الباب الثالث

البرنامج الخطى Linear Programming

تحتاج بعض المسائل فى الصناعة والاقتصاد إلى جعل قيمة دالة خطية (أى من الدرجة الأولى فى المتغيرات) نهاية صغرى أو عظمى بحيث تحقق هذه الداله شروطا معينة على صورة متباينات ـ وتسمى مثل هذه المسائل بالبرنامج الخطى ـ ولن نتعرض فى هذا الباب إلا لمبادىء بسيطة فى هذا الموضوع . تتلخص المسألة فى إيجاد قيمة متغيرات لتحقق متباينات خطية معلومة بحيث تجعل دالة خطية معينة نهاية صغرى أو عظمى .

مجموعة المتباينات الخطية System of Linear Inequalities

تعطى شروط مسألة برنامج خطى عادة على صورة مجموعة من المتباينات الخطية نعتبر مجموعة بسيطة فى مجهولين y , x بحيث يكون

$$a_1x + b_1y \leqslant c_1$$
$$a_2x + b_2y \geqslant c_2$$
$$a_3x + b_3y \leqslant c_3$$

تمثل كل معادلة من المجموعة السابقة (بأخذ التساوى فقط) خطا مستقيما يقسم المستوى إلى مستويين نصفيين وكما نعلم من الهندسة التحليلية فأن كل النقط فى أحد المستويين النصفيين تحقق المتباينة وإذا اعتبرنا المتساوية (أى علامة التساوى فقط بدلا من علامة أكبر أو أصغر) فأن الحدود (أى الخط المستقيم نفسه) يدخل فى الحل وتسمى هذه الحالة بنصف المستوى المغلق . والنقط (x, y)

التى تحقق مجموعه المتباينات هى تقاطع أنصاف المستويات المغلقة التى تعطى بكل متباينة ويسمى تقاطع أنصاف المستويات المغلقة بمضلع محدب .

وفى حالة وجود متغيرين x , y فقط فأن المضلع المحـــدب يمكن رسمه فى مستوى المتغيرين كما يتضح من المثالين الآتيين

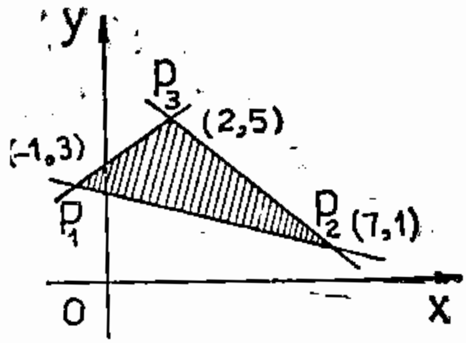
مثـال (١)

أوجد مجموعة النقط التى تحقق المتباينات الآتية :

$$4x + 5y \leqslant 33$$
$$x + 4y \geqslant 11$$
$$2x - 3y \geqslant -11$$

تتحقق المتباينة الأولى $4x + 5y \leqslant 33$ (أى $4x + 5y - 33 \leqslant 0$) بنصف المستوى المغلق الواقع على يسار المستقيم $4x + 5y = 33$ (لأنه بوضع $x = 0$ ، [illegible] المستقيم تكون سالبة لذلك تتحقق الحل بنصف المستوى المغلق الذى يحتوى على نقطة الاصل وهو المستوى الواقع على يسار المستقيم) كذلك تتحقق المتباينة الثانية بنصف المستوى المغلق الواقع على يمين المستقيم $x + 4y = 11$ كما تتحقق المتباينة الثالثة بنصف المستوى المغلق الواقع على يمين المستقيم $2x - 3y = -11$.

