الباب الثانى

المصفوفات MATRICES

تعريف المصفوفة :

المصفوفة هي مجموعة من كميات عددها m n مرتبة فى تشكيل مستطيل يحتوى على m من الصفوف ، n من الأعمدة ـ وعند كتابة المصفوفات يوضع هذا التشكيل عادة بين قوسين مربعين (أو مستديرين) ويعبر عن المصفوفة بحرف واحد A مثلا بحيث تكون :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وتسمى الكميات a_{ik} التى تكون المصفوفة بعناصر المصفوفة حيث تمثل i عدد الصفوف ، k عدد الأعمدة وتسمى المصفوفة التى تحتوى على صفوف عددها m وأعمدة عددها n مصفوفة من الرتبة $(m \times n)$ وتكون المصفوفة مربعة إذا كانت $m = n$

وبعكس المحدده ليس للمصفوفة أى قيمة جبرية بل تعتبر فى الواقع مؤثر مثل $\frac{d}{dx}$ فى حساب التفاضل .

العمليات الجبرية للمصفوفات :

١) جمع وطرح المصفوفات :

لكي يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح للمصفوفات يجب أن تكون كل هذه المصفوفات من نفس الرتبة ـ فاذا كانت A ، B مصفوفتان من نفس الرتبة بحيث تكون عناصر الأولى هي a_{ik} وعناصر الثانية هي b_{ik} يعرف مجموع المصفوفتين $A + B$ بأنه يساوى المصفوفة C التي عناصرها $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ ومن الواضح أن رتبة C هي نفس رتبة كل من A ، B

وعلى سبيل المثال إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & -2+3 & 3-1 \\ 1+0 & 0+2 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

وكل مصفوفتان لهما نفس الرتبة قابلتان للجمع والطرح ويعرف طرح مصفوفتين بنفس الطريقة إذ أن الفرق بين مصفوفتين A B من نفس الرتبة هو المصفوفة D التي عناصرها $d_{ik} = a_{ik} - b_{ik}$ فمثلاً فى المثال السابق

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & -2-3 & 3+1 \\ 1-0 & 0-2 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

من التعريف يمكن اثبات أن

$$A + B = B + A$$

وبالمثل

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

أى أن مجموع المصفوفات يخضع لكل من قانون التبادل commutative law وقانون التنسيق associative law فى علم الجبر

٢) تساوى المصفوفات :

تتساوى المصفوفتان A , B التى عناصرها a_{ik} ، b_{ik} على الترتيب إذا تساوت رتبتاهما وتكون جميع عناصر كل منهما المتناظرة متساوية أى $a_{ik} = b_{ik}$

٣) ضرب المصفوفة فى عدد

يعرف حاصل ضرب مصفوفة $A = [a_{ik}]$ فى عدد l (حقيقى أو تخيلى) بمصفوفة B عناصرها b_{ik} تساوى la_{ik} أى بضرب كل عنصر من عناصر A فى l فمثلا إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad l\,A = \begin{bmatrix} l & 2l & 0 \\ 3l & -l & 2l \end{bmatrix}$$

يتضح من هذا التعريف أن قانون التوزيع distributive law فى علم الجبر يصلح أيضا للمصفوفات أى أن

$$l\,(A \pm B) = l\,A \pm l\,B$$

كذلك إذا عرفنا $l\,A = A\,l$

فان ضرب المصفوفة فى عدد يخضع لقانون التبادل

ومن المهم أن نذكر أن l يجب أن تكون عدد ولا تكون مصفوفة أخرى مثلا وسنعرف حاصل ضرب المصفوفات فى البند التالى

٤) ضرب المصفوفات :

يمكن ضرب مصفوفتين A , B لايجاد حاصل ضربهما AB فقط فى الحالة التى

يكون فيها عدد أعمدة المصفوفة A يساوى عدد صفوف المصفوفة B ويقال أن المصفوفة A قابلة للضرب فى المصفوفة B

