الباب السادس

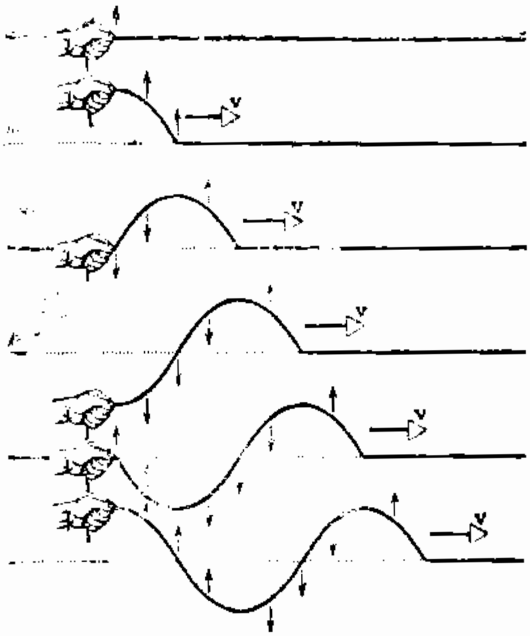
الموجات

٦ — ١ انواع الموجات

إذا أثرت قوة خارجية لحظية فى جسم فان الجزيئات التى تقع تحت التـأثير المباشر للقوة ، تبدأ فى التحرك حركة تذبذبية حول مراكز اتزانهـا ، ثم تنقل منها هذه الحركة إلى مايليها من الجزيئات وهكذا . وتتكون من الحركة المتتالية لهذه الجزيئات دفعة اضطراب (disturbance) تنتقل خلال الجسم . ويتخذ مثل هذا الاضطراب أشكالا متعددة داخل الجسم تبعا لطبيعة الجسم وتبعـا لنوع واتجاه القوى التى تحدث الأضطراب الذى يسمى عادة بالحركة الموجيـة . وأهم الموجات الحادثة نوعان هما :

ا — الموجات المستعرضه (Transverse waves)

إذا كان اتجاه حركة جسيمات المادة الحاملة للموجة عموديا على اتجاه حركة الموجة نفسها فان الموجة تسمى موجة مستعرضة . مثال ذلك حبـــل مثبت من طرف واحد بينما يندفع طرفه الآخر إلى أعلى ثم إلى أسفل فى حركة تذبذبيـة (شكل ٢٥) . فى هذه الحال ينقل الاضطراب خلال الحبل بينما تتذبذب جسيمات الحبل فى حركة توافقية بسيطة فى اتجاه عمودى على اتجاه انتشار الاضطراب .



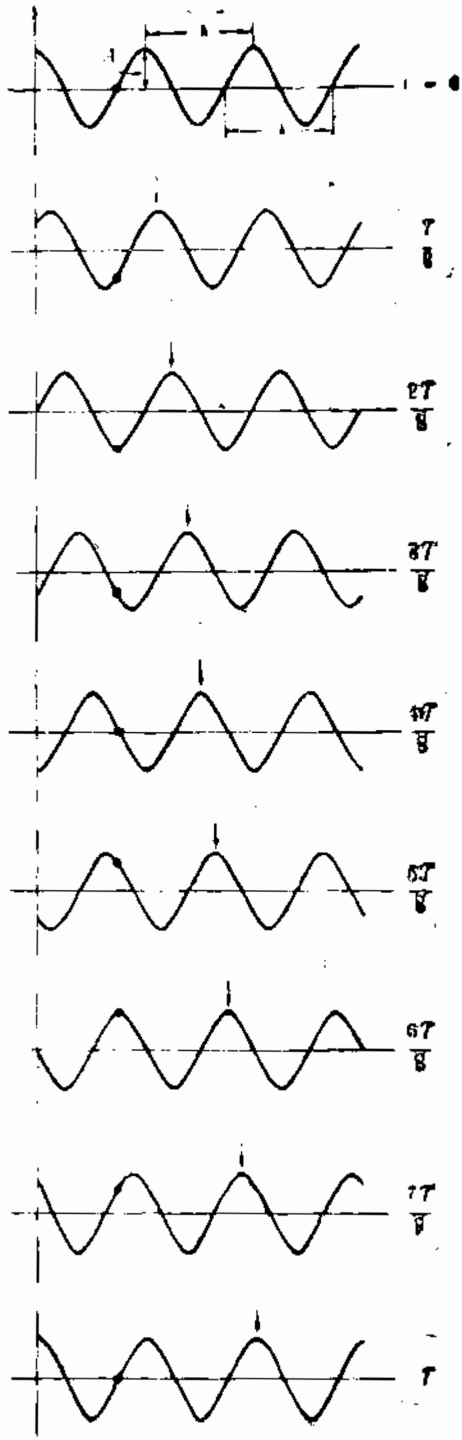
شكل (٢٥)

يوضح شكل (٢٦) قطارا من الموجات يتحرك نحو اليمين وهو يبين كيفية تحرك قمة الموجة على فترات تساوى $\frac{1}{\lambda}$ أ، من الدورى كما يدل عليها السهم كما تبين البقعة السوداء كيفية تذبذب الجسيم حول موضع اتزانه عموديا على اتجاه حركة الموجة . المسافة بين قمتين متتاليتين تسمى بطول الموجة (λ) وهى ايضا المسافة بين أى نقطتان تتذبذبان بنفس الطور .

سرعة انتشار الموجة :

$$v = f\,\lambda$$

ومن أمثلة الموجات المستعرضة موجات الضوء وهى موجات كرومغناطيسية

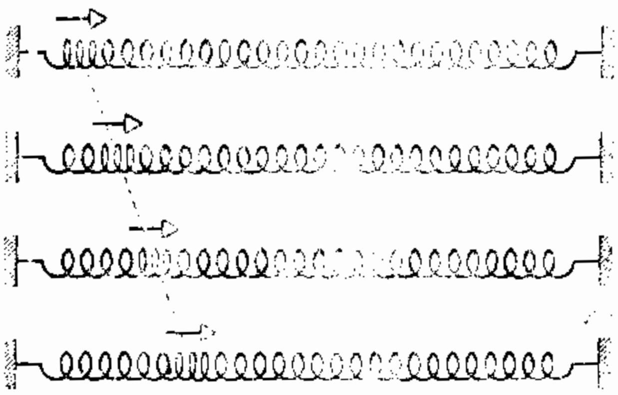


شكل (٢٦)

فيها المجال المغناطيسى والكهربى عموديان على إتجاه انتشار الموجه .

ب ـ الموجات الطوليه (Longitudinal waves)

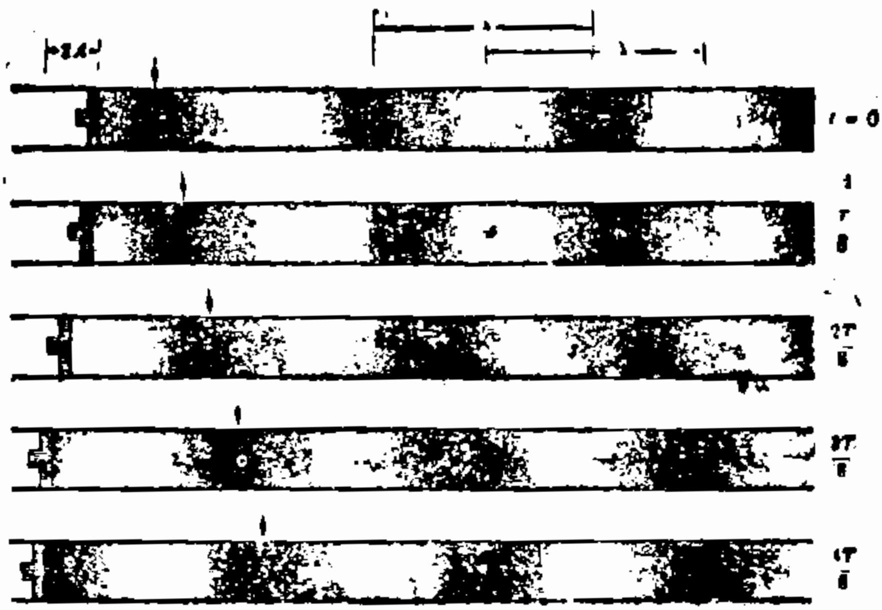
وفيها تتذبذب جسيمات المادة فى اتجاه انتشار الموجة مثال ذلك تذبذب حلقات الحلزون فى اتجاه حركة الموجة (شكل ٢٧) .