ويتكون من تقاطع انصاف المستويات هذه مجموعة النقط الواقعة داخل وعلى حدود المثلث الذى رؤوسه النقط $P_1 (-1,3)$ ، $P_2 (7,1)$ ، $P_3 (2,5)$ وهى نقط تقاطع المستقيمات $4x + 5y = 33$ ، $x + 4y = 11$ ، $2x - 3y = -11$ كما هو مبين بالشكل



وفى هذا المثال فأن المضلع المحدب له مساحة محـــدودة هى المنطقة الواقعة داخل المثلث $P_1 P_2 P_3$ وعلى حدود هذا المثلث وفى العادة يتحدد المضلع المحدب برؤوسه والتى تسمى بالأركان . وهذه الأركان يمكن تعيينها بأيجاد نقط تقاطع المستقيمات مأخـوذة أثنين ــ أثنين فى نفس الوقت . وسنبين فى هذا الباب أن هذه الأركان تلعب دورا هاما فى مسألة البرنامج الخطى .

وكذلك قد يعطى حل مجموعة من المتباينات بمضلع محدب مساحته لا نهائية كما يتضح من المثال الآتى :

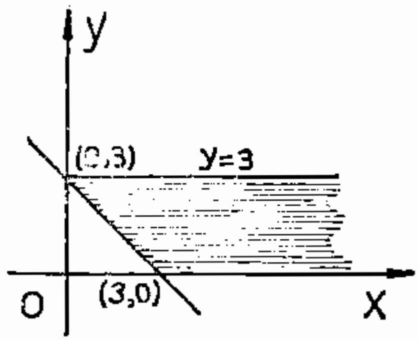
مثـال (٢)

أوجد حل المجموعة :

$$y \geqslant 0 \ , \ y \leqslant 3 \ , \ x + y \geqslant 3$$

تعطى المتباينة $y \geqslant 0$ جميع النقط (x , y) الواقعـة فوق محور x كذلك تعطى المتباينة $y \leqslant 3$ جميع النقط (x , y) الواقعة تحت (أو على) المستقيم $y = 3$ وتعطى المتباينة $x + y \geqslant 3$ جميع النقط (x , y) الواقعـة على يمين (أو على) المستقيم $x + y = 3$

وحل هذه المتباينات هو المضلع المحدب ذو المساحـــة اللانهائية المبينة في الشكل



النهايات العظمى والصغرى لدالة خطية :

Maximum and minimum of a linear function

إذا كان المضلع المحدب الذى تعينه مجموعة المتباينات الخطية غير محدد كما فى مثال (٣) فإن الدالة الخطية $ax + by$ (أو $ax + by + c$) قد لا يكون لها نهاية عظمى (أو صغرى) أى أن القيمة المطلقة للدالة $ax + by$ يمكن جعلها كبيرة جداً (أو صغيرة جداً) حسب اختيارنا ، أما إذا كان المضلع المحدب بحيث تكون x ، y محددة من أعلى فأن مجموعة قيم $ax + by$ تكون محددة من أعلى وتكون للدالة نهاية عظمى . وبالمثـــل إذا كان المضلع المحدب بحيث تكون x ، y محـــددة من أسفل تكون للدالة $ax + by$ نهاية صغرى .

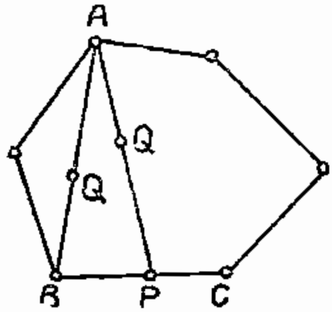
نظرية هامة :

تأخذ الدالة الخطية $ax + by$ المحسوبة داخل (أو على) مضلع محدب

الذى تعينه مجموعة من المتباينات الخطية نهايتها العظمى أو الصغرى عند نقط أركان المضلع .

نفرض أن Q نقطة داخل المضلع المحدب تقع بين رأسين A , B مثلا أو بين الرأس A والنقطة P الواقعة بين الرأسين B , C كما فى الشكل .

