الباب السابع

تذبذب الأوتار المشدودة

(Vibrations of stretched wires)

٧ - ١ انتقال الموجات فى الاوتار المشدودة

إذا ثبت وتر من طرفيه بحيث يظل مشدودا ثم جذب جزء منه بالقرب من أحد طرفيه ثم ترك بعد ذلك فان موجة مستعرضة تنتقل فى السلك إلى الطرف الآخر ومن هناك ترتد ثانية الى الطرف الأول وهكذا حتى تنعدم الحركة. وتتوقف سرعة الموجة المنتقلة على الشد (F) وعلى كتلة وحدة الأطوال (m) من السلك . ومن معادلات الأبعاد يمكن اثبات أن سرعة الموجة هى :

$$v = \sqrt{\frac{F}{m}}$$

هكذا :

حيث أن (v) تتوقف على قوة الشد (F) وعلى كتلة وحدة الأطوال (m)

$$\therefore \quad v = k\, f\,(F, m)$$

حيث (k) مقدار ثابت

$$\therefore \quad v = k\, F^{\alpha}\, m^{\beta} \quad \ldots \quad \ldots \qquad (41)$$

وبأخذ أبعاد كل كمية :

$$\therefore \quad LT^{-1} = (MLT^{-2})^{\alpha} \left(\frac{M}{L}\right)^{\beta}$$

وبمساواة قوى (أس) كل بعد :

من قوى M	$\therefore \quad 0 = \alpha + \beta$
من قوى L	$1 = \alpha - \beta$ ،
من قوى T	$-1 = -2\alpha$ ،

$$\therefore \quad \alpha = \tfrac{1}{2} \text{ ، } \beta = -\tfrac{1}{2}$$

وبالتعويض فى المعادلة (٤١)

$$\therefore \; v = k \sqrt{\frac{F}{m}}$$

وقد وجد عمليا أن :

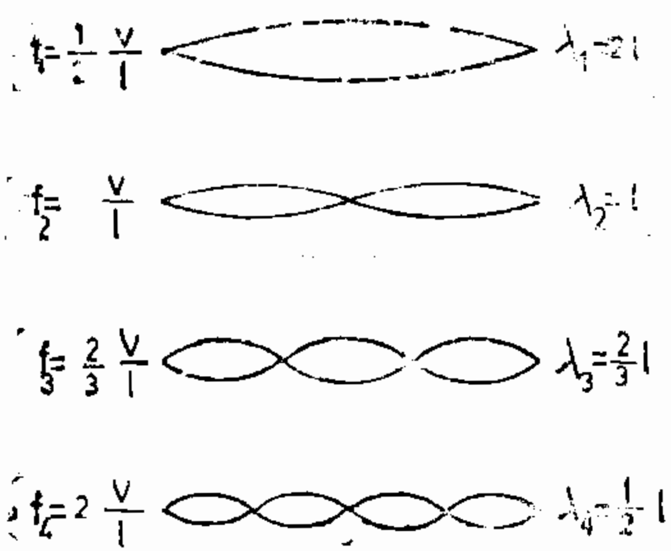
$$k = 1$$

$$\therefore \; v = \sqrt{\frac{F}{m}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (42)$$

أى أن سرعة الموجة المستعرضة التى تنتقل خلال الوتر المشدود تتناسب مع الجذر التربيعى لقوة الشد وعكسيا مع الجذر التربيعى لكتلة وحدة الأطوال من الوتر .

٧ ـ ٢ الموجات المستقرة فى الاوتار :

إذا أحدثنا قطار امستمراً من الموجات فى سلك طويل ، فان كل موجة عند وصولها إلى الطرف المثبت تنعكس و تسير فى الاتجاه المضاد بنفس السرعة ونفس التردد وتتكون من الموجات الساقطة والمنعكسة موجات موقوفه كما فى شكل(٤٣) أى أن أجزاء من الوتر تكاد تكون عديمة الحركة وهى العقد وأجزاء أخرى تتذبذب فى سعة كبيرة وهى البطون وتقع العقد والبطون على التعاقب والمسافة



(شكل ٤٣)

بين أى عقدتين أو بطنين هى نصف طول الموجة ومن الواضح أن الطرفين المثبتين من الوتر يجب أن يكونا عقدتين حيث أنهما لايتحركان. ويمكن أن يتكون بين الطرفين المثبتين عدة عقد أو لايكون هناك عقد على الاطلاق ومعنى ذلك أن طول الموجة يمكن أن يختلف من وضع إلى آخر . وحيث أن عقدتين يجب أن يتكونا عند الطرفين المثبتين فان عددا صحيحا (n) من العقد يتكون

بين الطرفين . وحيث أن المسافة بين عقدتين متتاليتين هى ($\frac{\lambda}{2}$)

$$\therefore \quad \frac{n\lambda}{2} = l$$

حيث (l) طول الوتر .