شكل (٢٧)

ومن أمثلة هذه الموجات موجات الصوت .

نفرض أن لدينا أنبوبة مملوءة بأى غاز وأن المكبس عند الطرف الأيسر من الأنبوبة (شكل ٢٨) يتحرك يمينا ويسارا حركة توافقية بسيطة ، فنلاحظ تكون مناطق تضاغط يعقبها مناطق تخلخل وأن قطاراً من الموجات الطولية يتحرك إلى اليمين كما يتضح ذلك من مواضع السهم وأن حركة أى جسيم مثل البقعة السوداء تكون حركة توافقية بسيطة فى اتجاه انتقال الموجة وأن طول الموجة هو المسافة بين مركزى تضاغطين أو تخلخلين متتاليين .



شكل (٢٨)

٦ ـ ٢ معادلات حركة الموجة :

إذا تحركت موجة فى أى وسط فان جميع الجسيمات الحاملة للموجة تتذبذب بنفس الحركة التوافقية البسيطة ويكون لها نفس السعة ونفس التردد ولكنها تختلف فى الطور .

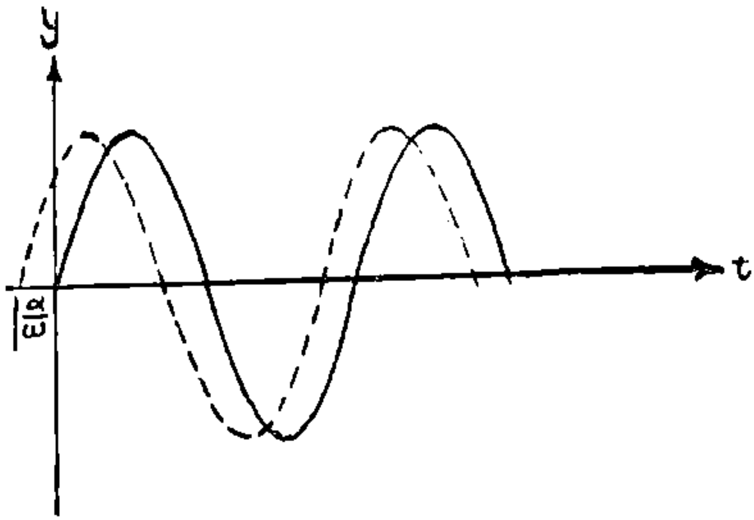
نفرض أن (y) هى الإزاحة لجسيم يقع عند نقطة الأصل

$$\therefore \quad y = A \sin \omega t$$

أما الإزاحة لاى جسيم آخر على يمين أو يسار الجسيم ويبعد عنه مسافة قدرها (x) فهى :

$$y = A \sin (\omega t \pm \alpha) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (24)$$

حيث (α) هى فرق الطور فى ذبذبة الجسيمين .



شكل (٢٩)

ولكن (α) تتناسب مع البعد (x)

$$\therefore \quad \alpha = kx \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (25)$$

حيث (k) مقدار ثابت .

أى جسيم يبعد عن نقطة الأصل بمسافة تساوى طول الموجة (λ) فانه يتبع نفس ذبذبة الجسيم الموجود عند نقطة الأصل ويختلف عنه فى الطور بمقدار ($\alpha = 2\pi$)

وبالتعويض بذلك فى المعادلة (٢٥) .

$$\therefore \quad 2\pi = k\lambda$$

$$\therefore \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ولـكن :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

حيث (f) هو التردد ، (T) الزمن الدورى

$$\therefore\ y = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} \pm \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

وبالتعويض فى المعادلة (٢٤) :

$$\therefore\ y = A \sin\left(\omega t \pm \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

$$\therefore\ y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt \pm x) \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

لأن :

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

حيث (v) هى سرعة انتشار الموجة .

فاذا كان اتجاه انتشار الموجة هو فى الاتجاه الموجب من (x)

$$\therefore\ y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

تعطى هذه المعادلة ازاحة جسيم عند أى زمن (t) حيث (x) هو بعد الجسيم عن نقطة الأصل .

بتفاضل المعادلة (٢٨) بالنسبة إلى x

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \ldots (29)$$

وبتفاضل المعادلة (٢٨) بالنسبة إلى (t)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = A\frac{2\pi v}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \ldots (30)$$

وبمقارنة المعادلتين (٢٩ ، ٣٠)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = -v\frac{dy}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots (31)$$

ولكن ($\frac{dy}{dt}$) هي سرعة الجسيم الذي يبعد عن نقطة الأصل بمسافة (x) ، (v) هي سرعة انتشار الموجة ، ($\frac{dy}{dx}$) هو ميل المماس للموجة على بعد (x) من نقطة الأصل .

∴ سرعة جسيم يبعد عن نقطة الأصل بمسافة (x)

= سرعة انتشار الموجة × ميل مماس الموجة على بعد (x) من نقطة الأصل

وبتفاضل المعادلة (٢٩) مرة أخرى :

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -A\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \ldots (32)$$

وبتفاضل المعادلة (٣٠) مرة أخرى كذلك

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -A\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \ldots (33)$$

وبمقارنة المعادلتين (٣٢ ، ٣٣)

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لحركة الموجة ، وأى معادلة من هـذا القبيل تمثل حركة موجة سرعتها هو جـذر معـامل $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

٦ ـ ٣ محصلة عدة حركات توافقيه بسيطه :

١ ـ محصلة موجتين مختلفتين فى السعة احداهما جيبية والاخرى جيب تمام

نفرض أن معادلة الأولى $y_1 = A \sin \omega t$

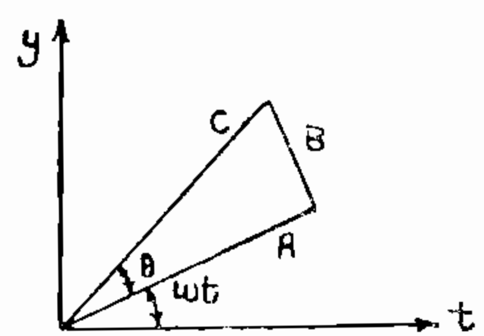
ومعادلة الثانية $y_2 = B \cos \omega t$

المحصلة هى مجموعهم أى :

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

نفرض أنها :

$$y = C \sin (\omega t + \theta)$$



شكل (٣٠)

$$= C \sin \omega t \cos \theta + C \sin \theta \cos \omega t$$

وبمقارنة المعادلتين :

$$\therefore \quad C \cos \theta = A \quad , \quad C \sin \theta = B$$

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{B}{A}$$

أى أن المحصلة هى $C \sin (\omega t + \theta)$

حيث السعة هى $C = \sqrt{A^2 + B^2}$

وفرق الطور هو θ حيث

$$\tan \theta = \frac{B}{A}$$

٢ — محصلة موجتين جيبيتين متحدتين فى التردد ومختلفتين فى السعة والطور.