نفرض أن رتبة مصفوفة A هى $(m \times p)$ وعناصرها هو a_{ik} وأن رتبة المصفوفة B هى $(p \times n)$ وعناصرها هى b_{ik} فيكون حاصل الضرب AB هو المصفوفة C رتبتها $(m \times n)$ وعناصرها c_{ik} تعرف من

$$c_{ki} = \sum_{s=1}^{p} a_{is} b_{sk}$$

فمثلا إذا كانت B , A مصفوفتان رتبتاهما (2×2) , (3×2) على الترتيب تعطيان من

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

فأن حاصل الضرب $C = AB$ هو مصفوفة رتبتها (3×2) تعرف من

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} & a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} \end{bmatrix}$$

وكمثال آخر

$$[2 \quad 3 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = [2 + 6 - 3 \quad 6 - 6 + 1]$$

$$= [5 \quad 1]$$

ونأخذ :

$$A\ (2\times3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ B\ (3\times2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

فان المصفوفة A قابلة للضرب فى المصفوفة B ويعطى حاصل الضرب من $C = AB$

$$C\ (2\times2) = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

ومن جهة أخرى فان المصفوفة B قابلة للضرب فى المصفوفة A ويعطى حاصل الضرب من $D = BA$

$$D\ (3\times3) = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 11 & 4 & 9 \\ 12 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

ومن الواضح أن $AB \neq BA$ أى أن قانون التبادل لا يصلح للمصفوفات حتى ولو كانت رتبة مصفوفة حاصل الضرب AB تساوى رتبة مصفوفة حاصل الضرب BA فمثلا إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ BA = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وواضح أن $B \neq A$

ولكن محددة المصفوفة AB ويرمز لها بالرمز $|AB|$ تساوى محددة المصفوفة BA التى يرمز لها بالرمز $|BA|$

$$|AB| = -1 \ , \ |BA| = -1$$

ويمكن بسهولة اثبات أن المصفوفات تخضع لقانون التوزيع ولقانون التنسيق فى علم الجبر أى أن

i) $(A + B)\,C = AC + BC$

ii) $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$

ونظراً لعدم خضوع المصفوفات لقانون التبادل فان كثيرا من القوانين البسيطة العادية فى علم الجبر لا تصلح للمصفوفات فمثلا

i) $(A+B)^2 = (A + B)\,(A + B)$

$$= A^2 + AB + BA + B^2$$

ii) $(A + B)\,(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

مثال (١)

عين إن أمكن قيمة العدد x بحيث تكون المصفوفتين A , B كل منهما قابلة للضرب فى الأخرى حيث

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix} , \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 2x + 9 & x + 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} x+6 & 5 \\ 2x+9 & 9 \end{bmatrix}$$

ونظراً لأن $AB = BA$

$$\therefore \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 2x+9 & x+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+6 & 5 \\ 2x+9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x + 6 = 9 \qquad \therefore x = 3$$

ولأى قيمة أخرى تأخذها x خلاف العدد 3 فان $AB \neq BA$

مثال (٢)

يرغب صاحب محل أثاث فى انتاج 40 منضدة ، 120 كرسيا ، 20 مكتبا ، 10 حقائب خشبية ويحتاج إلى 8 وحدات من المواد ، 3 عمال فى الساعة لكل منضدة ؟ 4 وحدات من المواد ، 2 من العمال فى الساعة لكل كرسى ؟ 10 وحدات من المواد ، 6 عمال فى الساعة لكل مكتب ؟ 12 وحدة من المواد ، 10 عمال فى الساعة لكل حقيبة . وتتكلف المواد جنيه واحد لكل وحدة ويتكلف العامل 1.5 من الجنيهات لكل ساعة عمل — أوجد التكاليف الكلية .

