الباب الأول

المحددات DETERMINANTS

إذا كتبت الكميات الأربع a_1 , a_2 , b_1 , b_2 على الصورة

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

فأنه يقصد بذلك المقدار الجبرى $a_1 b_2 - a_2 b$ وتكتب هذه النتيجة على الصورة

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

ويسمى الطرف الأيسر لهذه المتساوية بالمحددة والطرف الأيمن بمفكوك المحددة وتحتوى هذه المحددة على صفين وعمودين لذلك تسمى بالمحددة ذات الرتبة الثانية وتسمى الكميات : a_1 , a_2 , b_1 , b_2 التى تتكون منها المحددة عناصر أو مكونات المحددة

فمثلا

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 4.6 + 5.3 = 39 ,$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 ,$$

$$\begin{vmatrix} -\omega & \omega^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\omega - \omega^2 = 1 ,$$

(ω^2 , ω , 1 هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح)

$$\begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 1 + i^2 = 0$$

(حيث $i = \sqrt{-1}$)

المحددة ذات الرتبة الثالثة :

إذا وضعت الكميات التسع a_1 ، a_2 ، a_3 ؛ b_1 ، b_2 ، b_3 ؛ c_1 ، c_2 ، c_3 على الصوره

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فأنه يقصد بذلك المقدار

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

أى

$$a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$$

وتسمى المحددة السابقة بالمحددة ذات الرتبة الثالثة لاحتوائها على ثلاثة صفوف وثلاثة أعمـــدة وتسمى الكميات التسع a_1 ، a_2 ، a_3 ؛ b_1 ، b_2 ، b_3 ؛ c_1 ، c_2 ، c_3 عناصر أو مكونات المحددة

ويلاحظ أن مفكوك المحددة وهو المقدار

$$a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$$

يمكن كتابته بخمس صور أخرى مثل

$$-b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) \quad ,$$

$$c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \quad ,$$

$$-a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) \quad ,$$

. . . .

. . . .

لذلك يمكن فك المحددة حسب مكونات أى صف أو عمود مع مراعاة قاعدة الاشارات الآتية :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

فمثلا المحددة

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

يمكن فكها بأستعمال أى صف أو أى عمود كما يأتى

$$D = 4(5\cdot6 - 4\cdot2) - 2(7\cdot6 - 4\cdot9) + 3(7\cdot2 - 5\cdot9) = -17$$

بأستعمال الصف الأول

$$= -7(2\cdot6 - 3\cdot2) + 5(4\cdot6 - 3\cdot9) - 4(4\cdot2 - 2\cdot9) = -17$$

بأستعمال الصف الثانى

$$= \quad 9(2.4 - 3.5) - 2(4.4 - 3.7) + 6(4.5 - 2.7) = -17$$

بأستعمال الصف الثالث

$$= \quad 4(5.6 - 4.2) - 7(2.6 - 3.2) + 9(2.4 - 3.5) = -17$$

بأستعمال العمود الأول

$$= -2(7.2 - 4.9) + 5(4.6 - 3.9) - 2(4.4 - 3.7) = -17$$

بأستعمال العمود الثاني

$$= \quad 3(7.2 - 5.9) - 4(4.2 - 2.9) + 6(4.5 - 2.7) = -17$$

بأستعمال العمود الثالث

المحددات الصغرى :

يتضح مما سبق أن مفكوك محددة من الرتبة الثالثة يتوقف على محددات أخرى من الرتبة الثانية وتسمى هذه المحددات المحددات الصغرى للمحددة الأصلية .

فأذا اعتبرنا المحددة

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فأن المحددة الصغرى الناتجة عن حذف الصف الأول والعمود الأول (وهما الصف والعمود اللذان يلتقيان عند العنصر a_1) تسمى المحددة الصغرى المناظرة للعنصر a_1 ويرمز لها بالرمز A_1 أي أن :

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

كذلك

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

هى المحددة الصغرى للعنصر b_2 ويرمز لها بالرمز B_2 والمحددة

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

هى المحددة الصغرى للعنصر c_3 ويرمز لها بالرمز C_3 وهكذا .

وباستعمال المحددات الصغرى يمكن كتابة مفكوك المحددة D بأحدى الصور الآتية :

باستخدام الصف الأول $D = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1$

باستخدام الصف الثانى $= -a_2 A_2 + b_2 B_2 - c_2 C_2$

باستخدام العمود الأول $= a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3$

وهكذا ... ...