نفرض أن معادلة الموجة الأولى هى $y_1 = A \sin \omega t$

معادلة الموجة الثانية هى $y_2 = B \sin (\omega t + \alpha)$

المحصلة هى :

$$y = A \sin \omega t + B \sin (\omega t + \alpha) \qquad (35)$$

نفرض أنها :

$$y = C \sin (\omega t + \beta)$$

$$= C \sin \omega t \cos \beta + C \cos \omega t \sin \beta \qquad (36)$$

يمكن كتابة المعادلة (٣٥) هكذا :

$$y = A \sin \omega t + B \sin \omega t \cos \alpha + B \cos \omega t \sin \alpha$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٣٠)

$$\therefore \quad A + B \cos \alpha = C \cos \beta$$

$$B \sin \alpha = C \sin \beta$$

$$\therefore \quad C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2 AB \cos \alpha}$$

وهى سعة الموجة المحصلة

فرق الطور بالنسبة لها هو β حيث

$$\tan \beta = \frac{B \sin \alpha}{A + B \cos \alpha}$$

وقد سبق أن درسنا هذه الحالة بيانيا فى بند ٢ — ٩ صفحة (٢٥) .

٣ — محصلة موجتين جيبيتين مختلفتين فى السعة والتردد والطور .

نفرض أن معادلة الموجة الأولى هى

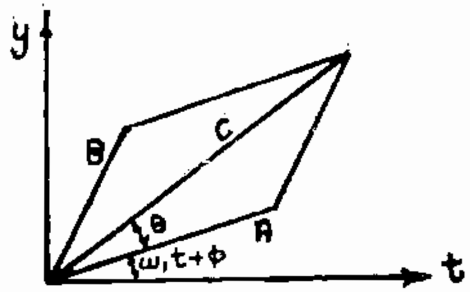
$$y_1 = A \sin (\omega_1 t + \phi)$$

ومعادلة الموجة الثانية هى

$$y_2 = B \sin (\omega_2 t + \psi)$$

نفرض أن المحصلة هى :

$$C \sin (\omega_1 t + \phi + \theta)$$



شكل (٣١)

$$\therefore C \sin(\omega_1 t + \phi + \theta) = A \sin(\omega_1 t + \phi) + B \sin(\omega_2 t + \psi)$$

$$C \cos(\omega_1 t + \phi + \theta) = A \cos(\omega_1 t + \phi) + B \cos(\omega_2 t + \psi)$$

وبالتربيع والجمع

$$\therefore C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\phi - \psi)]$$

$$\tan(\omega_1 + \phi + \theta) = \frac{A \sin(\omega_1 t + \phi) + B \sin(\omega_2 t + \psi)}{A \cos(\omega_1 t + \phi) + B \cos(\omega_2 t + \psi)}$$

واضح أن السعة C تابع للزمن وأن المحصلة ليست توافقية ولكنها دورية .

٦ - ٤ تداخل الامواج (Interference of waves)

نفرض وجود موجتين لها نفس التردد والسعة وتتحركان بنفس السرعة وفى نفس الاتجاه $(+x)$ ولكنهما يختلفان فى الطور بمقدار (ϕ)

معادلة الموجة الأولى هى :

$$y_1 = A \sin(\omega t - kx) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (37)$$

ومعادلة الموجة الأخرى

$$y_2 = A \sin(\omega t - kx + \phi)$$

يمكن كتابة المعادلة الثانية هكذا :

$$y_2 = A \sin\left[\omega t - k\left(x - \frac{\phi}{k}\right)\right] \quad \dots \dots \dots \quad (38)$$

أو

$$y_2 = A \sin\left[\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right) - kx\right] \quad \dots \dots \dots \quad (39)$$

ومن المعادلتين (٣٧ ، ٣٨) يتضح أن الموجتين يفترقان عن بعضها فى أى لحظة (t) بمسافة قدرها $\left(\frac{\phi}{k}\right)$ فى إتجاه الحركة (x) . ومن المعادلتين (٣٧ ، ٣٩) يتضح أن الموجتين عند الموضـــع (x) يعطى كلا منها حركة توافقية بسيطة باختلاف زمنى قدره $\left(\frac{\phi}{\omega}\right)$.

محصلة الموجتين هى :

$$y = y_1 + y_2$$

$$= \left[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx + \phi)\right]$$

ولكن من نظريات حساب المثلثات :

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \tfrac{1}{2}(a + b) \cos \tfrac{1}{2}(a - b)$$

$$\therefore y = A\left[2 \sin\left(\omega t - kx + \frac{\phi}{2}\right) \cos \frac{\phi}{2}\right]$$

$$= 2\,A\,\cos\frac{\phi}{2}\,\sin\left(\omega t - kx + \frac{\phi}{2}\right)$$

وهى معادلة موجة لها نفس تردد الموجات الاصلية ولكن سعتها

$$= 2\,A\,\cos\frac{\phi}{2}$$

وإذا كانت (ϕ) صغيرة جدا فان :

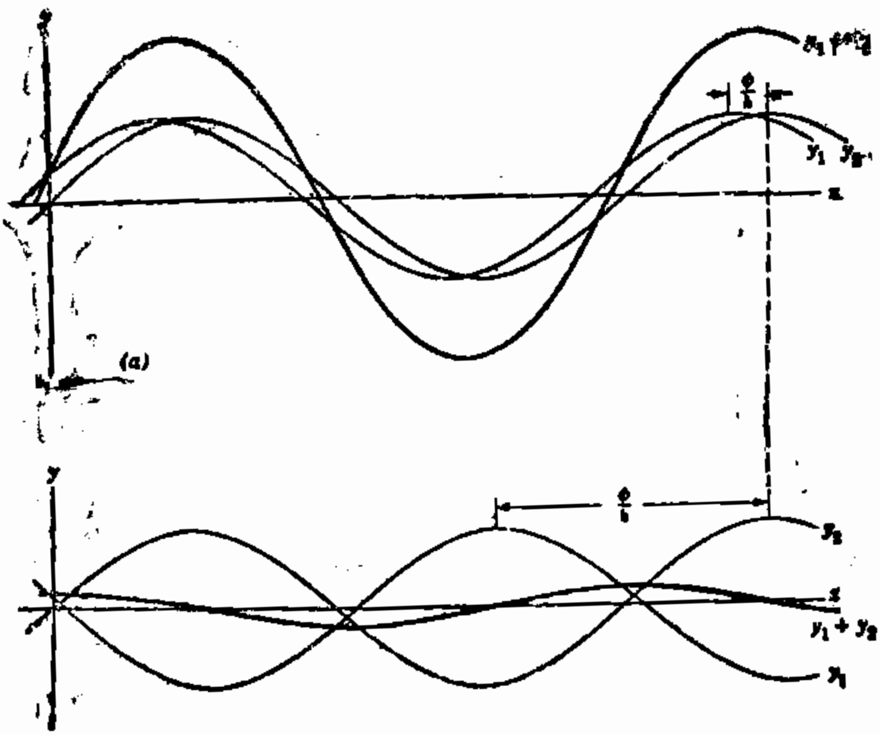
$$\cos\frac{\phi}{2} \simeq 1$$

وتكون السعة $\simeq$ 2A أى ضعف السعة الأصلية تقريبا . وإذا كانت ϕ = صفر فان السعة تكون ضعف السعة الأصليه وتكون الموجتين متحدتين فى الطور وتنطبق كل منها على الأخرى ، أى أن الموجتين تقويان بعضها ويسمى بالتداخل البناء (constructive) .

واذا كانت (ϕ = ١٨٠°) فان السعة المحصلة تصبح صفرا وتقع قمة إحداهما فوق قاع الأخرى . أى أن الموجتين تهدمان بعضها ، ويسمى التداخل فى هذه الحالة بتداخل الهدم (destructive) .

