الباب الخامس

المـــرونة

ELASTICITY

إذا أثرنا على جسم بقوى خارجيـــة بحيث يظل الجسم ثابتا فى مكانه فانها عادة تحرك أجزاؤه بالنسبة لبعضها حركة صغيرة تغير من شكله أو حجمه . ومن الأجسام ما يستعيد شكله أو حجمه الأصلى بمجرد زوال القوة التى أحدثت هذا التغيير فيقـال أنها تامة المرونة (perfect elastic) ومنها مالا يستعيد شكله أو حجمه الأصلى بعـد زوال القوة فيقـــال لهـا عديمـة المرونة (perfect plastic) .

٥ ـ ١ الاجهاد (stress)

هو القوة المؤثرة على وحدة المساحات عموديا عليها

$$\text{أى أن : الإجهاد} = \frac{\text{القوة العمودية على المساحة}}{\text{المساحة}}$$

٥ ـ ٢ الانفعال (strain)

$$= \frac{\text{التغير فى الطول أو الحجم}}{\text{الطول الأصلى أو الحجم الأصلى على الترتيب}}$$

٥ ـ ٣ قانون هوك (Hoak's Law)

الإنفعال الحادث بتأثير إجهاد يتناسب تناسبا طرديا مع الاجهاد المحدث بحيث لا يتعدى حد المرونة .

$$\therefore \quad \frac{\text{الاجهاد}}{\text{الانفعال}} = \text{مقدار ثابت}$$

ويسمى هـــذا المقدار بمعامل المرونة (modulus of elasticity) ووحدات معامل المرونة هى وحدات الإجهاد لأن الإنفعال ليس له وحدات فهو نسبة من نفس النوع .

∴ وحدات معامل المرونة داين / سم٢

وهناك ثلاث أنواع من معامل المرونة حسب كيفية حدوث الإجهاد وهى:

٥ ـ ٤ معامل يونج (Young's modulus) :

إذا أثرت قوة قدرها (F) داين فى إتجاه عمودى على مقطع سلك مثبت مع الطرف الآخر وكانت الإستطالة الحادثة (δl) حيث (l) الطول الأصلى للسلك ، (A) سم٢ مساحة مقطعة .

$$\therefore \text{ معامل يونج } = \frac{\text{الإجهاد}}{\text{الإنفعال}} = Y$$

$$\therefore \quad Y = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\delta l}{l}}$$

٥ ـ ٥ معامل المرونه للحجم (Bulk modulus)

يعرف معامل المرونة الحجمى :

$$K = \frac{\text{القوة العمودية على وحدة المساحات}}{\text{النقص فى الحجم بالنسبة للحجم الأصلى}}$$

$$= \frac{\text{الزيادة فى الضغط}}{\text{النقص فى الحجم بالنسبة للحجم الأصلى}}$$

$$\therefore K = \frac{\delta p}{\frac{-\delta V}{V}}$$

حيث (δp) هو الزيادة فى الضغط ، (δV) هو النقص فى الحجم .

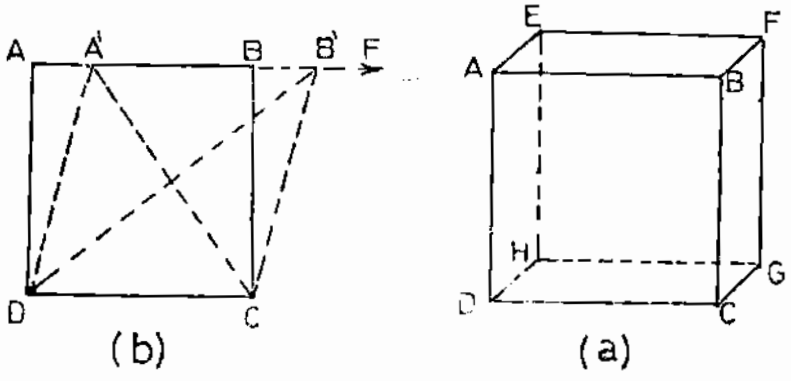
ويعرف معامل الإنضغاط (Compressibility) بأنه مقلوب معامل المرونة الحجمى ($= \frac{1}{K}$) .

• ـ ٦ معامل المرونة للقص (shear modulus)

ويعرف بمعامل الصلابة (modulus of rigidity) .