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{2l}{n}$$

ولكن :

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

$$\therefore \quad f = \frac{vn}{2l}$$

ومن المعادلة (٤٢) :

$$\therefore \quad f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{m}} \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad (41)$$

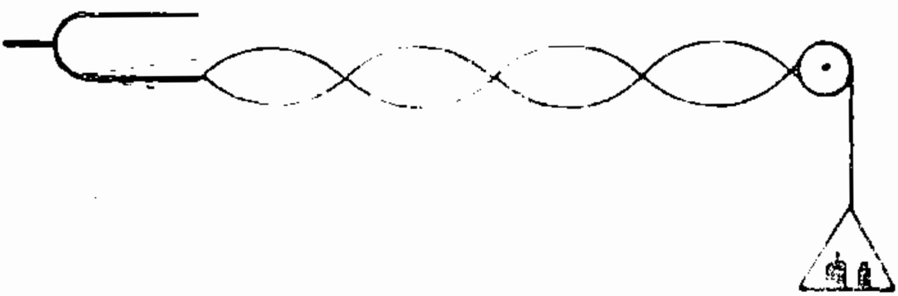
تعطى هذة المعادلة الترددات الطبيعية (natural frequency) للسلك حيث

$$n = 1, 2, 3, \ldots \ldots \ldots$$

وإذا أثرنا على السلك بدفعات تذبذبية ذات تردد يساوى أحد تردداته الطبيعية فان السلك يتذبذب بسعة كبيرة ويقال أنه فى حالة رنين (resonance) مع الذبذبات الواقعة عليه حيث يكون تردد ذبذباته مساويا للتردد الواقع عليه.

ويمكن مشاهدة ذلك بتجربة ميلد (Meldes experiment) كالآتى .

يتصل أحد طرفى سالك طويل بأحد فرعى شوكة رنانة دائمة الذبذبة بفعل مغنطيس كهربى بينما يمر الطرف الآخر كما فى شكل (٤٤) على بكرة ملساء ويتدلى منه ثقل يعمل شدا فى السلك قدره (F) . فعندما تهتز الشوكة



شكل (٤٤)

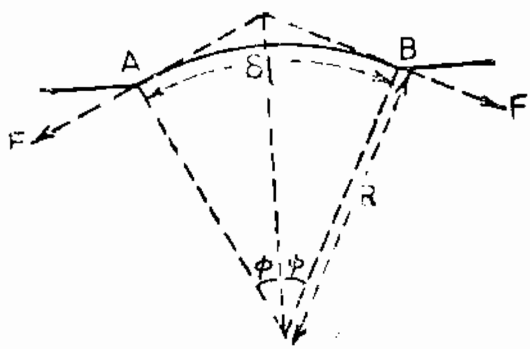
ترسل فى الخيط قطاراً مستمرا من الموجات تتجه نحو البكرة وترتد منها وتحدث موجات موقوفة ذات تردد يساوى تردد الشوكة الرنانة . وبتغيير الشد (F) يمكن اثبات أن :

$$n \sqrt{F} = \text{constant}$$

٧ — ٣ طريقة اخرى لايجاد معادلة سرعة الموجات المستعرضة فى الاوتار المشدودة :

نفرض أن (AB) جزء من وتر مشدود وأنه انحنى عن شكل قوس من دائرة نصف قطرها (R) وأن طول هذا الجزء هو(δl) ويصنع زاوية قدرها (2ϕ) مع المركز (شكل ٤٥) .

$$\therefore 2\phi = \frac{\delta l}{R}$$



شكل (٤٥)

وإذا كانت (F) هى قوة الشد فى الوتر فان الجزء (AB) يقع تحت تأثير قوتين متساويتين قيمة كل منهما (F) وتكون مركبة كل منهما فى اتجاه المركز هى ($F \sin \phi$) ، وإذا كانت (ϕ) صغيرة فان ($\phi = \sin \phi$).