يوضح شكل (٣٢ - a) قطارين من الموجات تختلفان فى الطور بمقدار صغير (ϕ) كما يوضح شكل (٣٢ — b) قطارين آخرين من الموجات ولكن باختلاف فى الطور مقداره (ϕ = ١٨٠) وفى كل منها تمثل المحصلة بالخط الثقيـــل . ومن المعلوم أن الازاحة المحصلة (y) عند أى بعد (x) هى المجموع الجبرى للازاحتين عند نفس البعد وأن الموجة المحصلة هى موجة جيبية (sine wave) مثل الموجتين الأصليتين .

حيث أن فرق المسار بين موجتين متداخلتين هو :



شكل (٣٢)

$$\frac{\phi}{k} = \left(\frac{\phi}{2\pi}\right)\lambda$$

فان التداخل يكون هداما إذا كان فرق المسار

$$\frac{\lambda}{2}\ ,\ \frac{3\lambda}{2}\ ,\ \frac{5\lambda}{2}\ ,\ \ldots\ldots$$

أى إذا كانت (ϕ)

$$\pi\ ،\ 3\pi\ ،\ 5\pi\ ،\ \ldots$$

أما إذا كان فرق المسار :

$$0\ ،\ \lambda\ ،\ 2\lambda\ ،\ 3\lambda\ ،\ \ldots$$

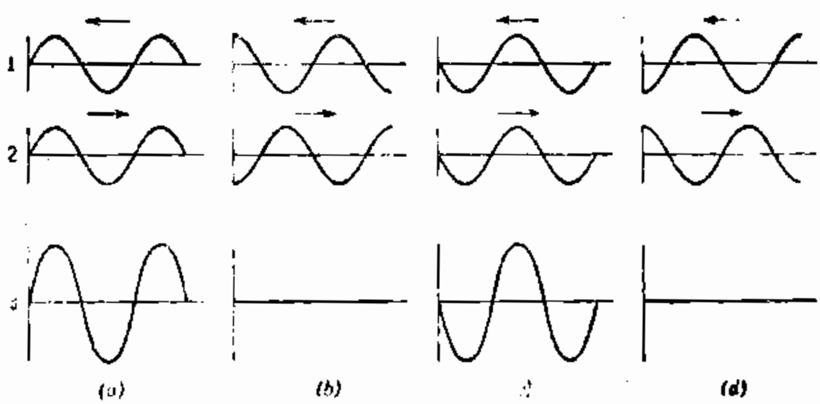
أى إذا كانت (ϕ)

$$0\ ،\ 2\pi\ ،\ 4\pi\ ،\ \ldots$$

فان التداخل يكون بناءاً .

٦ ـ ٥ الامواج الساكنة (المستقرة)

إذا تحركت موجة فى وسط ثم تصادمت مع أى حاجز فانها ترتد فى الاتجاه المعاكس وينتج عن ذلك تواجد موجتين متحدتين فى التردد والسرعة والسعة ويحدث بينهما تداخل ويكون لهما محصله . فاذا كانت المسافة بين المصدر والحائل مناسبة تكونت بينهما أمواج موقوفة أو ساكنة . يوضح شكل (٣٣ - ١) قطـــارا من الموجات يصطدم بحاجز على فترات تساوى $\frac{1}{4}$ الزمن الدورى للموجة ويوضـــح شكل (٣٢ - ٢) قطار الموجات المنعكسة



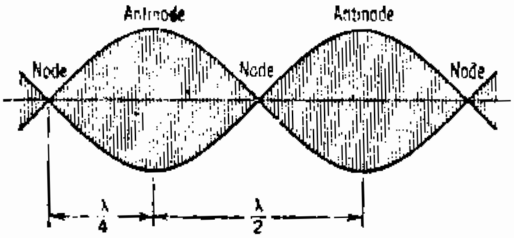
شكل (٣٣)

ويلاحظ أنها ترتد على فترات تساوى $\frac{1}{4}$ الزمن الدورى ولهـــا نفس السعة والسرعة والتردد أما شكل (٢٢ — ٣) فهو يوضح محصلة الموجتين ومنه نرى أن الموجتين تقويان بعضهما عند (c , a) حيث سعة الموجة المحصلة يساوى ضعف سعة الموجة الأصلية . أما عند (d , b) فان الموجتين تهدمان بعضهما ولايتذبذب الوسط نتيجة لذلك .

وكلما تتابعت الموجات الساقطة والمنعكسة كلما تكرر الشكل (a,b,c,d)

الذى يسمى بالموجات المستقرة أو الساكنة لأن شكل الموجة فيها ثابت لا ينتقل يمينا أو يساراً.

ويوضح شكل (٣٤) منظرا لجزء من موجة مستقرة ناتجة من اهتزاز خيط مشدود . وهو يبين نقطاً لا يتذبذب عندها الوسط وتسمى هذه النقط



شكل (٣٤)

عقد (nodes) ونقطا يكون فيها التذبذب أوسع ما يمكن وتسمى بطون (antinodes) ونلاحظ أن المسافة بين أى بطنين أو عقدتين متتاليتين تساوى نصف طول موجة .

يمكن ايجاد معادلة الموجة المستقرة بجمع ازاحتى موجتين لها نفس السعة والتردد والسرعة وتتحركان فى اتجاهين متضادين .

فاذا كانت معادلة الموجة الأولى هى :

$$y_1 = A \sin (\omega t - kx)$$

فان معادلة الموجة الثانيه التى تتحرك فى عكس اتجاه الموجة الاولى هى :

$$y_2 = - A \sin (\omega t + kx)$$

$$\therefore \; y_1 + y_2 = A [\sin (\omega t - kx) - \sin (\omega t + kx)]$$

ولكن من نظريات حساب المثلثات ،

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \tfrac{1}{2} (a-b) \cos \tfrac{1}{2} (a+b)$$

$$\therefore \quad y_1 + y_2 = - [2A \cos \omega t] \sin kx$$

∴ معادلة الموجة المستقرة هى :

$$y = - [2A \cos \omega t] \sin kx = - (2A \sin kx) \cos \omega t$$

ويلاحظ أن أى جسيم على بعد معين (x) يتذبذب فى حركة توافقية بسيطة فى أى وقت ، وأن جميع الجسيمات لها نفس التردد . وتختلف السعة من جسيم إلى آخر تبعا لبعد الجسيم عن نقطة الأصل إذ أن المعادلة :

$$y = - (2A \sin kx) \cos \omega t$$

تمثل حركة موجة جيب تمام (cosine wave) وسعة الذبذبة فيها هى :

$$2 A \sin kx$$

وهى تختلف باختلاف البعد (x) وتقع أكبر سعة عند

$$kx = \frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2} ، \frac{5\pi}{2} \quad \ldots ،$$

أى عند

$$x = \frac{\lambda}{4} ، \frac{3\lambda}{4} ، \frac{5\lambda}{4} ، \quad \ldots .$$

لأن :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

أى أن البطون تقع على أبعاد $\frac{\lambda}{4}$ ، $\frac{3\lambda}{4}$ ، $\frac{5\lambda}{4}$ ، . . . من نقطة الاصل وتكون السعة أقل مايمكن عند :

$$kx = \pi \text{ ، } 2\pi \text{ ، } 3\pi \text{ ، }$$

أى عند :

$$x = \frac{\lambda}{2} \text{ ، } \lambda \text{ ، } \frac{3\lambda}{2} \text{ ، } 2\lambda \quad . \;.\; .$$

وهى أبعاد العقد عن نقطة الاصل .