نعلم أن طول العمود الساقط من النقطة (x, y) على المستقيم $ax + by + c = 0$ يتناسب مع $ax + by + c$ فى الحالة الأولى فأن طول العمود الساقط من Q على المستقيم $ax + by + c = 0$ يقع بين طولى العمودين الساقطين من B , A على نفس المستقيم .



أى أن قيمة الدالة $ax + by + c$ عند Q تقع بين قيمتيها عند A , B وفى الحالة الثانية فأن قيمة الدالة عند Q تقع بين قيمتيها عند A , P وتقع قيمة الدالة عند P بين قيمتيها عند B , C لذلك تكون الدالة نهاية عظمى أو صغرى عند نقطة ركنية .

ملاحظة : إذا كان المضلع غير محدود فقد يكون للدالة $ax + by$ نهاية عظمى أو صغرى عند نقطة ركنية وذلك يتوقف على إشارتى b , a وعلى طبيعة المضلع الغير محدد .

مثال (٢)

أوجد النهاية العظمى والصغرى للدالة $3x + 4y$ حول المضلع المحدب الذى تعينه المتباينات الآتية .

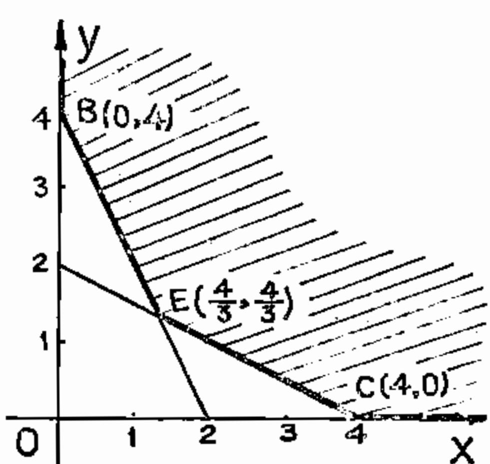
$$\text{i) } 2x + y \geqslant 4 \ , \ x + 2y \geqslant 4 \ , \ x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0$$

$$\text{ii) } 2x + y \leqslant 4 \ , \ x + 2y \leqslant 4 \ , \ x \geqslant 0 \ , \ y \geqslant 0$$

اولا : المضلع فى هذه الحالة غير محدد كما هو مبين فى الشكل ويمكن جعل الدالة $3x + 4y$ كبيرة كما نريد . ونقط أركان المضلع هى $C\ (4,0)$ ، $E\ (\frac{4}{3}\ ,\ \frac{4}{3})$ $B\ (0\ ,\ 4)$ وقيمة الدالة $V = 3x + 4y$ عند هذه النقط هى :

$$V_C = 12 \ , \ V_E = \frac{28}{3} \ ; \ V_B = 16$$

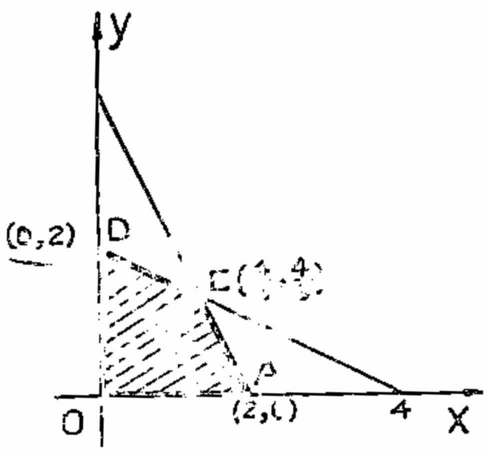
لذلك تأخذ الدالة $3x + 4y$ نهايتها الصغرى على المضلع المحدب عند النقطة $E\ (\frac{4}{3}\ ,\ \frac{4}{3})$ وتكون قيمة النهاية الصغرى هى $\frac{28}{3}$