يستنتج من ذلك أنه يمكن إيجاد مفكوك المحددة باستخدام عناصر أى صف أو أى عمود ويكون معامل كل عنصر هو المحددة الصغرى المناظرة لهذا العنصر مسبوقة بأشارة + أو − حسب قاعدة الاشارات السابق شرحها والتى ترتبط بوضع العنصر فى المحددة − إذ يتميز وضع أى عنصر فى المحددة برتبتى الصف والعمود اللذان يلتقيان عند هذا العنصر . فاذا كان مجموع هاتين الرتبتين عددا زوجيا نضع اشارة + وإذا كان المجموع عددا فرديا نضع إشارة −

المحددة ذات الرتبة الرابعة :

عرفنا المحددة ذات الرتبة الثالثة بدلالة محددات من الرتبة الثانية وبنفس الطريقة يمكن تعريف المحددة ذات الرتبة الرابعة بدلالة محددات من الرتبة الثالثة فالمحددة ذات الرتبة الرابعة :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 - d_1 D_1$$

حيث : A_1 ، B_1 ، C_1 ، D_1 هى على الترتيب المحددات الصغرى للعناصر a_1 ، b_1 ، c_1 ، d_1

وقد عرفنا مفكوك المحددة السابقة باستخدام عناصر الصف الأول على أنه يمكن ايجـــاد المفكوك باستخدام عناصر أى صف أو عمود واستعمال قاعدة الإشارات السابق شرحها وتكون فى هذه الحالة

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

وعلى سبيل المثال لايجاد قيمة المحددة

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

من الأسهل فى هذه الحالة فك المحددة باستخدام عناصر العمود الثانى أو الصف الرابع لأن كلا منهما يحتوى على عنصرين يساويان صفرا - وبفك المحددة باستعمال العمود الثانى ينتج أن :

$$\Delta = -(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1-2) + 1\times -1 + 2(-1-2) + 1\times 2 = -11$$

الخواص الاساسية للمحددات :

سنكتفى باثبات هذه الخواص للمحددات ذات الرتبة الثالثة ويمكن تعميم الاثبات للمحددات بأى رتبة .

اولا : لاتتغير قيمة المحددة إذا بادلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف أى

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

بفك محددة الطرف الأيسر باستخدام الصف الأول ومحددة الطرف الأيمن باستخدام العمود الأول ينتج المطلوب

ثانيا : تتغير اشارة المحددة إذا بادلنـــا أى صفين أو أى عمودين بعضهما ببعض أى

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

بفك محددة الطرف الأيسر باستخدام الصف الأول ومحددة الطرف الأيمن باستخدام الصف الثانى ينتج المطلوب

ثالثا : تنعدم المحددة إذا تساوى صفان أو عمودان

لأننا لو بادلنا الصفين المتساويين (أو العمودين المتساويين) بعضهما ببعض تتغير اشارة المحددة بينما فى الحقيقة لم تتغــــير المحددة ـ فلو فرضنا أن قيمة المحددة تساوى D :

$$\therefore\ D = -D \qquad \therefore\ 2D = 0 \qquad \therefore\ D = 0$$

رابعا : إذا ضربت عناصر أى صف (أو عمود) فى نفس المعامل فأن قيمة المحددة تضرب فى نفس المعامل أى

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

الطرف الأيسر يساوى

$$k a_1 A_1 - k b_1 B_1 + k c_1 C_1$$
$$= k (a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1)$$

= الطرف الأيمن

ونحصل على نفس النتيجة إذا ضرب أى صف أو عمود فى نفس المعامل وذلك بفك المحددة بأستخدام الصف أو العمود المضروب فيه المعامل .

خامسا : إذا تكونت عناصر أى صف أو عمود من المجموع الجبرى لحدود عددها n فأن المحددة تساوى مجموع n من المحددات تحتوى كل منها على حد واحد فقط أى

$$\begin{vmatrix} a_1+l_1-m_1 & b_1+p_1-q_1 & c_1+r_1-s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 & p_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_1 & q_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

بفك الطرف الأيسر بأستخدام الصف الأول ينتج أن المحددة تساوى

$$(a_1+l_1-m_1)\,A_1 - (b_1+p_1-q_1)\,B_1 + (c_1+r_1-s_1)\,C_1$$

$$= (a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1) + (l_1A_1 - p_1B_1 + r_1C_1) - (m_1A_1 - q_1B_1 + s_1C_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 & p_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_1 & q_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وذلك يساوى الطرف الأيمن وتثبت النظرية عندما تكون $n = 3$ ويمكن بنفس الطريقة أثبات النظرية إذا كانت n تساوى 2 أو n أكبر من 3 .

سادساً : لاتتغير قيمة المحددة إذا أضفنا إلى عناصر أى صف أو عمود مضاعفات العناصر المناظرة للصفوف (أو الأعمدة) الاخرى أى

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+pa_2+qa_3 & b_1+pb_2+qb_3 & c_1+pc_2+qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

حسب الخاصية السابقة فأن الطرف الأيمن يساوى

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa_2 & pb_2 & pc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qa_3 & qb_3 & qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

أى يساوى الطرف الأيسر . وقد انعدمت المحددتان الثانية والثالثة لتساوى صفين فى كل منهما .