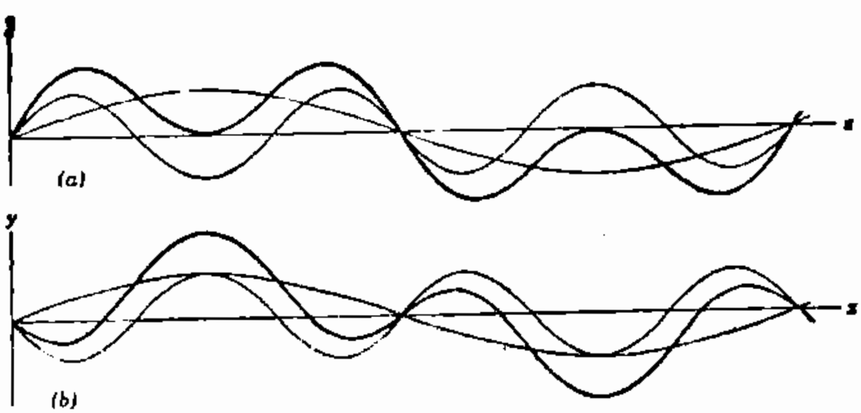
وتختلف الموجات المستقرة عن الموجات المتحركة فى أن سعة الذبذبة فى الموجات المستقرة متغيرة حسب موضع الجسيم بينما السعة فى الموجات المتحركة لا تتغير بتغير موضع الجسيم .

٦ – ٦ الموجات المعقدة (Complex waves)

كل ماتقدم من موجات كانت موجات توافقية بسيطة . تمثل فيها الازاحات عند أى فترة بمنحنى جيبى (sine wave). وقد درسنا كيف أن عددا من الموجات الجيبية التى لها نفس التردد والسرعة ولكنها تختلف فى الطور يكون لها محصله من نفس النوع ، أى موجه جيبية مثل الموجات الاصليه .

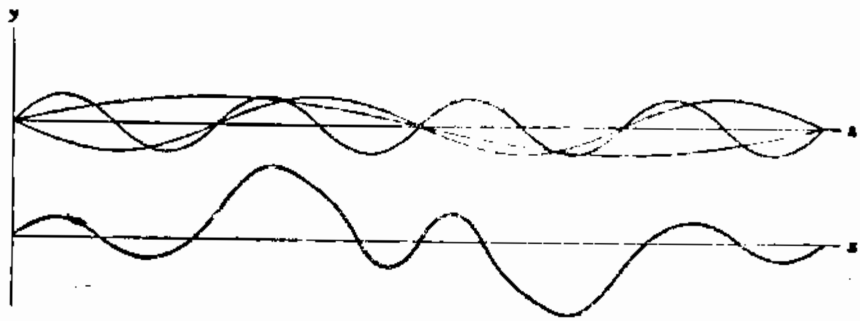
أما إذا اختلفت الموجات فى التردد فان المحصلة تكون موجة معقدة ، لاتتحرك فيها الجسيمات حركة توافقية بسيطة ولاتكون الموجة موجة جيبية :

يوضح شكل (٣٥ — a) محصلة موجتين لهما نفس السعة وتختلفان فى التردد بنسبة ٣ : ١ كما يوضح شكل (٣٥ — b) محصلة نفس الموجتين عندما تختلفان فى الطور ومنه يتضح أن المحصلة تختلف عن الأولى :



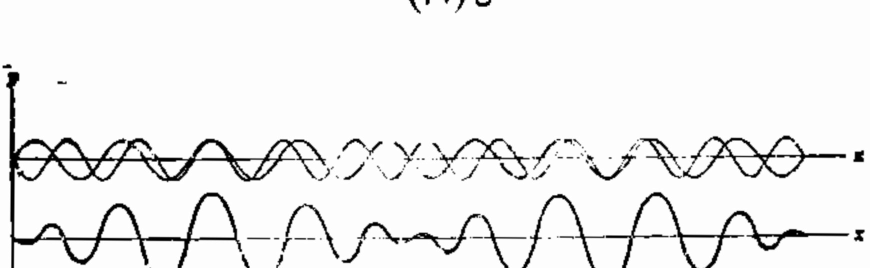
شكل (٣٥)

أما شكل (٣٦) فهو يوضح محصله ثلاث موجات مختلفة فى التردد والسعة والطور وهى شبيهة بالموجات الصادرة من الآلات الموسيقيه : كما يوضح شكل (٣٧) محصله موجتين أحداهما ذات تردد مرتفع جـــدا والأخرى ذات تردد منخفض جدا ، فكثيرا ما يتطلب فى الاتصالات اللاسلكية أن تنقل المعلومات ذات التردد المنخفض إلى مسافات بعيدة عن طريق تحميلها على اشارات أخرى ذات تردد عال .



شكل (٣٦)

شكل (٣٧)



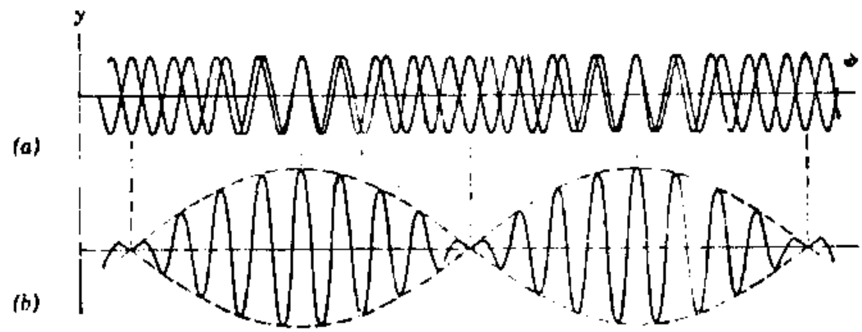
شكل (٣٨)

ويوضح شكل (٣٨) محصلة موجتين لهما نفس التردد تقريبا . ويتبين أن المحصلة تتكون من مجموعات تعطي كما في الصوت مايسمى بالضربات (Beats) .

فى الأشكال السابقة حصلنا على المحصلة بجمع الازاحات الناتجة من الموجات الأصلية والخطوط الثقيلة تبين الموجات المحصلة .

٦ ـ ٧ الضربات (Beats)

نفرض جسيما فى وسط يتذبذب تحت تأثير موجتين متحـــدتين فى السعة مختلفتين قليلا فى التردد وأن شكل (٣٩ – a) يبين العلاقة بين إزاحة الجسيم والزمن لكل موجة على حدة . شكل (٣٩ — b) يوضح المحصلة وهى مجموع



شكل (٣٩)

الازاحتين عند كل فترة . ويلاحظ أن سعة الموجة المحصلة غير ثابت بل تتغير مع الزمن .

نفرض أن أزاحة أى جسيم عند أى زمن (t) هى (y_1) نتيجة تحرك موجة ذات تردد (f) . فتكون معادله حركة الجسيم هى :

$$y_1 = A \sin 2\pi f_1 t$$

حيث (A) هى سعة الذبذبة ،

وإذا كانت إزاحة الجسيم نفسه عند نفس الزمن هى (y_2) نتيجة تحرك موجة أخرى ترددها (f_2) حيث (f_1 ، f_2) لا تختلفان كثيرا وأن الموجتين لها نفس السعة :

$$\therefore \quad y_2 = A \sin 2\pi f_2 t$$

∴ محصلة الإزاحة

$$y = y_1 + y_2$$

$$= A \sin 2\pi f_1 t + A \sin 2\pi f_2 t$$

$$= 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) t \times \sin 2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) t$$

$$\therefore \quad y = a \sin 2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right) t$$

وهى تمثل ذبذبة دورية سعتها :

$$a = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{1}\right) t$$

وترددها :

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

أى متوسط تردد الموجتين الأصليتين

ويلاحظ أن السعة تتغير مع الزمن (t)