ويعرف بالمعادلة الآتية :

$$N = \frac{\text{القوة المماسية (tangential force) المؤثرة على وحدة المساحات}}{\text{زاوية القص (} \phi \text{)}}$$



شكل (٢٤)

يبين شكل (٢٤) مكعبا مثبتا من قاعدته وأثرنا عليه من أعلى بقوة مماسية (F) ، فاذا كانت مساحة الوجه الذى أثرت عليه القـــوة المماسية هي (A) فان :

$$N = \frac{\frac{F}{A}}{\phi}$$

حيث (ϕ) هى الزاوية (BCB') .

• – ٧ نسبة بواسون (Poisson's ratio) :

من المعلوم أنه إذا أثرت قوة شد على جسم (سلك مثلا) فان الجسم يستطيل ويحدث فى نفس الوقت انكماش فى اتجـــاه العرض أى أنه يجانب الإنفعال الطولى يوجد إنفعـال مستعرض (lateral strain) وتعرف نسبة بواسون بالمعادلة :

$$\sigma = \frac{\text{الإنفعال المستعرض}}{\text{الإنفعال الطولى}}$$

وهذه النسبة ثابتة لكل مادة ، وتختلف من مادة إلى أخرى . أى أن هذه النسبة تميز نوع المادة ولذلك تعتبر من ثوابت المرونة . ويبين جدول (١) قيمة نسبة بواسون للمواد المختلفة كما يبين جدول (٢) معاملات المرونة .

جدول (١)

نسبة بواسون

المـــادة	٥	المـــادة	٥
الزجاج	٠ر٢٥	الرصاص	٠ر٤٣
الصلب	٠ر٢٧ — ٠ر٣٠	الألمونيوم	٠ر٣٤
النحاس	٠ر٣١ — ٠ر٣٤	الفضة	٠ر٣٨
البلاتين	٠ر٣٩	الذهب	٠ر٤٢

جدول (٢)

معاملات المرونة لبعض المواد

المـــادة	K	Y	N	المـــادة	K	Y	N
الصلب	١٦ر٤	٢٠ر٩	٨ر١٢	النحاس	١٣ر١	١٠ر٥	٤ر٥
الزجاج	٤ر٦١	٧ر٠٩	٢ر٥	الألمونيوم	٨ر٥٥	٧ر٥	٣
البلاتين	٢٤ر٧	١٦ر٨	٦ر٢	الذهب	١٦ر٦	٧	٢ر٧٧
النيكل	١٧ر٦	٢٠ر٢	٧ر٧	الفضة	١٠ر٩	١٠ر٩	٢ر٨٧

K , Y , N بوحدات داين / سم^{٢} × ١٠^{١١}

تمارين

(١) جسيم كتلته ٢٠ جم مربوط فى أحد نهايتى سلك أفقى مرن طوله ١٥ سم ومساحة مقطعه ٥ مم٢ . فاذا دار الجسيم فى المستوى الأفقى حول محور مار بالطرف الآخر المثبت من السلك بسرعة زاوية منتظمة قدرها ٢٠٠٠ دورة فى الدقيقة . أوجد الشد فى السلك إذا علم أن معامل يونج لمادته ١٫٥ × ١٠^١٢ داين / سم٢ .

نفرض أن (ω) هى السرعة الزاوية ، (n) عدد الدورات ، (T) زمن هذه الدورات .

$$\therefore \quad \omega = \frac{2\pi \times 2000}{60} = \frac{2000\,\pi}{30} \text{ rad/sec}$$

القوة الوحيدة المؤثرة على السلك فى إتجاه طوله هى القوة الطاردة المركزية (F) .