ثانيا : فى هذه الحالة المضلع محدد كما هو مبين فى الشكل ويمثل بالشكل الرباعى OAED حيث O (0,0) ، A (2,0) ، E ($\frac{4}{3}$ ، $\frac{4}{3}$) ، D (0,2) وقيمـة الدالـة عند هذه النقط هى :

$$V_O = 0 , V_A = 6 , V_E = \frac{28}{3} , V_D = 8$$

وتأخذ الدالة نهايتها الصغرى صفر عند نقطة الأصل ونهايتهـا العظمى $\frac{28}{3}$ عنـد النطقة E ($\frac{4}{3}$, $\frac{4}{3}$)



حل مسالة البرنامج الخطى : فى البرنامج الخطى قد تمثـــل الدالة الخطيـــة ax + by تكاليف كلية أو ربح أو شىء من هذا القبيل . وتمثل المتباينات عادة أشيـاء متعلقة بمواد أو معدات أو عمال أو رؤوس أموال . ويمكن حل المسألة بطريقة النقط الركنية السابق شرحها أو بطريقة الحذف التى تعتمـد على تحـويل المتباينات إلى متساويات بادخال متغيرات جديدة وحل المتساويات (المعادلات) الناتجة لايجاد المتغيرات الأصلية بدلالة المتغيرات الجديدة وإتمام الحل كما يتضح من الأمثلة الآتية .

مثال (٤)

يشترى رجل وزوجته نوع من اللحم يحتوى على 90 % من اللحم الغير دهنى، 10 % من الدهن بسعر جنيه واحد للكيلو. ونوع آخر يحتوى على 70 % من اللحم الغير دهنى، 30 % من الدهن بسعر نصف جنيه للكيلو. فإذا كانت احتياجات الرجل الأسبوعية هى على الأقل ستة كيلو جرامات من اللحم الغير دهنى واحتياجات زوجته هى على الأقل كيلو جرامين من الدهن. أوجد كمية اللحم من كلا النوعين التى يشتريها الرجل وزوجته أسبوعيا حتى تكون تكاليف الشراء أقل ما يمكن.

أوجد أيضا الكمية من كلا النوعين إذا كان سعر الكيلو من النوع الثانى من اللحم هو خمسة وثمانون قرشا بدلا من خمسين قرشا.

نفرض أن عدد الكيلو جرامات من النوع الأول من اللحم يساوى x ومن النوع الثانى يساوى y

$$\therefore \quad 0.0x + 0.7y \geqslant 6 \qquad \cdots (1)$$

$$0.1x + 0.3y \geqslant 2 \qquad \cdots (2)$$

تعطى التكاليف الكلية Q بالجنيه من

$$Q = x + \tfrac{1}{2} y$$

تتلخص المسألة فى ايجاد قيم x ، y التى تجعل Q أصغر ما يمكن وتحقق المتباينتين (1) ، (2) والمتباينتين $x \geqslant 0$ ، $y \geqslant 0$

الطريقة الأولى : برسم المستقيمين $9x + 7y = 60$ ، $x + 3y = 20$ وحل المعادلات آنيا فأن المضلع المحدب الذى يناظر المتباينات الأربع يكون له ثلاثة أركان محددة عند النقط $A\ (20,0)$ ، $B\ (0, \frac{60}{7})$ ، $C\ (2,6)$ كما هو مبين فى الشكل وعند حساب دالة التكلفة $Q = x + \frac{1}{2} y$ عند هذه النقط فأننا نجد أن :

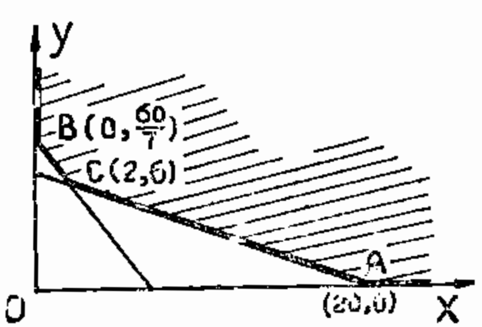
$$Q_A = 20\ ,\ Q_B = \frac{30}{7}\ ,\ Q_C = 5$$