وأكبر قيمة للسعة هى (2A) عندما

$$\cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) t = \pm 1$$

أى عندما

$$\pi (f_1 - f_2) t = k \pi$$

حيث :

$$k = 0 . 1 , 2 , 3 , ..$$

أن عندما

$$t = \frac{0}{f_1 - f_2} , \frac{1}{f_1 - f_2} , \frac{2}{f_1 - f_2} , \ldots$$

الفترة الزمنية بين أكبر سعتين متتاليتين هى :

$$\frac{1}{f_1 - f_2}$$

∴ تردد السعة الكبرى هو $(f_1 - f_2)$

أما أصغر قيمة للسعة فهى صفر عندما

$$\cos 2 \pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) t = 0$$

أى عندما

$$\pi (f_1 - f_2) t = k \pi + \frac{\pi}{2}$$

حيث :

$$k = 0 , 1 , 2 , 3$$

أى عندما :

$$t = \frac{k}{f_1 - f_2} + \frac{1}{2(f_1 - f_2)}$$

$$= \frac{1}{2(f_1 - f_2)}, \frac{3}{2(f_1 - f_2)}, \frac{5}{2(f_1 - f_2)} \dots$$

∴ الفترة الزمنية بين أصغر سعتين متتاليتين هى :

$$\frac{1}{f_1 - f_2}$$

وتردد السعة الصغرى هو $(f_1 - f_2)$

وحيث أن الضربة الكاملة تتكون من سعة كبرى واحدة وسعة صغرى واحدة .

∴ عدد الضربات فى الثانية $= f_1 - f_2$

من ذلك نرى أن الموجة المحصلة هى موجة حركة توافقية بسيطة ترددها هو متوسط تردد الحركتين الأصليتين وسعتها تتغير بين مجموع السعتين ، صفر ، تردد قدره الفرق بين الترددين الأصليين .

وفى الصوت لا يمكن الأذن أن تميز بين ضربات نغمتين لها تردد يزيد عن ٧ ضربات فى الثانية .

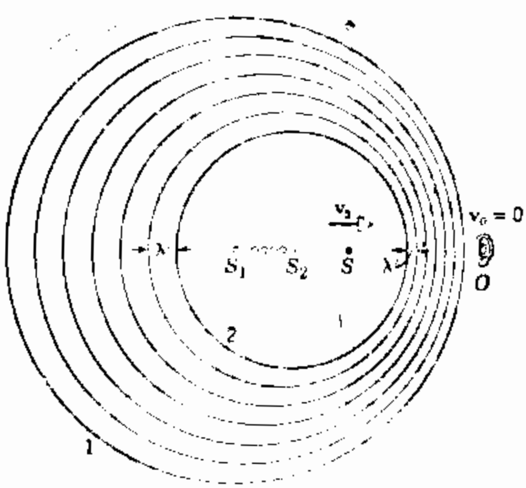
٦ — ٨ **ظاهرة دوبلر** (Doppler effect)

تبحث ظاهرة دوبلر فى تغيير تردد النغمة التى يصدرها مصدر متحرك بالنسبة إلى شخص مستمع . وسنبحث فى ذلك ثلاث حالات :

(١) عندما يكون المصدر متحركا والمستمع ساكنا :

إذا استمع شخص لمصدر صوتى يقترب منه بسرعة ، يجد أن تردد النغمة التى يسمعها هى أعلى مما لو كان المصدر ثابتا مكانه . وفى حالة ما إذا كان المصدر مبتعدا ينخفض تردد النغمة، والأمثلة على ذلك عديدة ربما كان أوضحها صفير قاطرة تمر بسرعة أمام المستمع ، عندئذ يحس المستمع انخفاضا فجائيا فى تردد الصفير وقت مرور القاطرة أمامه .

ويرجع سبب هذا التغير فى تردد النغمة إلى أن الموجات الصوتية التى يخرجها المصدر المتحرك تصبح أكثر إزدحاما أمامه فى حين تصبح أقل إزدحاما خلفه . ومعنى ذلك أن طول الموجة الصوتية أمام المصدر يصبح أقل من حقيقته . أما خلف المصدر فيصبح طول الموجه أطول . لذلك فان المستمع الذى يتحرك المصدر نحوه ، يستمع نغمة ذات تردد أعلى من حقيقتها ، فاذا ماتعداه المصدر فانه يسمع نغمة ذات تردد أقل .



شكل (٤٠)

نفرض أن (S_1) هو موضع المصدر (S) عند زمن معين وأن جبهة الموجة (١) (شكل ٤٠) هي الجبهة الصادرة منه عندما كان عند (S_1) ، (٢) هي الجبهة عندما كان عند (S_2) وأن المصدر يتحرك بسرعة قدرها (v_s) وأن المستمع (O) ساكنا وأن سرعة الصوت هي (v) .

في هذه الحالة تتزاحم الموجات أمام المصدر ويقل طول الموجة . فاذا كانت (f) هي التردد الحقيقي للمصدر ، فانه في خلال ثانية واحدة تكون عدد الموجات (f) التي يصدرها المصدر شاغلة للمسافة ($v - v_s$) بدلا من (v) أي أن طول الموجة يقل ويصبح :

$$\lambda' = \frac{v - v_s}{f}$$

∴ التردد الظاهري للصوت هو :

$$f' = \frac{v}{\lambda'}$$

$$\therefore \; f = \left(\frac{v}{v - v_s} \right) f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

أي أن التردد الظاهري أعلى من التردد الحقيقي .

أما إذا كان المصدر متحركا بعيداً عن المستمع فان الموجات تتخلخل خلف المصدر حيث تشغل مسافه قدرها ($v + v_s$) في الثانية الواحدة .

أي أن طول الموجة يزداد ويصبح :

$$\lambda' = \frac{v + v_s}{f}$$

∴ التردد الظاهرى للصوت فى هذه الحالة هو :

$$f' = \frac{v}{\lambda'}$$

$$\therefore \; f' = \left(\frac{v}{v + v_s} \right) f$$

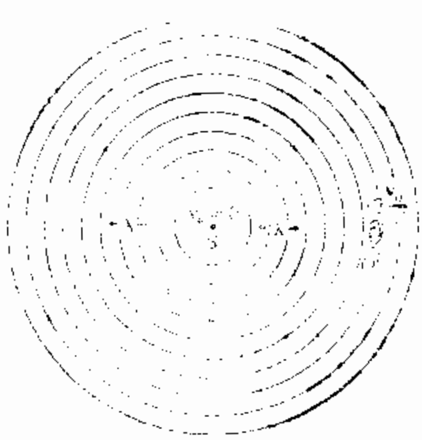
أى أن التردد الظاهرى يقل عن التردد الحقيقى .

وإذا تكون العلاقة بين التردد الظاهرى والتردد الحقيقى لنغمة متحركة بعيداً أو صوب مستمع ساكن ، على الترتيب هى :

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_s} \right)$$

(ب) عندما يكون المصدر ساكنا والمستمع متحركا :

فى هذه الحالة يستقبل المستمع فى الثانية موجات أكثر مما لو كان هو والمصدر ساكنين وأن عدد الموجات الزائدة التى يستقبلها فى الثانية تكون شاغلة للمسافة التى يتحركها فى الثانيـــة الواحدة إذا كان المستمع متجها نحو المصدر (شكل ٤١) .



شكل (٤١)

أى أن الزيادة فى عدد الموجات = $\frac{v_o}{\lambda}$ فى الثانية

حيث (v_o) هى سرعة المستمع .

عدد الموجات التى يستقبلها المستمع فى الثانية الواحدة

$$= \frac{v}{\lambda} + \frac{v_o}{\lambda}$$

حيث (v) هى سرعة الصوت

ولكن عدد الموجات فى الثانية هو التردد

∴ التردد الظاهرى هو :

$$f' = \frac{v + v_o}{\lambda}$$

ولكن:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$\therefore f' = \left(\frac{v + v_o}{v} \right) f$$

حيث (f) هو التردد الحقيق .