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = 20 \left(\frac{2000\,\pi}{30} \right)^2 \times 15$$

$$= \frac{4\pi^2}{3} \times 10^6 \text{ dyn}$$

ولكن معامل يونج :

$$Y = \frac{F}{A} \Big/ \frac{\delta l}{l}$$

$$\therefore \quad 1.5 \times 10^{12} = \frac{4\pi^2 \times 10^6}{3 \times 0.05} \times \frac{15}{\delta l}$$

$$\therefore \delta l = \frac{4\,(3.14)^2 \times 10^6 \times 15}{1.5 \times 10^{12} \times 5 \times 0.05} = 0.0027 \text{ cm}$$

(٢) اسطوانة جوفاء ارتفاعها ١٠ قدم . وجد أن الارتفاع ينقص بمقدار ٠,٠١ بوصة تحت تأثير ضغط قدره ٧٢٠٠٠ ثقل باوند على البوصة المربعة . فاذا كان نصف قطر الاسطوانة الداخلي يساوى $\frac{4}{5}$ نصف القطر الخارجي ، أحسب القطر الخارجي للاسطوانة علما بأن معامل يونج هو ٢٢ × ١٠^٦ باوندال/بوصة^٢ .

إذا كان (A) هى مساحة السطح المعرض للضغط .

$$\therefore Y = \frac{F}{A} \Big/ \frac{\delta l}{l}$$

$$\therefore 3.1 \times 10^6 = \frac{72000}{A} \Big/ \frac{0.01}{10 \times 12}$$

$$\therefore A = 27 \text{ inch}^2$$

ولكن :

$$A = R^2 \pi - \pi \left(\frac{4}{5} R \right)^2$$

حيث (R) نصف القطر الخارجي للأسطوانة .

$$\therefore 27 = \pi R^2 - \pi \left(\frac{4}{5} R \right)^2$$

$$\therefore R = 5.1 \text{ inch}$$

(٣) أحسب القوة اللازمة لاستطالة قضيب بمقدار ١ مم إذا كان طول القضيب ١ متر وقطره ٢ مم . وإذا فرض أن متوسط الطاقة المبذولة في الاستطالة قد تحولت كلها إلى حرارة أمتصها القضيب ، فما هو الارتفاع في درجة حرارة القضيب .

معامل يونج = ٢ × ١٠^١٢ داين / سم^٢

المكافىء الميكانيكى للحرارة = ٤,٢ × ١٠^٧ أرج/سعر

كثافة مادة القضيب = ٨ جم/سم^٣

الحرارة النوعية لمادة القضيب = $\frac{1}{2}$ سعر جم^-١ م^-١

$$Y = \frac{F/\pi r^2}{\delta l / l}$$

$$\therefore 2 \times 10^{12} = \frac{F/[3.14 \times (0.1)^2]}{0.1/100}$$

$$\therefore F = \frac{2 \times 10^{12} \times 3.14 \times 0.01 \times 0.1}{100}$$

$$= 628 \times 10^5 \text{ dyn}$$

متوسط الطاقة المبذولة فى الاستطالة = $\frac{1}{2}$ × القوة × الاستطالة

= $\frac{1}{2}$ × ٦٢٨ × ١٠^٥ × ٠,١

= ٣١٤ × ١٠^٤ أرج

كمية الحرارة الناتجة = $\frac{٣١٤ \times ١٠^{٤}}{٤,٢ \times ١٠^{٧}}$ = ٧٤,٧٦ × ١٠^-٣ سعر

= الحجم × الكثافة × الحرارة النوعية

× الارتفاع فى درجة الحرارة

∴ الارتفاع فى درجة الحرارة = $\frac{٧٤,٧٦ \times ١٠^{-٣} \times ٩}{٣,١٤ (٠,١)^{٢} \times ١٠٠ \times ٨}$

= ٠,٠٠٢٦٨ م°

تمارين عامة

(١) أحسب مقدار العجلة بالوحدات سم / دقيقة ٢ إذا علم أن مقدارها ٣٢ قدم/ثانية٢ .

(الجواب : ٣٫٥١٢ × ١٠^٦ سم / دقيقه٢)

(٢) باستخدام معادلات الأبعاد ، أثبت صحة قانون البندول المركب

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{hg}}$$

(٣) حـــذافة تزن ١٠ طن . أحسب طاقة الحركة الدورانية لها إذا دارت بسرعة ١٠٠ دورة فى الدقيقة علما بأن نصف قطر القصور ٣ قدم والطن = ٢٢٤٠ باوند .

(الجواب : ٣٫١١٠٦ × ٤٠^٤ قدم باوندال)

(٤) تتدحرج كرة كتلتها ٥٠ جم وقطرها ٢ سم على مستوى أفقى بدون إحتكاك بسرعة قدرها ٥ سم / ثانية . أحسب طاقتها الكلية .