نعبر عن المواد المطلوب انتاجها كمصفوفة تحتوى على صف واحد ونعبر عن كمية المواد والعمال كمصفوفة (2 × 4) والتكاليف كمصفوفة تحتوى على عمود واحد

$$\text{التكاليف الكلية} = [40 \;\; 120 \;\; 20 \;\; 10] \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{مواد} & \text{عمال} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \\ 10 & 6 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \text{مواد} & \text{عمال} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1120 & 580 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$= 1120 \times 1 + 580 \times 1.5 = 1990 \text{ جنيها}$$

بعض المصفوفات الخاصة :

١) مصفوفة الصف :

وتسمى فى بعض الأحيان بالمتجه الصفى وهى عبارة عن n من الكميات مرتبة فى مصفوفة تحتوى على صف واحد رتبتها $(1 \times n)$ ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز $[A]$ أى

$$[A] = [\, a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; \cdots\cdots\cdots \;\; a_n \,]$$

٢) مصفوفة الصف :

وتسمى فى بعض الأحيان بالمتجه العمودى وهى عبارة عن m من الكميات مرتبة فى مصفوفة تحتوى على عامود واحد رتبتها $(m \times 1)$ ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز $\}A\{$ أى

$$\}A\{ = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

٣) المصفوفة الصفرية :

وهى مصفوفة بأى رتبة $(m \times n)$ بحيث يكون كل عنصر من عناصرها يساوى صفرا مثل المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ والمصفوفة } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٤) المصفوفة المربعة

وهى مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة مثل المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وهى مصفوفة مربعة رتبتها $(n \times n)$. ويسمى القطر الذى يحتوى على العناصر : $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ بالقطر الأساسى. والمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

مصفوفة مربعة أيضا

٥) المصفوفة القطرية :

وهى مصفوفة مربعة فيها كل العناصر تساوى صفرا ما عدا عناصر القطر الأساسى أى $(i \neq k)$ $a_{ik} = 0$ مثل المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ومن الواضح أن أى مصفوفتين مربعتين A , B من نفس الرتبة تقبلان الضرب فى بعضهما وأن أى مصفوفتين قطريتين تقبـــلان الضرب فى بعضهما وتخضعان لقانون التبادل أى $AB = BA$

٦) مصفوفة الوحدة :

وهى مصفوفة قطرية فيها كل عناصر القطر الأساسى تساوى الوحـــدة ويرمز لها فى بعض الأحيان بالرمز I_n حيث $(n \times n)$ هى رتبة المصفوفه فمثلا

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;,\; I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبوجه عام إذا كانت A مصفوفة مربعة رتبتها $(m \times m)$ ، I هى مصفوفة الوحدة بنفس الرتبة فأن

$$I A = A I = A$$

كذلك

$$I = I^2 = I^3 = \cdots = I^k \cdots$$

حيث k عدد صحيح موجب ويمكن للقارىء إثبات ذلك بسهولة .

وبضرب أى مصفوفة A فى مصفوفة الوحدة تبقى المصفوفة A كما هى بدون أى تغيير بفرض قابلية ضرب المصفوفتين فمثلا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

كذلك إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأن

$$I\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$A\,I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

محددة المصفوفة :

تعرف فقط محددة مصفوفة A إذا كانت هذه المصفوفة مربعة وتكون هى محددة عناصر المصفوفة ويرمز لها بالرمز $|A|$ فمثلا إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

فأن

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

وإذا كانت محددة مصفوفة مربعة تساوى صفرا تسمى المصفوفة بالمصفوفة الشاذة Singular matrix

فمثلا المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

شاذة لأن محددة هذه المصفوفة تساوى صفرا لتساوى العمودين الأول والثالث .

المصفوفة البديلة The Transposed Matrix

وجدنا فى حالة المحددات أن تبديل الصفوف بالأعمدة لا يغـــير من قيمة المحددة. ولكن إذا بادلنا الصفوف بالأعمدة فى مصفوفة فأننا نحصل على مصفوفة جديدة تسمى المصفوفة البديلة — فمثلا إذا كانت A مصفوفة رتبتها (3×2) تعطى من

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

فأن المصفوفة البديلة لهذه المصفوفة ويرمز لها بالرمز A' تعطى من

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

ومن الواضح أن المصفوفة البديلة لمصفوفة العمود $\} A \{$ هى مصفوفة الصف $[A]$ لأنه إذا كانت

$$\} A \{ = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

فأن

$$\} A \{' = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] = [A]$$

كذلك المصفوفة البديلة لمصفوفة الصف $[A]$ هى مصفوفة العمود $\} A \{$ أى أن

$$[A]' = \} A \{$$

وينتج أن

$$\} A \{' \} A \{ = [A]\,[A]' = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

يتضح بوجه عام أنه إذا كانت A مصفوفة رتبتها $(m \times n)$ فان رتبة المصفوفة A' هى $(n \times m)$ لذلك تقبل كل من المصفوفتين A' , A الضرب مع الأخرى

أى يمكن إيجاد حاصل الضرب AA' ، $A'A$ وتختلف رتبة حاصل الضرب AA' عن رتبة حاصل الضرب $A'A$ إلا إذا كانت A مصفوفة مربعة .