من ذلك نرى أن التردد الظاهرى أعلى من التردد الحقيق .

أما إذا ابتعد المستمع عن المصدر الساكن فان الموجات بين المصدر والمستمع تشغل مسافة أكبر وتزداد طول الموجة ويقل التردد .

$$\therefore f' = \frac{v - v_o}{\lambda}$$

$$= \left(\frac{v - v_o}{v} \right) f$$

وتكون المعادلة العـــامة للتردد الظاهرى الذى يسمعه مستمع يتحرك نحو المصدر الساكن أو بعيدا عنه هى على الترتيب :

$$f' = \left(\frac{v \pm v_o}{v} \right) f$$

(هـ) عندما يتحرك المستمع والمصدر معا :

فى هـذه الحالة تسبب حركة المصدر تغيرا فى طول الموجة بينما تسبب حركة المستمع تغيرا فى عدد الموجات التى يستقبلها . فاذا تحرك الإثنين معا فى نفس الاتجاه وهو اتجاه انتشار الموجات ، فان طول الموجة ينقص ويصبح :

$$\lambda'' = \frac{v - v_s}{f}$$

حيث (v) هى سرعة الصوت ، (v_s) سرعة المصدر ، (f) التردد الحقيقى .

المسافة التى تنتشر فيها الموجات بين المصدر والمستمع فى الثانية الواحدة هى ($v - v_o$) حيث (v_o) هى سرعة المستمع .

∴ التردد الظاهرى = $\dfrac{\text{المسافة التى تشغلها الموجات فى الثانية}}{\text{طول الموجة}}$

$$\therefore f' = \left(\frac{v - v_o}{v - v_s} \right) f$$

أما إذا تحـــرك المستمع فى عكس اتجاه حركة المصدر متجهين نحو بعضهما فان :

$$f' = \left(\frac{v + v_0}{v - v_s} \right) f$$

وإذا تحرك المستمع فى عكس اتجاه حركة المصدر مبتعدين عن بعضهما فان :

$$f' = \left(\frac{v - v_0}{v + v_s} \right) f$$

ولذا يمكن كتابة المعادلة هكذا :

$$f' = \left(\frac{v \pm v_0}{v \mp v_s} \right) f$$

وهذه هى المعادلة العامة ومنها يمكن إيجاد التردد الظاهرى فى جميع الأحوال السابقة .

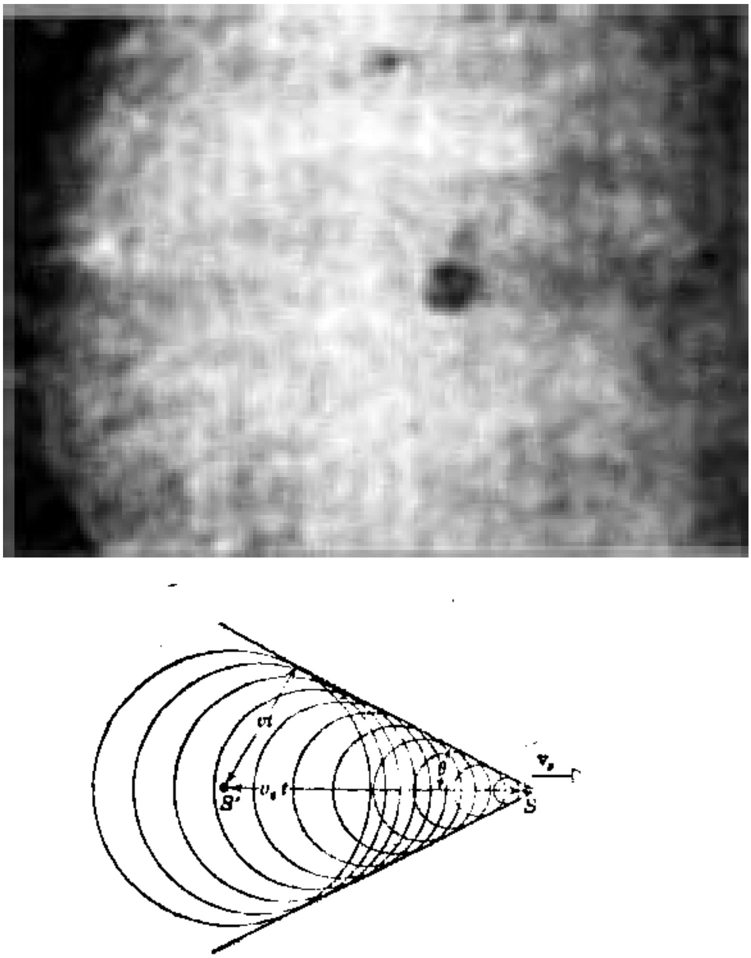
إذا كان الوسط متحركا بأن تهب فيه رياح سرعتها (u) فى الإتجاه من المصدر الى المستمع فان سرعة الصوت تزداد ظاهريا من (v) الى (v + u)

$$\therefore \quad f' = \left[\frac{(v + u) \pm v_0}{(v + u) \mp v_s} \right] f$$

أما إذا كان اتجاه الرياح من المستمع الى المصدر فان :

$$f' = \left[\frac{(v - u) \pm v_0}{(v - u) \mp v_0} \right] f$$

يحدث أحيانا أن تكون سرعة المصدر أكبر من سرعة الموجات الصادرة منه فى نفس الوسط . فى هذه الحالة تشكل الجبهات الكروية شكلا مخروطيا يقع المصدر عند رأسه مثال ذلك مايحدث من موجات فى الماء نتيجة تحرك الزوارق السريعة جدا ومايحدث من طائرة تفوق سرعتها سرعة الصوت (Supersonic) . ويوضح شكل (٤٢) منظرا لهذه الموجات التى تتكون



شكل (٤٢)

عند مواضع مختلفة من المصدر أثناء حركته . نصف قطر أى كرة عند زمن معين هو حاصل ضرب سرعة الموجة (v) فى زمن انتشارها (t) عندما كان المصدر عند مركز الكرة . غلاف هذه الموجات عبارة عن مخروط يصنع سطحه زاوية قدرها (θ) مع اتجاه حركة المصدر .

$$\sin \theta = \frac{v}{v_0}$$

تمارين

(١) إذا كان تردد وتر مشدود هو ٨٠ سيكل / ثانية وسرعة إنتشار الموجة على الوتر هى ١٠٠ متر / ثانية . احسب طول الموجة والبعد بين أى عقدتين تكونت نتيجة إنعكاسات الموجة من الطرف الثابت .

(الجواب : ١٢٥ ، ٦٢٫٥٠ سم)

(٢) أحسب سرعة الصوت فى غاز إذا علم أن موجتين طولها ٥٠ سم ، ٥٠٫٥ سم تنتقلان داخله وتحدثان ضربات (beats) قدرها ٦ ضربات فى الثانية .

اذا كانت (v) هى سرعة الصوت فى الغاز (λ) طول الموجة الأولى

∴ تردد هذه الموجة فى الغاز هو

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{50}$$

وتردد الموجة الثانية فى الغاز هو

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{50.5}$$

∴ عدد الضربات فى الثانية $= f_1 - f_2$

$$\therefore 6 = \frac{v}{50} - \frac{v}{50.5}$$

$$\therefore v = \frac{50 \times 50.5 \times 6}{0.5}$$

$$= 30300 \text{ cms/sec.}$$

(٣) طائرة سرعتها ١٠٠ ميل فى الساعة تقترب من طائرة أخرى تتحرك نحوها بسرعة ١٥٠ ميل فى الساعة، فاذا كان تردد نغمة تصدرها الطائرة الأولى

بالنسبة لمستمع فى الطائرة الثانية هو ١٠٠٠ سيكل فى الثانية أحسب التردد الحقيقى للنغمة علما بأن سرعة الصوت ٧٥٠ ميل فى الساعة .