لذلك تكون التكاليف أقل مايمكن عند $B\ (0, \frac{6}{7})$ أى عند شراء $\frac{60}{7}$ kg. من النوع الثانى من اللحم فقط

أما إذا كان سعر الكيلو من النوع الثانى من اللحم هو خمسة وثمانون قرشا فأنه فى هذه الحالة تكون $Q = x + 0.85\ y$ وينتج أن :

$$Q_A = 20\ ,\ Q_B = 7.290\ ,\ Q_C = 7.10$$

لذلك تكون التكاليف أقل ما يمكن عند $C\ (2,6)$ أى عند شراء 2 kg. من النوع الأول من اللحم ، 6 kg. من النوع الثانى



الطريقة الثانية : يمكن حل هذه المسألة بطريقة الحذف كما يأتى :

نكتب المتباينتين (1) ، (2) بصورة معادلتين كما يأتى

$$9x + 7y = 60 + u ,$$

$$x + 3y = 20 + v$$

حيث x ، y ، u ، v كلها $\geqslant 0$ وبحل المعادلتين السابقتين فى x ، y بدلالة u ، v ينتج أن :

$$x = 2 + \frac{3}{20} u - \frac{7}{20} v \qquad (3)$$

$$y = 6 - \frac{1}{20} u + \frac{9}{20} v \qquad (4)$$

الحالة الثانية : $Q = x + 0.85 y$

$$20 Q = 142 + 2.15 u + 0.65 v$$

ونظرا لأن كل من u ، $v \geqslant 0$ لذلك تكون Q أصغر ما يمكن عندما تكون $u = 0$ ، $v = 0$ وبذلك تكون $x = 2$, $y = 6$ أى عند النقطة C (2,6) كما سبق إيجاده بطريقة النقط الركنية .

الحالة الأولى : $Q = x + \frac{1}{2} y$

$$\therefore \quad Q = 5 + \frac{1}{8} u - \frac{1}{8} v$$

وتكون Q أصغر ما يمكن إذا كانت $u = 0$ وتكون v أكبر ما يمكن بوضع $u = 0$ فى المعادله (3) ينتج أن :

$$x = 2 - \frac{7}{20} v$$

وحيث أن $x \geqslant 0$ لذلك تكون $v \leqslant \frac{40}{7}$ وتكون أكبر قيمة تأخذها v هى $\frac{40}{7}$ وتعطى أصغر قيمة للتكاليف Q

ولذلك تكون Q أصغر ما يمكن عند $u = 0$ ، $v = \frac{40}{7}$ وينتج أن :

$$x = 0 , y = 6 + \frac{9}{20} \times \frac{40}{7} = \frac{60}{7}$$

أى عند النقطة $B\left(0 , \frac{60}{7}\right)$ كما سبق إيجاده بطريقة النقط الركنية .

وتعطى أقل قيمة للتكاليف Q من

$$Q_{\min} = 5 - \frac{1}{8} \times \frac{40}{7} = 4\ \frac{2}{7}$$

مثال (٥)

يرغب صاحب مصنع فى انتاج سلعتين بكميات x ، y . وتحتاج كل سلعة الى مواد وعمال ومعدات حسب الجدول الآتى . كذلك مبين فى الجدول عدد الوحدات المسموح بها. أوجد الربح الاكبر ما يمكن إذا كانت دالة الربح هى:

أولا : $P_1 = x + 2y$

ثانيا : $P_2 = 2x + y$

الكمية المسموح بانتاجها	y	x	
100	4	5	السلع
172	8	3	العمال
53	1	3	المعدات

تتلخص المسألة فى إيجاد قيم x ، y التى تجعل الربح أكبر ما يمكن وتحقق المتباينات الآتية :