سنثبت الآن أنه إذا كانت B ، A مصفوفتان قابلتان للضرب $AB = C$ فان

$$C' = (AB)' = B'A'$$

نفرض أن رتبة A هى $(m \times p)$ وعناصرها a_{ik} ورتبة B هى $(p \times n)$ وعناصرها b_{ik} فتكون C مصفوفة رتبتها $(m \times n)$ وتعطى عناصرها c_{ik} من :

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}\, b_{sk}$$

وتبعا لذلك

$$c'_{ik} = c_{ki} = \sum_{s=1}^{p} a_{sk}\, b_{si} = \sum_{s=1}^{p} b'_{is}\, a'_{sk}$$

$$\therefore\ C' = B'A'$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن

$$(A\,B\,C)' = C'\,B'\,A'$$

وهكذا لأى عدد محدود من المصفوفات

وعلى سبيل المثال إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} , \quad B' = [2 \quad 1]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad B'A' = [4 \quad 10]$$

ومن الواضح أن $\qquad (AB)' = B'A'$

المصفوفات المتماثلة والسلبية التماثل :

Symmetric and Skew – Symmetric matrices

المصفوفة المتماثلة هى مصفـــوفة مربعة عنـاصرها a_{ik} بحيث يـكون $a_{ik} = a_{ki}$ أو بعبارة أخرى تـكون العناصر المتناظرة فوق وتحت القطر الأساسى متساوية فثلا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 3 & c \\ b & c & 2 \end{bmatrix}$$

متماثلة ومن الواضح أن كل مصفوفة متماثلة هى المصفوفة البديلة لنفسها أى $A = A'$ والعكس صحيح أى أنه إذا كانت مصفوفة تساوى مصفوفتها البديلة فأنها تكون متماثلة .

والمصفوفة السلبية التماثل هى مصفوفة مربعة عناصرها a_{ik} بحيث يـكون $a_{ik} = -a_{ki}$ ويتضح من هذا التعريف أن كل عنصر من عناصر القطار الأساسى يساوى صفرا (لأن $a_{nn} = -a_{nn}$ أى $a_{nn} = 0$) فثلا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة سلبية التماثل . ومن السهل إثبات أنه فى المصفوفة السلبية التماثل A فأن $A = -A'$.

ويمكن التعبير عن كل مصفوفة A كحاصل جمع مصفوفتين احداهما متماثلة $\underline{A}$ والثانية سلبية التماثل A_v لأنه إذا كانت عناصر A هى a_{ik} فأن

$$a_{ik} = \tfrac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}) + \tfrac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$$

أى

$$A = \underline{A} + A_v$$

فمثلا إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فأن

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

وينتج أن

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفات المركبة والهرميتية :

Complex and Hermitian Matrices

إذا كانت A مصفوفة رتبتها $(m \times n)$ تحتوى على عناصر مركبة a_{ik} فأن المصفوفة المركبة المرفقة A^* للمصفوفة A هى المصفوفة التى عناصرها تساوى الكميات المركبة المرافقة لجميع عناصر المصفوفة A فمثلا إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3+2i & 4 & -i \\ 5 & 2-i & 1+i \end{bmatrix}$$

فأن

$$A^* = \begin{bmatrix} 3-2i & 4 & i \\ 5 & 2+i & 1-i \end{bmatrix}$$

ومن الواضح أن $(A^*)^* = A$

والمصفوفة الهرميتية هى مصفوفة مربعة بحيث لا تتغير بأخذ المصفوفة البديلة للمصفوفة التى عناصرها تساوى الكميات المركبة المرفقة لجميع عناصر المصفوفة المعلومة ـ فمثلا إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

فأن

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^*)' = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} = A$$

لذلك تكون المصفوفة A هرميتية ويلاحظ أن عناصر القطر الأساسى لمصفوفة هرميتية كلها أعداد حقيقية .