فى هذه الحالة يتحرك المصدر والمستمع نحو بعضهما .

$$\therefore \quad f' = \left(\frac{v + v_s}{v - v_0} \right) f$$

$$\therefore \quad 1000 = \frac{750 + 150}{750 - 100} f$$

$$\therefore \quad f = \frac{1000 \times 650}{900} = 722{,}2/\mathrm{sec}$$

(٤) تتجه موجة صوتية ترددها ١٠٠٠ سيكل/ثانية من مصدر ساكن نحو عربة تتحرك صوب مصدر الصوت بسرعة قدرها ٨٨ قدم/ثانية .

أحسب التردد الذى يستقبلة شخص ثابت فى مكانه نتيجة إنعكاس الموجات من العربة اليه ، علما بأن سرعة الصوت ١١٠٠ قدم فى الثانية .

التردد الظاهرى عند السطح العاكس المتحرك نتيجة لمصدر ساكن :

$$f' = f \left(\frac{v + v_0}{v} \right)$$

$$= 1000 \left(\frac{1100 \times 88}{1100} \right) = 1080/\mathrm{sec}.$$

ويمكن اعتبار السطح العاكس مصدرا لموجات جديدة تعطى هذا التردد (1080)

∴ التردد الظاهرى عند المستمع الساكن نتيجة لمصدر متحرك نحوه هو :

$$f'' = f'\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$$
$$= 1080\left(\frac{1100}{1100 - 88}\right)$$
$$= 1174/\text{second.}$$

(٥) مصدرا صوتيا تردده ١٠٠٠ سيكل / ثانية يتحرك بسرعة ١٠٠ قدم/ثانية وسرعة انتشار موجاته فى الوسط هى ١٠٠٠ قدم/ثانية . أحسب (أ) طول الموجة أمام المصدر (ب) طول الموجة خلف المصدر (ج) التردد الظاهرى بالنسبة لمستمع ساكن يبتعد عنه المصدر .

(أ) طول الموجة أمام المصدر :

$$\lambda = \frac{v - v_s}{f}$$
$$= \frac{1000 - 100}{1000} = 0.9 \text{ feet}$$

(ب) طول الموجة خلف المصدر .

$$= \frac{v + v_s}{f} = \frac{1000 + 100}{1000}$$
$$= 1.1 \text{ feet}$$

(ج) التردد الظاهرى لمستمع ساكن يبتعد عنه المصدر هو :

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_s}\right) f$$
$$= 1000\left(\frac{1000}{1000 + 100}\right)$$
$$= 909 \text{ cycle/sec}$$

٦ — أوجد محصلة الموجتين :

$$y_1 = \sin(\omega t + 60^\circ)$$

$$y_2 = 2 \sin \omega t$$

المحصلة هى :

$$y = \sin(\omega t + 60) + 2 \sin \omega t$$

$$= \sin \omega t \cos 60 + \sin 60 \cos \omega t + 2 \sin \omega t$$

$$= \sin \omega t (\cos 60 + 2) + \cos \omega t \sin 60$$

ولكن :

$$\sin 60 = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = 2.5 \sin \omega t + 0.866 \cos \omega t$$

ولكن المحصلة كما نعلم هى :

$$y = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \theta)$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta)$$

$$= \sqrt{7} (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta)$$

وبالمقارنة :

$$\sqrt{7} \cos \theta = 2.5$$

$$\sqrt{7} \sin \theta = 0.866$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{0.866}{2.5} \qquad \therefore \theta = 19^\circ$$

$$\therefore y = \sqrt{7} \sin(\omega t + 19^\circ)$$

$$= 2.66 \sin(\omega t + 19^\circ) \text{ metre}$$

٧ — أحسب السرعة والعجلة عند 0 = t والتردد فى الحركة الموجية:

$$y = 6 \cos\left(3 \pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -18 \pi \sin\left(3 \pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -18 \pi \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \text{velocity} = -18 \pi \frac{\sqrt{3}}{2} = -9 \pi \sqrt{3} \text{ metre/sec}$$

العجـــلة

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -18 \pi \times 3 \pi \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -18 \pi \times 3\pi \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= -18 \times 3\pi^2 \times \frac{1}{2} = -27 \pi^2 \text{ metre/sec}^2$$

التردد $= f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2} \text{ sec}^{-1}$

٨ — أحسب التردد ودور الذبذبة والسعة والسرعة والعجلة لجسم عند 0 = t للحركة الموجية :

$$10 \sin (10 t - 30)$$

واضح أن:

$$\omega = 10 \quad rad/sec.$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\times 3.14} = 1.6 \quad cycle\ /sec.$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.63 \quad sec.$$

السعة : $A = 10$ metre

السرعة :

$$\frac{dy}{dt} = 10 \times 10 \cos (10\, t - 30)$$

$$= 10 \times 10 \cos (-30)$$

$$= 10 \times 10 \sqrt{\frac{3}{2}} = 86.6 \quad metre/sec$$

العجلة :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (-10)^2 \times 10 \sin (-30)$$

$$= 10^2 \times 10 \times \tfrac{1}{2} = 500 \quad metre/sec^2$$

٩ — إذا كانت معادلة الموجه المستعرضة فى حبل هى :

$$y = 5 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0.04} - \frac{x}{50}\right)$$

حيث t بالثانية ، x ، y بالسنتيمتر . أحسب طـــول الموجة والسعة والتردد وسرعة الموجة والسرعة القصوى والعجلة لجسيم من جسيمات الحبل .

المعادلة العامة هى :

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

وبالمقارنة $\therefore \quad \lambda = 50 \text{ cm} \quad ، \quad A = 5 \text{ cm}$

التردد $= \frac{1}{T} = \frac{1}{0.04} = 25$ فى الثانية

سرعة الموجة

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{50}{0.04} = 1250 \quad \text{cm/sec.}$$

سرعة جسيم من الحبل

$$\frac{dy}{dt} = A \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

السرعة العظمى $= A \cdot \frac{2\pi}{T}$

$$= 5 \times \frac{2\pi}{0.04} = 785.5 \quad \text{cm / sec}$$

العجلة :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -A \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

العجلة العظمى $= A \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$$= 5 \times \left(\frac{2\pi}{0.04}\right)^2 = 125000 \quad \text{cm/sec}^2$$

١٠ — موجتان لها نفس السعة وتختلفان قليلا فى التردد أوجد المحصلة وعدد الضربات فى الثانية .

نفرض أن الموجة الاولى هى $A \cos \omega t$

والموجة الثانية هى $A \cos (\omega + \Delta\omega)\, t$

المحصلة هى:

$$y = A \cos \omega t + A \cos (\omega + \Delta\omega)\, t$$

$$= 2 A \cos \frac{(\omega t + \Delta\omega\, t + \omega t)}{2} \cos \frac{(\omega t - \omega t - \Delta\omega t)}{2}$$

$$= 2 A \cos \left(\omega t + \frac{\Delta\omega . t}{2} \right) \cos \left(\frac{\Delta\omega . t}{2} \right)$$

∴ السعة المحصلة هى : $2 A \cos \frac{\Delta\omega\, t}{2}$

∴ الموجة المحصلة جيب تمام ترددها الزاوى هو $\omega + \frac{\Delta\omega}{2}$

عدد الضربات فى الثانية :

$$\frac{\Delta\omega + \omega}{2\pi} - \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad / \ \sec.$$