أمثلة متنوعة

مثال (١)

ضع المحددة

$$D = \begin{vmatrix} 87 & 42 & 3 \\ 45 & 18 & 7 \\ 50 & 17 & 3 \end{vmatrix}$$

فى صورة أبسط ثم أوجد قيمتها

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 42 & 3 \\ 2 & 18 & 7 \\ 13 & 17 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(c_1 - 2c_2 - c_3)$$

حيث :

c_1 = العمود الأول ، c_2 = العمود الثانى ، c_3 = العمود الثالث

وبالمثل سنفرض أن :

r_1 = الصف الأول ؛ r_2 = الصف الثانى ، r_3 = الصف الثالث

$$= 3 \begin{vmatrix} 0 & 14 & 1 \\ 2 & 18 & 7 \\ 13 & 17 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -80 & 7 \\ 13 & -25 & 3 \end{vmatrix} \qquad (c_2 - 14c_3)$$

بفك المحددة باستعمال الصف الأول ينتج أن

$$D = 3\begin{vmatrix} 2 & -80 \\ 13 & -25 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & -40 \\ 13 & -25 \end{vmatrix}$$

$$= 6\,(-25 + 520) = 30(-5 + 104) = 2970$$

مثال (٢)

حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

من الواضح أن المحددة تنعدم إذا كانت $x = 1$ لأنه فى هذه الحالة يتساوى الصفان الأول والثانى ـ كذلك تنعدم المحددة إذا كانت $x = -2$ لتساوى الصفين الأول والثالث وتنعدم المحددة أيضا إذا كانت $x = 3$ لتساوى الصفين الأول والرابع ـ لذلك تكون جذور المعادلة هى $1, -2, 3$ ونظراً لأن المعادلة من الدرجة الثالثة فى x فلا يكون لها جذر آخر .

مثال (٣)

حل المعادلة

$$D = \begin{vmatrix} x+1 & 2x & 1 \\ x & 3x-2 & 2x \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1-x & 2x & 1 \\ 2-2x & 3x-2 & 2x \\ 1-x & x & x \end{vmatrix} \quad (c_1 - c_3)$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 2x & 1 \\ 2 & 3x-2 & 2x \\ 1 & x & x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 2x & 1-x \\ 2 & 3x-2 & 0 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} \quad (c_3 - x\, c_1)$$

$$= (1-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2-x & 1 \\ 2 & 3x-2 & 0 \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3x-2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

(بفك المحددة بأستعمال العمود الثالث)

$$= (1-x)^2 (2-x)$$

$$\therefore (1-x)^2 (2-x) = 0$$

$$\therefore x = 1,\ 1,\ 2$$

مثال (٤)

ضع المحددة

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 9 & -1 & 3 \\ 3 & -7 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 & 7 \\ 1 & -3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

في صورة أبسط ثم أوجد قيمتها

$$= \begin{vmatrix} 4 & 9 & -1 & 3 \\ -1 & -16 & 3 & 2 \\ -1 & 12 & -5 & 2 \\ -1 & -8 & 7 & 2 \end{vmatrix} (r_2 - r_1 \, , \, r_3 - r_2 \, , \, r_4 - r_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 9 & -1 & 11 \\ -1 & -16 & 3 & 0 \\ -1 & 12 & -5 & 0 \\ -1 & -8 & 7 & 0 \end{vmatrix} \qquad (c_4 + 2c_1)$$

$$= -11 \begin{vmatrix} -1 & -16 & 3 \\ -1 & 12 & -5 \\ -1 & -8 & 7 \end{vmatrix}$$

بفك المحددة بأستخدام العمود الرابع

$$= -11 \begin{vmatrix} -1 & -16 & 3 \\ 0 & 28 & -8 \\ 0 & 8 & 4 \end{vmatrix} \qquad (r_2 - r_1 , r_3 - r_1)$$

$$= 11 \begin{vmatrix} 28 & -8 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

(بفك المحددة بأستعمال العمود الأول)

$$= 11 \times 16 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 11 \times 16 \times 11 = 1936$$

مثال (٥)

أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$$

ثم حلل المحددة

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin 2\alpha & \sin 2\beta & \sin 2\gamma \\ \cos 3\alpha & \cos 3\beta & \cos 3\gamma \end{vmatrix}$$

نعتبر المحددة

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

بوضع $b = c$ أو $c = a$ أو $a = b$ نجد أن المحـــددة تنعدم لتساوى عمودين فى كل حالة — لذلك يكون كل من : $a - b$, $c - a$, $b - c$ عاملا المحددة . ولكن مفكوك المحددة هو مقدار من الدرجة الثالثة فى a, b, c لذلك لايوجد عامل آخر يتوقف على a أو b أو c وينتج أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = k\,(b - c)\,(c - a)\,(a - b)$$

حيث k كمية ثابته لا تتوقف على a أو b أو c

وبمساواة معامل bc^2 فى الطرفين ينتج أن $k = 1$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - c)\,(c - a)\,(a - b)$$