وفى المصفوفة المربعة A إذا كان $(A^*)' = -A$

فـأن المصفوفة A تسمى مصفوفة هـرميتية سالبة Skew-Hermitian

المصفوفة المرتبطة ومقلوب المصفوفة :

The Adjoint matrix and the reciprocal of a matrix

إذا كانت A هى المصفوفة المربعة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فأن المصفوفة المرتبطة للمصفوفة A هى المصفوفة البديلة لمصفوفة العوامل المرافقة Cofactors للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز adj A . فاذا كان A_{rs} هو العامل المرافق للعنصر a_{rs} (أى قيمة المحددة المكونة بحذف كل من الصف والعمود الذى يحتوى على العنصر a_{rs} مع أخذ الاشاره المناسبة حسب قاعدة الاشارات أو بعبارة أخرى المحددة الصغرى للعنصر a_{rs} مع أخذ الاشارة المناسبة) . فأن مصفوفة العوامل المرافقة هى المصفوفة B (بنفس رتبة A) تعطى من

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots\cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots\cdots\cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots\cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

وحسب التعريف

$$\text{adj } A = B' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots\cdots\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots\cdots\cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots\cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

وعلى سبيل المثال إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

العامل المرافق للعنصر a_{11} هو المحددة

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 11$$

العامل المرافق للعنصر a_{12} هو المحددة

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = -7$$

وهكذا ... وبذلك نحصل على مصفوفة العوامل المرافقة B ونجد أن

$$B = \begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

وحسب التعريف

$$\text{adj } A = B' = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

نعتبر الآن حاصل الضرب :

$$A\,(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|\, I
$$

حيث $|A|$ هى محددة المصفوفة A ، I هى مصفوفة الوحدة التى لها نفس رتبة المصفوفة A

لذلك يمكن تعريف مقلوب المصفوفة A والذى يرمز له بالرمز A^{-1} من

$$
A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}
$$

ويكون له الخاصية

$$
AA^{-1} = I
$$

ويلاحظ أن المصفوفة المربعة ومقلوبها قابلان للضرب AA^{-1} ، $A^{-1}A$ وينتج أن

$$
AA^{-1} = A^{-1}A = I
$$

حيث I هى مصفوفة الوحدة التى لها نفس رتبة كل من A ، A^{-1}

وإذا كانت $|A| = 0$ سميت المصفوفة A بمصفوفة شاذة ولا يكون لها مقلوب

مثال (٣)

أوجد قيمة A^{-1} إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

حسب المثال التوضيحى السابق فأن

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 11 - 2 \times 7 + 3 \times 2 = 3 \neq 0$$

ويكون للمصفوفة A مقلوب يعطى من :

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة لمصفوفة :

إذا كانت A مصفوفة مربعة رتبتها $(m \times m)$ ، I هى مصفوفة الوحدة بنفس الرتبة فأن المصفوفة

$$B = A - \lambda I$$

تسمى بالمصفوفة المميزة للمصفوفة A حيث λ بارامتر .

وتسمى المعادلة

$$|B| = |A - \lambda I| = 0$$

بالمعادلة المميزة للمصفوفة A وتكون بوجه عام معادلة من الدرجة n فى λ وتسمى جذور هذه المعادلة بالجذور المميزة

مثال (٤)

أوجد المعادلة المميزة والجذور المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة هى $|A - \lambda I| = 0$ أى

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\because \quad (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2)=0$$

أى

$$\lambda = 2 \text{ or } 2 \pm \sqrt{2}$$

ويمكن إثبات أن المصفوفة A تحقق المعادلة المميزة $|A-\lambda I| = 0$ وبذلك يمكن الحصول على مقلوب المصفوفة أى A^{-1} بطريقة سهلة بدون إيجاد adj A وذلك بإيجاد المعادلة المميزة والتعويض عن $A = \lambda$ وتتمم الحل كما يتضح من المثالين الآتيين .