∴ القوة فى اتجاه المركز :

$$= 2F\phi = F\frac{\delta l}{R}$$

وإذا انتقل هذا التقوس خلال الوتر بسرعة قدرها (v) فان القوة التى تحركه هى قوة طاردة مركزية قدرها :

$$\frac{m\,\delta l\,v^2}{R}$$

حيث (m) هى كتلة وحدة الأطوال من الوتر

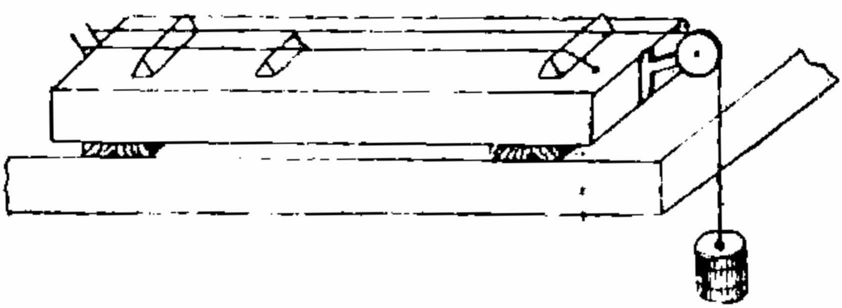
$$\therefore \frac{m\,\delta l\,v^2}{R} = F\frac{\delta l}{R}$$

$$\therefore m v^2 = F$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{F}{m}}$$

٧ — ٤ اثبات قوانين الأوتار عمليا :

يستخدم لإثبات تذبذب الأوتار جهازا يسمى الصونومتر (Sonometer) وهو عبارة عن صندوق خشبي أجوف رقيق الجدار مثبت على سطحه العلوى سلكان رفيعان من الصلب أحدهما مثبت الطرفين والآخر مثبت من طرف واحد وطرفه الثانى يمر فوق بكرة ملساء (شكل ٤٦) ثم ينتهى بحامل يوضع



شكل (٤٦)

به أثقال لشد السلك . ويرتفع السلكان عن سطح الصندوق قليلا بواسطة قنطرتين صغيرتين .

من القانون :

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{m}}$$

∴ عند ثبوت (F ، m) :

$$f\,l = \text{constant}$$

ويمكن إثبات ذلك عمليا على السلك المثبت من طرفيه وذلك بأن نطرق شوكة رنانة معلومة التردد ثم نضع عنقها فوق الصونومتر ونحرك قنطرة تحت الوتر حتى تصدر منه نغمة يتحد ترددها مع الشوكة . يحسب طول الوتر الذى يعطى هذا التردد . وتكرر التجربة عدة مرات مستخدمين عدة شوك معلومة التردد فنجد عمليا أن :

$$f l = \text{constant}$$

ولإثبات أن تردد الوتر يتناسب مع الجذر التربيعى للشد الواقع عليه عند ثبوت الطول وكتلة وحدة الأطوال .

يضبط طول معين (l_1) من السلك المثبت من طرفيـــه بحيث يعطى ترددا (f_1) مساويا لترددشوكة معلومة التردد. يوضع ثقل فى كفة الوترالثانى ويضبط طوله بحيث يعطى نفس التردد السابق وذلك بتنغيمه مع الوتر الأول . تضاف أثقال أخرى فى الكفة ونحافظ على طول الوتر الثانى دون تغير ويحسب تردده (f_2) بتغيير طول الوتر الأول إلى (l_2) حتى يصدر نغمـــة ترددها مساويا لتردد السلك الثانى . ومن القانون :

$$f_2 l_2 = f_1 l_1$$

يمكن تعيين (f_2)

تكرر التجربة باضافة أثقال وفى كل مرة يحسب التردد فنجد أن :

$$\frac{f}{\sqrt{F}} = \text{constant}$$

ولإثبات أن تردد الأوتار يتناسب عكسيا مع الجذر التربيعي لكتلة وحدة الأطوال منها ، تكرر الخطوات السابقة ولكن مع ثبوت الشد والطول وذلك باستخدام أوتار مختلفة القطر أو المادة أو هما معا ، فنجد أن :