نعتبر المحددة D

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin 2\alpha & \sin 2\beta & \sin 2\gamma \\ \cos 3\alpha & \cos 3\beta & \cos 3\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & 2\sin\beta\cos\beta & 2\sin\gamma\cos\gamma \\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha & 4\cos^3\beta - 3\cos\beta & 4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\sin\alpha & 2\sin\beta & 2\sin\gamma \\ 4\cos^2\alpha-3 & 4\cos^2\beta-3 & 4\cos^2\gamma-3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 1-4\sin^2\alpha & 1-4\sin^2\beta & 1-4\sin^2\gamma \end{vmatrix}$$

$$= -8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \end{vmatrix} \qquad (r_3 - r_1)$$

$$= -8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)(\sin\alpha - \sin\beta)$$

استعمال المحددات فى الحذف :

نعتبر المعادلات الثلاث

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

هذه المعادلات متجانسة من الدرجة الأولى فى x , y , z وواضح أن لهذه المعادلات الحل الظاهر $x = 0 , y = 0 , z = 0$ ويسمى هذا الحل أحيانا بالحل التافه . وسنبحث الآن عن الشرط الواجب توافره حتى يكون لهذه المعادلات حلا آخر غير الحل الظاهر $x = 0 , y = 0 , z = 0$. بقسمة كل من المعادلات الثلاث على z ينتج أن :

$$a_1\left(\frac{x}{z}\right)+b_1\left(\frac{y}{z}\right)+c_1=0 \qquad (1)$$

$$a_2\left(\frac{x}{z}\right)+b_2\left(\frac{y}{z}\right)+c_2=0 \qquad (2)$$

$$a_3\left(\frac{x}{z}\right)+b_3\left(\frac{y}{z}\right)+c_3=0 \qquad (3)$$

لذلك يوجد فى الواقع مجهولان هما $\frac{y}{z}$ ، $\frac{x}{z}$ فبإيجاد $\frac{y}{z}$ ، $\frac{x}{z}$ من اثنين من المعادلات 3 , 2 , 1 وبالتعويض عن قيمتيهما فى المعادلة الباقية نحصل على الشرط اللازم لكى يكون للمعادلات السابقة حل آخر غير الحل الظاهر $x=0$, $y=0$, $z=0$ أو بعبارة أخرى نكون قد حذفنا x, y, z من المعادلات المعلومة

بحل المعادلتين 3 , 2 ينتج أن

$$\frac{\frac{x}{z}}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{\frac{y}{z}}{a_3c_2-a_2c_3}=\frac{1}{a_2b_3-a_3b_2}$$

أى

$$\frac{\frac{x}{z}}{A_1}=\frac{\frac{y}{z}}{-B_1}=\frac{1}{C_1}$$

حيث A_1 , B_1 , C_1 هى المحددات الصغرى للعناصر a_1 , b_1 , c_1 فى المحدده

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{z} = \frac{A_1}{C_1} \; , \; \frac{y}{z} = -\frac{B_1}{C_1}$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) ينتج أن :

$$\frac{a_1 A_1}{C_1} - \frac{b_1 B_1}{C_1} + c_1 = 0$$

$$\therefore \quad a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 = 0$$

أى

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

لذلك يمكن كتابة نتيجة عملية الحذف أو الشرط اللازم لكى يكون المعادلات المتجانسة الثلاث حل آخر غير الحل الظاهر $x = 0 , y = 0 , z = 0$ بوضع معاملات x , y , z فى المعادلات الثلاث على صورة محددة ومساواتها بالصفر .

المعادلات المتوافقه :

إذا احتوى عدد من المعادلات الخطية الآنية على مجاهيل مستقلة عددها n فان المعادلات تعطى بوجه عام قيمة واحدة لكل من المجاهيل بفرض أن عدد المعادلات يساوى n وإذا زاد عدد المعادلات عن عدد المجاهيل فأنه لايمكن بوجه عام إيجاد قيمة هذه المجاهيل لتحقيق جميع المعادلات . فاذا حققت قيمة المجاهيل المعادلات كلها فأنه يوجد n فقط من المعادلات المستقلة وتسمى فى هذه الحالة بالمعادلات المتوافقة .

مثال (٦)

أثبت أن نتيجة حذف a , b , c من المعادلات :

$$p(b-c)=a\,,\; q(c-a)=b\,,\; r(a-b)=c$$

هى $\quad pq+qr+rp+1=0$

نضع المعادلات على الصورة :

$$\begin{aligned} a-pb+pc&=0\,,\\ qa+b-qc&=0\,,\\ ra-rb-c&=0\end{aligned}$$

نتيجة حذف a , b , c من المعادلات السابقة هى

$$\begin{vmatrix} 1 & -p & p\\ q & 1 & -q\\ r & r & -1\end{vmatrix}=0$$

وبفك هذه المحددة نجد أن

$$pq+qr+rp+1=0$$

مثال (٧)