مثال (٥)

أوجد مقلوب المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أولا أن مقلوب المصفوفة له وجود لأن

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

لذلك يوجد مقلوب للمصفوفة

المعادلة المميزة للمصفوفة A هى

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

أى

$$\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$$

ونظرا لأن المصفوفة A تحقق المعادلة المميزة

$$\therefore \quad A^2 - 6A - I = 0$$

$$I = A^2 - 6A$$

$$\therefore \quad A^{-1} I = A - 6I$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

مثـال (٦)

أوجد مقلوب المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أولا أن مقلوب المصفوفة له وجود لأن $|A| = -1 \neq 0$

المعادلة المميزة للمصفوفة A هى

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

ونظرا لأن المصفوفة A تحقق المعادلة المميزة

$$\therefore \quad A^3 - 2A^2 - 4A + I = 0$$

$$\therefore \quad I = -A^3 + 2A^2 + 4A$$

$$\therefore \quad A^{-1} I = -A^2 + 2A + 4I$$

$$\therefore \quad A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -5 & 4 \\ -4 & -6 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفات المتعامدة : Orthogonal Matrices

يقال للمصفوفة المربعة A أنها متعامدة إذا كان $A'A = I$

$$\therefore \quad AA' = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

لذلك فى المصفوفات المتعامدة :

$$A'A = AA' = I$$

مثـال (٧)

أثبت أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

متعامدة

$$A' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A'A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

حل المعادلات الآنية باستعمال المصفوفات :

نعتبر مجموعة المعادلات الآنية التى عددها n فى المجاهيل $x_1, x_2 \cdots, x_n$ تأخذ هذه المعادلات الصورة :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \cdots + a_{1n}x_n = h_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \cdots + a_{2n}x_n = h_2$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots \cdots + a_{nn}x_n = h_n$$

حيث المعاملات h_i , a_{in} كميات ثابتة

يمكن كتابة المعادلات السابقة على صورة مصفوفات كما يأتى

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

أى

$$A \left\{ x \right\} = \left\{ h \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \left\{ x \right\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\left\{ h \right\} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

فأذا كانت $|A| \neq 0$ فأن

$$A^{-1} A \{ x \} = A^{-1} \{ h \}$$

ونظرا لأن $A^{-1} A = I$

$$\therefore\ I \{ x \} = \{ x \} = A^{-1} \{ h \} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|} \{ h \}$$

وهو حل المعادلة الصفوفية $A \{ x \} = \{ h \}$ وبذلك يمكن مباشرة وفى نفس الوقت تعيين المجاهيل $x_1 , x_2 , \cdots , x_n$ أما بحساب A^{-1} بطريقة المعادلة المميزة السابق شرحها أو بطريقة إيجاد المصفوفة المرتبطة وهى الطريقة المناسبة فى هذه الحالة .

مثال (٨)

حل المعادلات الآتية :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$
$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 36$$

نكتب المعادلات على الصورة $A \{ x \} = \{ h \}$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} , \{ x \} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\{ h \} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1-12) - (9-3) + (4-2) = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} A \{x\} = A^{-1} \{h\}$$

$$\therefore \; I\{x\} = \{x\} = A^{-1}\{h\} = \frac{\text{adj } A}{|A|}\{h\}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \{x\} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; x_1 = 1 \,,\; x_2 = 2 \,,\; x_3 = 3$$

تمارين

١) إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ x-y & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة كل من x ، y

Ans. $\frac{7}{2}$, $-\frac{1}{2}$

٢) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

أحسب قيمة كل من :

i) $A-B$ ii) $A+B+C$ iii) $A-B$

iv) $B-A$ v) $\frac{1}{2}A - \frac{1}{3}C$ vi) $2C-3B$

Ans. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix},$

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -6 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{8}{3} \\ \frac{5}{2} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -7 & 6 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$$

٣) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد AB , BA

$$\text{Ans. } AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 28 & 6 & 19 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 19 & 16 & 27 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