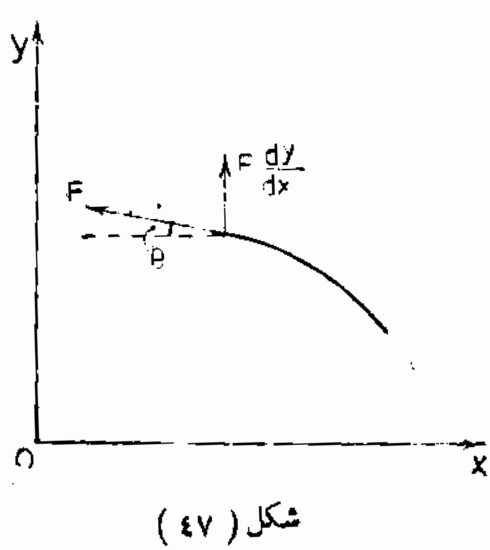
$$f \sqrt{m} = \text{constant}$$

٧ - ٥ القدرة والشدة فى الحركة الموجية

(Power and Intensity in wave motion)

يبين شكل (٤٧) جزءا من وتر مشدود عند الموضع (x) حيث تنتقل خلاله موجه نتيجة لقوة شد قدرها (F). ميل المماس للوتر عند هذا الموضع هو:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$$



شكل (٤٧)

وإذا كانت (θ) صغيرة فان :

$$\tan\theta \simeq \sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{dy}{dx}$$

∴ القوة فى الاتجاه (y) أى القوة المستعرضة هى :

$$F_{trans} = -F\frac{dy}{dx}$$

السرعة المستعرضة لأى جسيم يقع عند (x) نتيجة لاهتزاز الوتر

$$= \frac{dy}{dt}$$

∴ القدرة أو الطاقة المؤثرة على الجسيم فى الثانية = القوة × السرعة

$$\therefore P = \left(-F\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dt}$$

وحيث أن معادلة الإزاحة نتيجة لحركة موجية جيبية هى :

$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

وبالتفاضل :

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -kA\cos(\omega t - kx)$$

$$\therefore -F\frac{dy}{dx} = FkA\cos(\omega t - kx)$$

$$،\ \frac{dy}{dt} = \omega A\cos(\omega t - kx)$$

$$\therefore P = FkA\cos(\omega t - kx) \times \omega A\cos(\omega t - kx)$$

$$\therefore \quad P = Fk\,\omega\,A^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

يلاحظ من هذه المعادلة أن معدل انتقال الطاقة أى القدرة (P) غير ثابت وهذا طبيعى لأن المصدر الأصلى للطاقة متذبذب

متوسط القدرة خلال الزمن الدورى (T) هو :

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} P\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} Fk\,\omega\,A^2 \cos^2(\omega t \quad kx)\,dt$$

$$\therefore \bar{P} = \tfrac{1}{2} A^2 k\omega F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

ولكن اذا كانت (v) هى سرعة انتقال الموجات فى السلك ، (f) تردد الذبذبة فان :

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda f$$

$$\text{،}\ \omega = 2\pi f$$

وبالتعويض فى المعادلة (٤٤)

$$\therefore \bar{P} = \tfrac{1}{2} A^2 \left(\frac{\omega}{v}\right) \omega F$$

$$= \tfrac{1}{2} A^2 (4\pi^2 f^2) \frac{F}{v}$$

$$= 2\pi^2 A^2 f^2 \frac{F}{v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

ولكن :

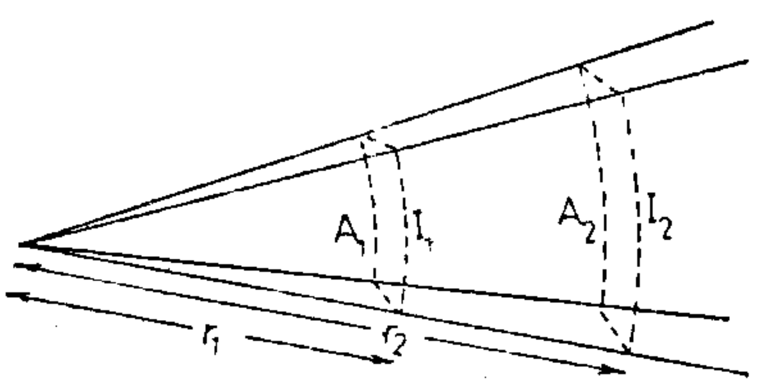
$$v = \sqrt{\frac{F}{m}}$$

حيث (m) هي كتلة وحدة الأطوال من السلك

$$\therefore \quad \bar{P} = 2\pi^2 A^2 f^2 mv$$

ومن ذلك نرى أن معدل انتقال الطاقة يتوقف على مربع سعة الذبذبة وعلى مربع التردد وهذا صحيح بالنسبة لجميع أنواع الموجات .