أثبت أن المعادلات

$$\begin{aligned} 3x+5y-2z&=0\\ 2x-4y+5z&=0\\ x-13y+12z&=0\end{aligned}$$

متوافقة ــ ثم أوجد القيمة العامة خلاف الصفر لكل من x , y , z

تكون المعادلات متوافقة إذا كان :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & -13 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

المحددة تساوى

$$3(-48+65) - 5(24-5) - 2(-26+4) = 0$$

لذلك تكون المعادلات متوافقة . ولايجاد القيمة العامة لكل من x , y , z خلاف الصفر نحل المعادلات المعلومة وهى

$$3x + 5y - 2z = 0 \qquad (1)$$

$$2x - 4y + 5z = 0 \qquad (2)$$

$$x - 13y + 12z = 0 \qquad (3)$$

فى x , y , z وبحل المعادلتين 1 , 2 ينتج أن :

$$\frac{x}{25-8} = \frac{y}{-4-15} = \frac{z}{-12-10}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{17} = \frac{y}{-19} \quad \frac{z}{-22}$$

وتكون القيمة العامة لكل من x , y , z هى

$$x = 17\,k \quad , \quad y = -19\,k \quad , \quad z = -22\,k$$

أو

$$x : y : z = 17 : -19 : -22$$

التطبيق الأول : الدوال الخطية المعتمدة على بعضها :

نعتبر الدوال الخطية الثلاث

$$\begin{aligned} & a_1x + b_1y + c_1z \\ & a_2x + b_2y + c_2z \qquad\qquad (1) \\ & a_3x + b_3y + c_3z \end{aligned}$$

فأذا وجدت ثلاث كميات ثابتة n , m , l لا تساوى كلها صفرا بحيث تكون الدالة الأولى مضروبة فى l + الدالة الثانية مضروبة فى m + الدالة الثالثة مضروبة فى n تتلاشى تطابقيا نقول أن الدوال الثلاث معتمدة خطيا على بعضها أى أن كل من هذه الدوال الثلاث يمكن التعبير عنها كتركيب خطى من الدالتين الاخرتين .

فأذا كان

$$l\,(a_1x+b_1y+c_1z) + m\,(a_2x+b_2y+c_2z) + n\,(a_3x+b_3y+c_3z) = 0$$

لجميع قيم x , y , z تكون الدوال الثلاث معتمدة خطيا على بعضها لذلك يجب أن يكون معامل كل من x , y , z يساوى صفرا أى :

$$\begin{aligned} & a_1 l + a_2 m + a_3 n = 0 \ , \\ & b_1 l + b_2 m + b_3 n = 0 \ , \\ & c_1 l + c_2 m + c_3 n = 0 \end{aligned}$$

وشرط وجود حل لهذه المعادلات فى n , m , l غير الحل الظاهر $l = m = n = 0$ هو

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

أى

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

وهذا هو نفس الشرط اللازم توفره حتى تكون المعادلات

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 ,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 ,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

متوافقه

وإذا لم يتحقق هذا الشرط تكون الدوال الخطية الثلاث غير معتمده خطيا على بعضها أى لا يمكن التعبير عن احداها كتركيب خطى من الدالتين الآخرتين

التطبيق الثانى : الجذور المميزة والمتجهات المميزة :

تظهر الدوال الخطية (1) فى بعض الأبحاث النظرية ويكون المطلوب عاده تعيين قيما خاصة لكل من x ، y ، z بحيث تكون الدوال الثلاث تتناسب مع x ، y ، z على الترتيب بنفس ثابت التناسب أى :

$$a_1x + b_1y + c_1z = \lambda x$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = \lambda y$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = \lambda z$$

أو

$$(a_1 - \lambda)x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + (b_2 - \lambda)y + c_2z = 0$$
$$a_3x + b_3y + (c_3 - \lambda)z = 0$$

والشرط اللازم لـكى يكون لهذه المعادلات الثلاث حلا غير الحل الظاهر $x = y = z = 0$ هو

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحددة نحصل على معادله من الدرجه الثالثـة فى λ تسمى المعـادله المميزة وتسمى جذور هذه المعادله الثلاثة بالجذور المميزة وتسمى النسب المميزة $x : y : z$ بالمتجهات المميزة .