$$5x + 4y \leqslant 100$$

$$3x + 8y \leqslant 172$$

$$3x + y \leqslant 53$$

$$x \geqslant 0 , y \geqslant 0$$

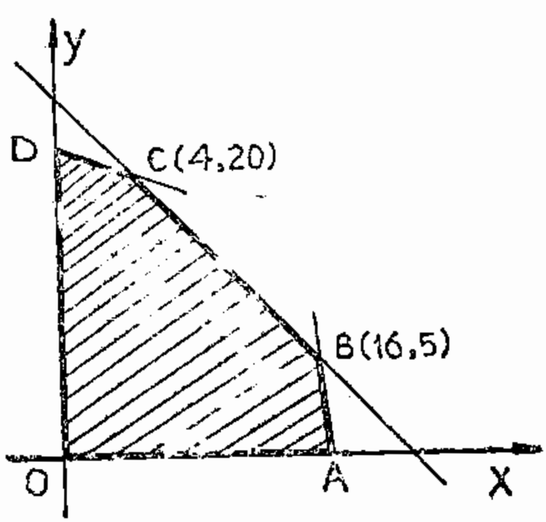
الطريقة الأولى

يبين الشكل المضلع المحدب OABCD الذى تعينه المتباينات السابقة ويبين الجدول الآتى قيم x ، y عند الأركان (رؤوس الشكل الخماسى OABCD) وقيمة كل من P_1 ، P_2 عند هذه الأركان

الاركان	(x , y)	P_1	P_2
O	(0 , 0)	0	0
A	$(\frac{53}{3}, 0)$	$\frac{53}{3}$	$\frac{106}{3}$
B	(16 , 5)	22	37
C	(4 , 20)	44	28
D	$(0, \frac{43}{2})$	43	$\frac{43}{2}$

تأخذ P_1 نهايتها العظمى 44 عند $x = 4$ ، $y = 20$ عند الركن C

وتأخذ P_2 نهايتها العظمى 37 عند $x = 16$ ، $y = 5$ عند الركن B



الطريقة الثانية : نكتب المتباينات على صورة متساويات كما يأتى :

$$5x + 4y = 100 - u ,$$

$$3x + 8y = 172 - v ,$$

$$3x + y = 53 - w$$

حيث $x , y , u , v , w \geqslant 0$

بحل المعادلتين الأولى والثانية فى x ، y ينتج أن :

$$28x = 112 - 8u + 4v ,$$

$$28y = 560 + 3u - 5v$$

وبالتعويض عن x ، y فى $P_1 = x + 2y$ ينتج أن :

$$28 P_1 = 1232 - 2u - 6v$$

لذلك تكون P_1 أكبر ما يمكن عند $u = 0$ ، $v = 0$ وينتج أن

$$y = \frac{560}{28} = 20 \text{ ، } x = \frac{112}{28} = 4 \text{ عند } P = \frac{1232}{28} = 44$$

وبحل المعادلتين الأولى والثالثة فى x ، y ينتج أن :

$$7x = 112 + u - 4w$$

$$7y = 35 - 3u + 5w$$

وبالتعويض عن x ، y فى $P_2 = 2x + y$ ينتج :

$$7\,P_2 = 259 - u - 3\,w$$

لذلك تكون P_2 أكبر ما يمكن عند $u = 0$ ، $w = 0$ وينتج أن

$$P_2 = \frac{259}{7} = 37 \text{ عند } x = \frac{112}{7} = 16 \,,\; y = \frac{35}{7} = 5$$

ويمكن أيضا تطبيق الطرق السابقة إذا كان هناك أكثر من مجهولين كما فى الأمثلة الآتية :

مثال (٦)