تعرف شدة الموجة التي تنتقل فى وسط بأنها القدرة التي تخترق وحدة المساحات العمودية على اتجاه انتشار الموجة ، والموجات التى تنتقل فى وسط منها موجات الصوت والضوء . واذا اعتبرنا أن الموجة تنتشر دون أن تفقد من طاقتها شيئا أى لا يحدث لها تخامد (decay) فى شكل (٤٨) حيث تخرج الموجات الكروية من مصدر موجى له قدرة (P) .



شكل (٤٨)

$$\therefore P = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

حيث (I_1 ، I_2) هما الشدة على أبعاد (r_1 ، r_2) على الترتيب :

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

أى أن شدة الموجة المنتشرة تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن المصدر.
وحيث أن الشدة تتناسب مع مربع السعة ، إذن سعة الموجة تتناسب عكسيا مع البعد عن المصدر .

تمارين

(١) يتذبذب وتر مشدود بتردد قدره ٣٠ سيكل/ثانية عندما يصدر النغمة الأساسية الأولى (أو الهرمونية الأولى) فاذا كان طول الوتر ٦٠ سم وكتلة وحدة الأطوال منه هى ٥ر٠ جم / سم .

(ا) أحسب سرعة انتشار الموجة المستعرضة فى الوتر

(ب) أحسب قوة الشد فى الوتر

(ا) حيث أن الوتر يتذبذب بالهرمونية الأولى ، فان بطنا واحدة تتكون عند منتصف السلك بينما يتكون عند نهايتيه المثبتين عقدتين .

$$\therefore \frac{\lambda}{2} = 60$$

$$\therefore \lambda = 120 \text{ cm}$$

وحيث أن :

$$v = f\lambda$$

$$\therefore v = 30 \times 120 = 3600 \text{ cm/sec.}$$

(ب)

$$v = \sqrt{\frac{F}{m}}$$

$$\therefore F = mv^2$$

$$\therefore F = 0.5\,(3600)^2 = 648 \times 10^4 \text{ dyn}$$

(٢) سلك طوله ٢٠٠ سم وكتلته ١٠ جم مشدود بقوة قدرها ١٠^٦ داين أحسب تردد الهرمونية الثانية وسرعة إنتقال الموجات المستعرضة فيه .

(الجواب : ٢٢٫٣٦ / ثانية ، ٤٤٧ سم / ثانية)

(٣) فى تجربة ميلد إذا كان تردد المصدر هو ٢٠ سيكل / ثانية وكتلة وحدة الأطوال من الوتر هى ١٫٥٦ × ١٠^-٤ باوند / قدم وطول الوتر ٢٤ قدم ، أحسب القوى التى تعطى الهرمونات الأولى والثانية والثالثة والرابعة .

حيث أن التردد :

$$f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{m}}$$

$$\therefore F = \frac{4\, l^2 f^2\, m}{n^2}$$

فى الهرمونية الاولى :

$$n = 1$$

$$\therefore F_1 = 4\, l^2 f^2\, m$$

$$= 4\,(24)^2\,(20)^2\,(1.56 \times 10^{-4})$$

$$= 144 \text{ poundal}$$

فى الهرمونية الثانية :

$$n = 2$$

$$\therefore F_2 = \frac{4\, l^2 f^2\, m^1}{4}$$

$$= \frac{F_1}{4} = 36 \text{ poundal}$$

في الهرمونية الثالثة :

$$n = 3$$

$$F_3 = \frac{F_1}{(3)^2} = 16 \text{ poundal}$$

في الهرمونية الرابعة :

$$n = 4$$

$$F_4 = \frac{F_1}{(4)^2} = 9 \text{ poundal}$$

(٤) يتذبذب وتر تبعا للمعادلة :

$$y = 5 \sin \frac{\pi x}{3} \cos 40 \pi t$$

حيث (x ، y) بالسنتمترات ، (t) بالثواني . أوجد السعة والسرعة لموجتين لو ركبتا لأعطتا موجة عصلة تتذبذب تبعا للمعادلة السابقة . ما هي المسافة بين العقد ؟ وما هي سرعة جسيم من الوتر عند الموضع

$$\left(x = 1.5 \text{ cm when } t = \frac{9}{8} \text{ sec.} \right)$$

(الجواب ٢٫٥ سم ، ١٢٠ سم/ثانية ، ٣٫٠ سم ، صفر)