مثـال (٨)

أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للدوال الخطيه الثلاث الآتية :

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z \\ -2x - 2y + 6z \\ 4x + 6y - z \end{aligned}$$

بوضع الدوال الثـــلاث تساوى λx ، λy ، λz على الترتيب نحصل على المعادلات

$$\begin{aligned} (3 - \lambda)\, x - 2y + 4z &= 0 \\ -2x + (-2 - \lambda)\, y + 6z &= 0 \\ 4x + 6y + (-1 - \lambda)\, z &= 0 \end{aligned}$$

وتعطى المعادله المميزة من

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 & 4 \\ -2 & -2 - \lambda & 6 \\ 4 & 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

أى

$$-\lambda^3+63\lambda-162=0$$

$$\therefore\quad (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda+9)=0$$

وتكون الجذور المميزة هى $3, 6, -9$

عند $\lambda = 3$ تؤول المعادلات الثلاث إلى

$$-2y+4z=0$$
$$-2x-5y+6z=0$$
$$4x+6y-4z=0$$

ويمكن إيجاد النسبة $x : y : z$ من أى معادلتين من المعادلات الثلاث السابقة ـ فبحل المعادلتين الأولى والثانية ينتج أن

$$\frac{x}{-2\times 6-4\times -5}=\frac{y}{4\times -2-0\times 6}=\frac{z}{0\times -5-(-2)(-2)}$$

$$\therefore\quad \frac{x}{8}=\frac{y}{-8}=\frac{z}{-4}$$

$$\therefore\ x:y:z=2:-2:-1$$

وهى الاتجاهات المميزه المناظره إلى الجذر المميز $\lambda = 3$

وبالمثل إذا كانت $\lambda = 6$ نجد أن $x:y:z=2:1:2$

وإذا كانت $\lambda = -9$ نجد أن $x:y:z=1:2:-2$

استعمال المحددات في حل المعادلات الآنية ذات الدرجة الأولى :

لحل المعادلات

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

نحصل على x بترتيب المعادلات على الصورة

$$(a_1 x - d_1) + b_1 y + c_1 z = 0$$

$$(a_2 x - d_2) + b_2 y + c_2 z = 0$$

$$(a_3 x - d_3) + b_3 y + c_3 z = 0$$

بحذف z , y من المعادلات الثلاثة السابقة ينتج أن

$$\begin{vmatrix} a_1 x - d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 x - d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 x - d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

وبالمثل بحذف x , z ينتج أن

$$\frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

وبحذف y , x ينتج أن

$$\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

ويلاحظ أن المحددة الرابعة من محددات المقام هى المحددة الناتجة عن كتابة معاملات x ، y ، z فى المعادلات الثلاث على صورة محددة وتسمى بمحددة المعاملات أما المحددة الأولى المكتوبة فى مقام x فانها تنتج من محددة المعاملات باستبدال معاملات x فى المعادلات الثلاث بمقادير الطرف الأيمن وهى d_1 , d_2 , d_3 كذلك المحددة الثانية المكتوبة فى مقام y فانها تنتج من استبدال معاملات y فى المعادلات الثلاث بالمقادير d_1 , d_2 , d_3 وبالمثل فى المحددة الثالثة المكتوبة فى مقام z فانها تنتج من استبدال معاملات z فى المعادلات

الثلاث بالمقادير d_3 و d_2 ، d_1 ويمكن تعميم هذه الطريقة فى حل المعادلات الآنية الخطية لأى عدد من المجاهيل .

إذا لم تنعدم محددة المعاملات فانه يوجد حل واحد فقط للمعادلات ولكن إذا انعدمت هذه المحددة بينما لم تنعدم محددة واحدة على الأقل من المحددات الثلاث الأولى فانه لايوجد حل محدود للمعادلات وتكون المعادلات المعطاه غير متوافقة .

وإذا انعدمت المحددات الاربع كلها فان المعادلات المعطاه تعتمد خطيا على بعضها أى يمكن استنباط معادلة من المعادلات المعطاه من المعادلتين الباقيتين باضافتهما بتركيب خطى ولايوجد للمعادلات فى هذه الحالة حل واحد بل يوجد عدد لانهائى من الحلول يمكن التعبير عنها بارامتريا كما يتضح من مثال (10)

مثـال (٩)

حل المعادلات الآتية :

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

$$\frac{4}{x} + \frac{6}{y} - \frac{1}{z} = 3$$

$$\frac{8}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 7$$

نضع :

$$X = \frac{1}{x} , Y = \frac{1}{y} , Z = \frac{1}{z}$$

وينتج أن

$$2X - 3Y + Z = 1$$
$$4X + 6Y - Z = 3$$
$$8X + 3Y + 2Z = 7$$

$$\therefore \frac{X}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{Y}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 8 & 7 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{Z}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 8 & 3 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \frac{X}{21} = \frac{Y}{14} = \frac{Z}{42} = \frac{1}{42}$$

$$\therefore X = \frac{1}{2}\,,\ Y = \frac{1}{3}\,,\ Z = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{X} = 2\,,\ y = \frac{1}{Y} = 3\,,\ z = \frac{1}{Z} = 1$$

مثال (١٠)

حل المعادلات

$$x + y + pz - q = 0$$
$$-3x + y + 2z + 1 = 0$$
$$6x + 2y + z - 4 = 0$$

فى الحالات الثلاث الآتية

i) $p = 2\,,\ q = 1$ ii) $p = 1\,,\ q = 2$

iii) $p = 1\,,\ q = 1$

نكتب المعادلات على الصورة

$$\begin{aligned} x + y + pz &= q \\ -3x + y + 2z &= -1 \\ 6x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

