لا يوجد أى عنصر يحقق كل من $x \in B$ ، $x \notin B$ لذلك ينتج أن $(A - B) \cap B = \phi$

مثـال (٢٧)

أثبت قانون التوزيع

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = \{ x : x \in A, x \in B \cup C \}$$

$$= \{ x : x \in A, x \in B \text{ or } x \in C \}$$

$$= \{ x : x \in A, x \in B, \text{ or } x \in A , x \in C \}$$

$$= \{ x : x \in (A \cap B) \text{ or } x \in A \cap C \}$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

مثـال (٢٨)

أثبت قانون دى مورجان :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cup B)^c = \{ x : x \notin A \cup B \}$$

$$= \{ x : x \notin A, x \notin B \}$$

$$= \{ x : x \in A^c , x \in B^c \}$$

$$= A^c \cap B^c$$

وبالمثل يمكن إثبات قانون دى مورجان الثانى

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

مثـال (٢٩)

أثبت أن

$$B - A = B \cap A^c$$

$$B - A = \{ x : x \in B , x \notin A \}$$

$$= \{ x : x \in B , x \in A^c \}$$

$$= B \cap A^c$$

تمارين

١) بين أن الفئات الآتية كلها متساوية

$$\{r, s, t\},\ \{t, s, r\},\ \{s, r, t\},\ \{t, r, s\},\ \{t, t, r, s\}$$

٢) بين أى الفئات الآتية هى الفئة الخالية

i) $X = \{x : x^2 = 9,\ 2x = 4\}$

ii) $Y = \{x : x \neq x\}$

iii) $Z = \{x : x + 8 = 8\}$

[i) فئة خالية ii) فئة خالية iii) $Z = \{0\}$ أى Z فئة غير خالية

لأنها تحتوى العنصر 0 أى $Z \neq \phi$]

٣) أثبت أن $A = \{2, 3, 4, 5\}$

ليست فئة جزئية من الفئة $B = \{x : x \text{ عدد زوجى}\}$

٤) إذا كانت

$$V = \{d\},\ W = \{c, d\},\ X = \{a, b, c\},\ Y = \{a, b\}$$

and $Z = \{a, b, d\}$

بين عما إذا كانت الصيغ الآتية صحيحة أو خطأ

i) $Y \subset X$ ii) $W \neq Z$

iii) $V \subset Z$ iv) $V \subset X$

v) $X = W$ vi) $W \subset Y$

] i) صحيحة ii) صحيحة iii) صحيحة iv) خطأ v) خطأ

vi) خطأ [

٥) إذا كانت الفئة الشاملة هى $U = \{1, 2, \cdots, \cdots, 8, 9\}$ ،

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $C = \{3, 4, 5, 6\}$

أوجد

i) A^c ii) $A \cap C$ iii) $(A \cap C)^c$ iv) $A \cap B$, v) $B - C$

[i) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ ii) $\{3, 4\}$ iii) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$ iv) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ v) $\{2, 8\}$]

٦) إذا كانت $U = \{a, b, c, d, e\}$ ، $A = \{a, b, d\}$ ،

$B = \{b, d, e\}$ أوجد

i) $A \cap B$ ii) $B \cap A$ iii) B^c iv) $B - A$

v) $A^c \cap B$ vi) $A \cap B^c$ vii) $A^c \cap B^c$

viii) $B^c - A^c$ ix) $(A \cap B)^c$ x) $(A \cup B)^c$

[i) $\{a, b, d, e\}$ ii) $\{b, d\}$ iii) $\{a, c\}$ iv) $\{e\}$

v) $\{e\}$ vi) $\{a, b, c, d\}$ vii) $\{c\}$ viii) $\{a\}$

ix) $\{a, c, e\}$ x) $\{c\}$

٧) إذا كانت :

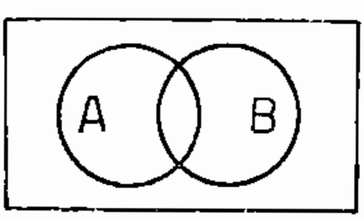
A = [x : x شكل رباعى] و B = { x : x مستطيل } و

C = { x : x معين } و D = { x : x مربع }

أذكر أى فئة من الفئات تكون فئة جزئية بمعنى الكلمة من الفئات الأخرى
[D فئة جزئية بمعنى الكلمة من كل من الفئات الأخرى A, B, C ؟ B فئة جزئية بمعنى الكلمة من الفئة A ؟ C فئة جزئية بمعنى الكلمة من الفئة A]

٨) فى شكل فن المبين ظلل كل من :

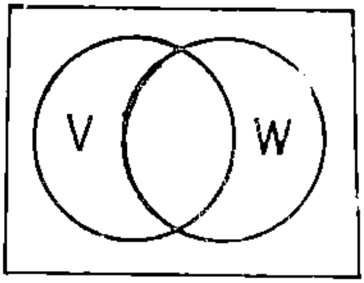
i) B^c, $(A \cup B^c)$, iii) $(B - A)^c$, iv) $A^c \cap B^c$

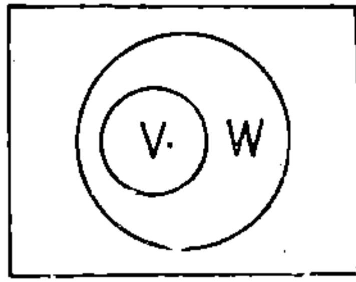


٩) فى شكل فن المبين ظلل كل من :

i) $W - V$ ii) $V^c \cup W$

iii) $V \cap W^c$ iv) $V^c - W^c$





١٠) أثبت أن $B - A = B \cap A^c$

١١) لأى فئتين A ، B أثبت أن

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

١٢) أثبت أن $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$

١٣) i) أثبت أنه إذا كان $A \cap B = \phi$ وأن $A \subset B^c$

ii) أثبت أن $A^c - B^c = B - A$

١٤) أثبت أن $A \subset B$ تتطلب $A \cup (B - A) = B$

١٥) أ) أثبت أن $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ب) أعطى مثلا يبين أن $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$