٤) أوجد حاصل ضرب المصفوفات الآتية إذا كان ذلك ممكنا

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{d) } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ans. $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, وغير ممكن , $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}$, غير ممكن

٥) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

أحسب قيمة كل من

a) AB b) $[AB]C$ c) BC d) $A[BC]$

e) $A[B+C]$ f) $[B+C]A$

ثم حقق أن

i) $A[B+C] = AB + AC$

ii) $[B+C]A = BA + CA$

Ans. $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} ,$

$\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

٦) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} , C = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $AB = AC$

٧) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $AB = 0$

٨) أثبت أن المصفوفات الآتية كلها متساوية

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 , \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 , \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 ,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}^2 \qquad (k \neq 0)$$

٩) أوجد إذا كان ذلك ممكنا قيمة كل من x , y إذا كانت

i) $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -2 & y \end{bmatrix} , \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , AB = BA$

ii) $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -1 & y \end{bmatrix} , \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , AB = BA$

Ans, i) any x , $y = x - 2$; ii) no (x , y)

١٠) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} , \ B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $AB = 0 \neq BA$

١١) أوجد مقلوب المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

وحقق أن $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$\text{Ans. : }\begin{bmatrix} 6 & -9 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

١٢) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $A^2 = I$ حيث I هى مصفوفة الوحدة التى رتبتها (4×4)

أثبت أنه إذا كان

$$P = A M_1 A \ , \ Q = A M_2 A$$

حيث M_2 ، M_1 أى مصفوفتين قطريتين أختياريتين رتبة كل منهما (4×4) فأن $PQ = QP$

١٣) أثبت أن المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{bmatrix}$$

هرميتية

أثبت أن الجذور المميزة لمصفوفة هرميتية تكون دائما حقيقية

١٤) أوجد المصفوفتين المتماثلة والسلبية التماثل بحيث يكون مجموعها يساوى المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -5 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ans. } \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}, \; A_V = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

١٥) أثبت أنه إذا كان

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

فأن :

$$A(\theta)\, A(\varphi) = A(\theta + \varphi)$$

وعلل هذه النتيجة هندسيا

١٦) أوجد مقلوب المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Ans.} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{[illegible]} & -\text{[illegible]} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

١٧) أثبت أن الجذرين المميزين للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

هما $4 , -1$

١٨) أوجد المعادلة المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ثم أثبت أن كل من المصفوفتين

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لهما نفس المعادلة المميزة للمصفوفة A

Ans. $\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\lambda + 18 = 0$

١٩) أوجد مقلوب كل مصفوفة من المصفوفات الآتية بأيجاد المعادلة المميزة لها وحقق الناتج بضرب المصفوفة فى مقلوبها

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{iv)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ans: i)} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{iv)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

٢٠) إذا كانت A مصفوفة متعامدة أثبت أن القيمة المطلقة لكل جذر من جذورها تساوى الوحدة .

أثبت أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\phi & -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \sin\phi & \sin\theta\cos\phi & -\cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$

متعامدة وأوجد جذورها المميزة وحقق أن القيمة المطلقة لكل جـذر من هذه الجذور تساوى الوحدة

$$\text{Ans}: \lambda = 1\,,\ -\alpha \pm i\sqrt{1+\alpha^2} \quad \text{where} \quad \alpha = \cos^2\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)$$

٢١) أثبت أن المصفوفة

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

متعامدة .

أثبت أنه إذا كانت

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

فأن $S\,P\,S'$ مصفوفة قطرية وأوجد جذورها المميزة

Ans : 4 , -2

٢٢) إذا كانت

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $P^{-1}XP$ مضفوفة قطرية وأن X تحقق المعادلة

$$X^3 - 2X^2 - X + 2I = 0$$

٢٣) إذا كانت

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $S\,(S^*)' = 1$

حل بأستعمال المصفوفات المعادلات الآتية :

٢٤)

$$2x - 3y + z = 0$$

$$x + y + z = 3$$

$$3x + 4y - 5z = 2$$

[Ans. $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$]

٢٥)

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$$

[Ans. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$]