محددة المعاملات هي

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & p \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 12p$$

الحالة الأولى : $p = 2 , q = 1$

في هذه الحالة لاتنعدم محددة المعاملات ويكون للمعادلات حل واحد يعطى بعد وضع $p = 2 , q = 1$ من

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{-6} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{0} = \frac{1}{-12}$$

$$\therefore \quad x = \tfrac{1}{2} , \ y = \tfrac{1}{2} , \ z = 0$$

الحالة الثانية : $p = 1 , q = 2$

في هذه الحالة تنعدم محددة المعاملات ويمكن التحقق من أن المحددات في مقام كل من z , y , x لاتنعدم ـ لذلك تكون المعادلات المعطاه غير متوافقة ولا يوجد حل محدود لها . ويمكن التحقق من ذلك بضرب المعادله الأولى في 3

وطرح المعادلة الثانية منها ونحصل على المعادلة $6x + 2y + z = 7$ بينما تعطى المعادلة الثالثة $6x + 2y + z = 4$ لذلك تكون المعادلات غير متوافقة ولايوجد حل محدود لها .

الحالة الثالثة : $p = 1 \, , \, q = 1$

فى هذه الحالة تنعدم محددة المعاملات كذلك يمكن التحقق من أن المحددات الثلاث فى مقام $x \, , \, y \, , \, z$ تنعدم كلها لذلك تكون المعادلات الثلاثة متعمدة خطيا على بعضها فمثلا ثلاثة أمثال المعادلة الأولى مطروحا منها المعادلة الثانية تعطى المعادلة الثالثة لذلك نكتفى بمعادلتين فقط ولتكن المعادلتان الأولى والثانية ويمكن حلها فى $x \, , \, y$ بدلالة z وينتج أن

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 1 & -z & 1 \\ -1 & -2z & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -z \\ -3 & -1 & -2z \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \; x = \tfrac{1}{4}\,(2 + z) \; , \; y = \tfrac{1}{4}\,(2 - 5z)$$

وللتعبير عن الحل بارامتريا نضع $z = 4t$ مثلا ويعطى الحل بارامتريا بدلالة t على الصورة :

$$x = t + \tfrac{1}{2} \, , y = -\,5t + \tfrac{1}{2} \; , \; z = 4t$$

وبذلك يكون المعادلات عدد لانهائى من الحلول بوضع قيما مختلفة للبارامتر t

تمارين

١) أوجد قيمة المحددات الآتية :

$$\begin{vmatrix} 13 & 19 \\ 13 & 16 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} -99 & 97 \\ -97 & 95 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 13 & 15 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} ,$$

$$\begin{vmatrix} 76 & -23 & 53 \\ 103 & 199 & 302 \\ 176 & 177 & 353 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 9 & -7 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

[—7 , 4 , —240 , 0 , 0 , 1936]

٢) إذا علمت أن

$$D(a , b , c) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

اثبت أن

$$\lim_{a \to b} \frac{D}{a - b} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ 2b & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

٣) إذا كانت ω هى أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$$

٤) أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 4\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

٥) أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$$

٦) محدده من الرتبه الرابعة كل عنصر من عناصر قطرها الاساسى يساوى x وكل من العناصر الباقية يساوى y أثبت أن قيمة المحدده تساوى $(x - y)^3 (x + 3y)$

٧) أثبت أن أحد جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 9-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

يساوى 2 وأوجد الجذرين الآخرين

[5 , 17]

٨) إذا كان $a + b + c = 0$ أثبت أن جذور المعادله

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c \\ b & c-x & a \\ c & a & b-x \end{vmatrix} = 0$$

هى :

$$x = 0\ ,\quad x = \pm\sqrt{-3(ab + bc + ca)}$$

٩) أثبت أن $-(a + b + c)$ هو أحد جذور المعادله

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ b & x+c & a \\ c & a & x+b \end{vmatrix} = 0$$

وأوجد الجذرين الآخرين

$$\left[\ \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab}\ \right]$$

١٠) حل المعادله :

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 \\ 2x+5 & 2x+1 & 2x+3 \\ 2x+3 & 2x+5 & 2x+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left[x = -\frac{3}{2}\right]$$

١١) ضع المحدده

$$\begin{vmatrix} 11 & 2 & 19 \\ 17 & 5 & 47 \\ 33 & 6 & 58 \end{vmatrix}$$

فى صورة أبسط ثم أوجد قيمتها

[21]

١٢) أوجد جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2x & 1 \\ x & 3x-2 & 2x \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0$$

[1 , 1 , 2]

١٣) حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$$

حيث ω جذر تكعيبى للواحد الصحيح . اعتبر الحالتين i) ω حقيقية
ii) ω عدد تخيلى مركب

[−3 , 0 , 0 ; 0 , 0 , 0]