(الجواب : ٨٧٥ إرج)

(٥) كرة كتلتها ٤٠ كيلو جرام تنجذب نحو كرة أخرى كتلتها ١٥ كيلو جرام وتبعـد عنها بمسافة ٢٠ سم . فاذا كانت قوة التجاذب هى ١٫٠ ثقل ملليجرام . أحسب ثابت الجاذبية (G)

(الجواب : ٦٫٥٣ × ١٠^-٨ داين سم٢ / جم٢)

(٦) أحسب كتلة الشمس إذا علم أن الأرض تدور حولها فى مدار نصف قطره ١٫٥ × ١٠ ^٨ كيلو متر وأن الدورة الكاملة تتم فى ٣٦٥ يوما وثابت الجاذبية ($G = ٦٫٦٧ \times ١٠^{-٨}$ داين سم^{٢} / جم^{٢})

(الجواب : ٢ × ١٠^٣٣ جم)

(٧) أحسب متوسط كثافة الأرض إذا علم أن :

ثابت الجاذبية = ٦٫٦ × ١٠^-٨ داين . سم^{٢} / جم^{٢}

عجلة الجاذبية = ٩٨٠ سم / ثانية^{٢}

نصف قطر الأرض = ٦٫٤ × ١٠^٨ سم

(الجواب : ٥٫٥٣٨ جم / سم^{٣})

(٨) يدور القمر حول الأرض فى مدار نصف قطره ٣٫٨ × ١٠^٥ كيلومتر فى دورة تتم فى ٢٧ يوما بينما تدور الأرض حول الشمس فى مدار نصف قطره ١٫٥ × ١٠^٨ كيلو متر فى دورة تتم فى ٣٦٥ يوما . أحسب كتلة الشمس بدلالة كتلة الأرض .

(الجواب : ٦٫٦٢٣ × ١٠^٥ من كتلة الأرض)

(٩) يتذبذب قضيب رفيع طوله ١٢٠ سم حول محور مار بأحد طرفيه ، أحسب زمن الذبذبة . ثم عين الموضع أو المواضع الأخرى التى يتذبذب فيها القضيب بنفس زمن الذبذبة السابقة .

الجواب : ١٫٧٩٦ ثانية ، ٢٠ سم من مركز الثقل)

(١٠) على أى ارتفاع من سطح الأرض تصبح عجلة جاذبية الأرض $\frac{1}{2}$ من قيمتها على سطح الأرض علما بأن نصف قطر الأرض ٦,٣٨ × ١٠^٨ سم .

(الجواب : ٥٧,٤٢ × ١٠^٨ سم)

(١١) قرص معدنى يتذبذب فى مستواه حول محور مار بنقطة على حافته . أوجد طول البندول البسيط المكافىء لهذا القرص .

(الجواب : $\frac{3}{2}$ × نصف قطر القرص)

(١٢) سلك طوله ٥٠ سم ومساحة مقطعة ١ مم^٢ . فاذا كان معامل يونج لمادة السلك يساوى ١,٢٣ × ١٠^١٢ داين/سم^٢ .

(أ) أوجد متوسط الشغل اللازم فى استطالة السلك بمقدار ١ مم

(ب) القوة اللازمة لاستطالة السلك بمقدار ٥ مم

(الجواب : ١,٢٣ × ١٠^٦ أرج ، ١,٢٣ × ١٠^٨ داين)

(١٣) علقت كتلة قدرها ٥ كيلوجرام فى نهاية سلك طوله ٢ متر ونصف قطره قبل التعليق ٢,٠٥ مم فاستطال السلك بمقدار ٠,٥ مم ونقص قطره إلى ٢,٠٤٨ مم أحسب (أ) متوسط الشغل المبذول (ب) نسبة بواسون .

(الجواب : ١,٢٢٥ × ١٠^٥ أرج ، ٠,٤)

(١٤) إذا كان حجم الزيت داخل مكبس هو ٥ قدم^٣ ، أحسب النقص فى حجم الزيت إذا ضغط بمقدار ٢٠٠٠ رطل/بوصة^٢ علما بأن معامل الانضغاط للزيت هو ٢٠ × ١٠^-٦ (جوى)^-١

(الجواب : ٠,٠١٣٦ قدم^٣) .