أوجد النهاية الصغرى للدالة $P = x + y + 2z$ بحيث تتحقق الشروط الآتيـة :

$$x + y + z \leqslant 9$$

$$2x - 3y + 3z = 1 \qquad\qquad x \geqslant 0 \,,\; y \geqslant 0 \,,\; z \geqslant 0$$

$$-3x + 6y - 4z = 3$$

يمكن كتابة المتباينة $x + y + z \leqslant 9$ على صورة معادلة بادخال متغير جديد u بحيث تكون $u \geqslant 0$ فتتحول هذه المتباينة إلى المعادلة :

$$x + y + z + u = 9$$

ونحل المعادلات الآتية فى x ، y ، z بدلالة u

$$x + y + z = 9 - u$$

$$2x - 3y + 3z = 1$$

$$-3x + 6y - 4z = 3$$

وينتج أن:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 9-u & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 1 & 9-u & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9-u \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -3 & 6 & -4 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore x = \tfrac{1}{2}(13 - 3u)$$

$$y = \tfrac{1}{4}(13 - u)$$

$$z = \tfrac{3}{4}(-1 + u)$$

وتبعا لذلك

$$P = x + y + 2z = \tfrac{1}{4}(33 - u)$$

ومن الشروط $x \geqslant 0$ ، $y \geqslant 0$ ، $z \geqslant 0$ جميعا نحصل على $1 \leqslant u \leqslant \frac{13}{3}$

ونظرا لأنه مطلوب جعل p أصغر ما يمكن فيجب اختيار أكبر قيمة ممكنة للمتغير u أى أن $\frac{13}{3} = u$ وينتج من ذلك أن :

$$x = 0 \,,\; y = \frac{13}{6} \,,\; z = \frac{5}{2} \,,\; P_{min} = \frac{43}{6}$$

مثال (٧)

يرغب مزارع فى تربية دجاج وبط وديوك رومى ولا يسع المكان الذى سيربى فيه هذه الطيور إلا لمائتين فقط وهو يرى ألا يزيد عدد الديوك الرومى عن 25 ولا يزيد عدد الديوك الرومى والبط معاً عن 100. فاذا كان ربحه عن كل دجاجة يساوى جنيها واحدا وعن كل بطة يساوى جنيهان وعن كل ديك رومى يساوى ثلاثة جنيهات أوجد عدد ما يربيه المزارع من كل نوع منهما حتى يحصل على أكبر ربح ممكن .

نفرض أن عدد الدجاج والبط والديوك الرومى هو x ، y ، z على الترتيب نفرض أن الربح يساوى P

$$\therefore \; P = x + 2y + 3z$$

والمطلوب إيجاد قيم x ، y ، z التى تجعل P أكبر ما يمكن بحيث تحقق المتباينات الآتية :

$$x + y + z \leqslant 200 \,,$$

$$z \leqslant 25$$

$$y + z \leqslant 100$$

$$x \,,\; y \,,\; z \geqslant 0$$

يمكن حل هذه المسألة بسهولة بطريقة الحذف كما يأتى :

$$x + y + z + u = 200$$

$$z + w = 25$$

$$y + z + v = 100$$

$$(x , y , z , u , v , w \geqslant 0)$$

وبحل هذه المعادلات لايجاد x ، y ، z بدلالة u ، v ، w ينتج أن :

$$x = 100 - u + v ,$$

$$y = 75 - v + w ,$$

$$z = 25 - w$$

وبالتعويض عن x ، y ، z فى $P = x + 2y + 3z$ ينتج أن :

$$P = 325 - u - v - w$$

$$= 325 - (u + v + w)$$

فلكى يكون الربح P أكبر ما يمكن يجب أن يكون $u = v = w = 0$

وينتج أن $P = 325$ وذلك عند $x = 100$ ، $y = 75$ ، $z = 25$

تمارين

١) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية $7x + 5y - 3$ حول المضلع المحدب الذى تعينه المتباينات الآتية :

a) $x \geqslant 0 , y \geqslant 0 , 3x + 2y \leqslant 6$

b) $x \geqslant 0 , y \geqslant 0 , 2x + 4y - 5 \geqslant 0$

c) $2x + 3y \leqslant 6 , -x + y \leqslant 2 , x + 3y \leqslant 3$

d) $2x + 3y \geqslant 6 , -x + y \leqslant 2 , x + 3y \leqslant 3$

[a) max. 12, min. -3 b) no max., min. $\frac{13}{4}$

c) no max, no min. d) no max , min. 18]