١٤) إذا كان l , m هما جذرى المعادلة $ax^2 + 2bx + c = 0$
أثبت أن

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ l^2 & l & 1 \\ m^2 & m & 1 \end{vmatrix} = k\ (ax^2 + 2bx + c)$$

حيث k لاتتوقف على x

١٥) أوجد قيمة a , b بحيث يكون

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ b & x & a \\ a & b & x \end{vmatrix} = x^3 - 18x + 35$$

$[2, 3 \text{ or } 3, 2]$

١٦) أوجد جميع جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c & d \\ a & b-x & c & d \\ a & b & c-x & d \\ a & c & c & d-x \end{vmatrix} = 0$$

$[0, 0, 0, a+b+c+d]$

١٧) أوجد جميع جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} (x+1)^3 & [illegible] & (x+1) & 1 \\ -[illegible] & [illegible] & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} \; [illegible]$$

$[-2, 1, 2]$

١٨) احذف z , y , x من المعادلات الثلاث الآتية :

$$p = \frac{y+z}{x}, \quad q = \frac{z+x}{y}, \quad r = \frac{x+y}{z}$$

$[pqr = p + q + r + 2]$

١٩) أوجد قيمة k حتى تكون المعادلات الآتية متوافقة :

$$(3+k)\,x + 2\,(1+k)\,y + k - 2 = 0$$

$$(2k-3)x + (2-k)y + 3 = 0$$
$$3x + 7y - 1 = 0$$
$$\left[k = 3 \quad \text{or} \quad -\frac{1}{22} \right]$$

٢٠) أثبت أن المعادلات

$$2x + 3y + 4z = 0$$
$$3x + ky + z = 0$$
$$kx + 2y + cz = 0$$

تكون متوافقة لقيم k الحقيقية إذا كان

$$4c^2 - 156c - 439 \geqslant 0$$

٢١) اثبت أن المعادلتين

$$x - y = 2 \quad . \quad 2x + ay = b$$

لا يكون لهما حل واحد فقط فى x ، y إلا إذا كانت $a = -2$ أثبت أنه إذا كانت $a = -2$ فأنه لايمكن حلهما إلا إذا كانت $b = 4$ وفى هذه الحالة أى عندما تكون $a = -2$ ، $b = 4$ فأنه يمكن إيجاد الحل على الصورة :
$x = 2\lambda$, $y = \lambda - 2$ لجميع قيم λ

٢٢) حل باستعمال المحددات المعادلات الآتية

$$3x - 4y + 7z = 6$$
$$3x - 2z = 1$$
$$4x + 2y - 5z = 1$$

$$[\, x = 1 \quad , \quad y = 1 \quad ; \quad z = 1 \,]$$

٢٣) أوجد بأستعمال المحددات قيمة z من المعادلات الآتية

$$\frac{2}{x^3} - \frac{3}{y^3} + \frac{1}{z^3} = 7$$

$$\frac{3}{x^3} + \frac{2}{y^3} + \frac{1}{z^3} = 13$$

$$\frac{5}{x^3} + \frac{7}{y^3} - \frac{2}{z^3} = -4$$

$[\, z = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}\omega \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}\omega^2 \,]$

٢٤) حل المعادلات الآتية عندما تكون :

i) $a = 1 \;,\; b = 0$ ii) $a = b = 1$

iii) $a = 0 \;,\; b = 1$

$$x + y + z + b = 0$$

$$3x + 2y + z = 0$$

$$2x + y + az - 1 = 0$$

[i) $x = 1 , y = -2 , z = 1$; ii) no solution ;

iii) $x = t , y = 1 - 2t , z = t - 2$]

٢٥) أوجد الشرط اللازم لكي تكون للمعادلات :

$$(a - b - c)\,x + 2ay + 2a = 2bx + (b - c - a)\,y + 2b$$

$$= 7cx + 2cy + (c - a - b) = 0$$

حل مشترك . وأثبت أنه إذا تحقق هذا الشرط فأنه يكون للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول المشتركة .

$[\, a + b + c = 0 \,]$

٢٦) أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة لكل مجموعة من مجموعات الدوال الخطية الآتية :

i) $x + 2y + z\ ,\ 2x + y + z\ ,\ x + y + 2z$

ii) $y + \sqrt{2}\,x\ ,\ x + \sqrt{2}\,z\ ,\ \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y - 2z$

iii) $5x - y - z\ ,\ x + 3y + z\ ,\ -2x + 2y + 4z$

[i) $1\ ,\ -1\ ,\ 4\ ,\ x:y:z = 1:1:-2\ ,\ 1:-1:0\ ,\ 1:1:1$

ii) $-1, 2, -3\ ,\ x:y:z = 1:-1:0\ ,\ \sqrt{2}:\sqrt{2}:1, 1:1:-2\sqrt{2}$

iii) $2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ;\ x:y:z = 0:1:-1\ ,\ 1:1:0\ ,\ 1:0:-1$]