٢) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة الخطية $3x + y + 2$ حول المضلع المحدب الذى تعينه المتباينات الآتية :

$2x + y + 9 \geqslant 0 , -x + 3y + 6 \geqslant 0 , x + 2y - 3 \leqslant 0$

$x + y \leqslant 0$

[max. 5 at $(\frac{3}{2} , -\frac{3}{2})$, min -14 at $(-7,5)$]

٣) أوجد النهاية العظمى للدالة $F = 3x + 4y$ بحيث يكون :

$$4x - 3y \leqslant 8 \; , \; x + 2y \leqslant 4 \; , \; x \geqslant 0 \; , \; y \geqslant 0$$

$$[\ \max.\ F = \frac{116}{11} \text{ at } (\frac{28}{11} , \frac{8}{11})\ ]$$

٤) ا) أوجد الكمية اللازم شراؤها من نوع معين من اللحم الذى ثمنه تسعون قرشا للكيلو ويحتوى على 90% لحم غير دهنى ، 10% دهن كذلك الكمية اللازم شراؤها من نوع آخر من اللحم الذى ثمنه ستون قرشا للكيلو ويحتوى على 75% من اللحم الغير دهنى ، 25% دهن علما بأن احتياجات المشترى هى ثمانية كيلو جرامات على الأقل من اللحم وكيلو جرامين على الأقل من الدهن حتى يكون ثمن الشراء أقل ما يمكن

ب) حل نفس المسألة إذا كان ثمن النوع الثانى من اللحم هو خمسة وسبعون قرشا للكيلو جرام الواحد

حل المسألة بطريقة النقط الركنية وبطريقة الحذف

[(ا) $\frac{23}{3}$ من النوع الثانى من اللحم والثمن الأقل ما يمكن 6.400

(ب) $0 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$ حيث x هى الكمية اللازم شراؤها من النوع الأول من اللحم ، $y = \frac{160 - 18x}{15}$ حيث y هى الكمية اللازم شراؤها من النوع الثانى من اللحم والثمن الأقل ما يمكن يساوى ثمانية جنيهات]

٥) يرغب صاحب مصنع فى أنتاج سلعتين بكميتين y , x وتحتاج كل سلعة إلى مواد وعمال ومعدات حسب الجدول الآتى . كذلك مبين فى الجدول عدد الوحدات المسموح بها

	x	y	الكمية المسموح بها
المــواد	1	1	6
العمــال	1	2	10
المعـــدات	2	1	10

أوجد أكبر ربح ممكن إذا كانت دالة الربح هى :

a) $2x + 3y$

b) $3x + 2y$

[a) 16 for $(2 , 4)$ b) 16 for $(4 , 2)$]

٦) يرغب مزارع فى تربية مائتين من الطيور تتكون من دجاج وبط (لايزيد عددها عن 100) وديوك رومى . فاذا كان ربحه عن كل دجاجة يساوى جنيها واحدا وعن كل بطة يساوى جنيهان وعن كل ديك رومى يساوى ثلاثة جنيهات أوجد عدد مايربيه المزارع من كل نوع منها حتى يحصل على أكبر ربح ممكن . أعتبر الحالات التى فيها $t = 2,3$

ملاحظة : نفرض أن عدد الدجاج x ، عدد البط y فيكون عدد الديوك

الرومى هو $200 - x - y$ ارسم المضلع المحدب فى مستوى xy الذى تعينه الشروط المطلوبة ومن ثم احسب الربح عند كل نقطة ركنية

[الجواب : عند $t = 2$ ، $0 \leqslant y \leqslant 100$ وعدد الديوك الرومى يساوى $200 - y$ وأكبر ربح ممكن يساوى 400 جنيه .

عند $t = 3$ يربى ديوك رومى فقط وأكبر ربح ممكن يساوى 600 جنيه]
