الباب الرابع
القصور الذاتي

INERTIA

٤ - ١ عزم القصور الذاتي: Moment of Inertia

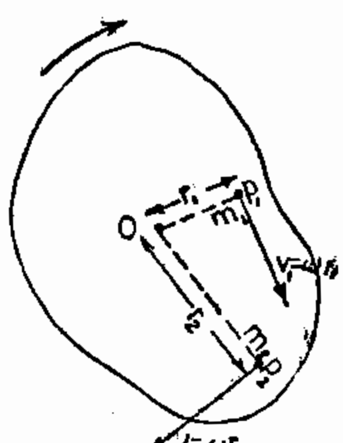
نفرض أن لدينا جسما يدور حول المحور (o) (شكل ١٠) بسرعة زاوية (ω) . جميع جسيمات الجسم يكون لها نفس السرعه ازاوية .

ولكن السرعة الخطية :

$$v = \omega r$$

$$\therefore \quad v_1 = \omega r_1$$

$$، \quad v_2 = \omega r_2 \quad ، \; . \; . \; . \; .$$



شكل (١٠)

أى أن السرعة الخطيـــة تختلف باختلاف بعد الجسيم عن محور الدوران .

طاقة حركة الجسيم الأول (P_1)

$$\frac{1}{2}\, m_1\, v_1^2 = \frac{1}{2}\, m_1\, \omega^2\, r_1^2$$

طاقة حركة الجسيم الثانى (P_2)

$$\frac{1}{2}\, m_2\, v_2^2 = \frac{1}{2}\, m_2\, \omega^2\, r_2^2$$

وبما أن طاقة حركة الجسم كله = مجموع طاقة حركة جسيماته

$$\begin{aligned} \therefore\quad E &= \sum \tfrac{1}{2}\, m\, \omega^2\, r^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\, \omega^2\, \Sigma\, m\, r^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\, \omega^2\, I \end{aligned}$$

حيث: $I = \Sigma\, m\, r^2$

ويسمى (I) عزم القصور الذاتى للجسم حول محور الدوران (0)

وحدات عزم القصور الذاتى $gm \cdot cm^2$

٤-٢ نصف قطر القصور (K) (radius of gyration)

إذا فرض وركزنا الكتلة على بعـــد من محور الدوران يساوى (K) سم بحيث أن $(I_0 = M\,K^2)$ حيث M كتلة الجسم كله ، فان البعد K يسمى **نصف قطر القصور** .

وللجسم أنصاف أقطار مختلفة تبعاً لمحور الدوران .

٤ ـ ٣ حساب عزم القصور الذاتي

يمكن حساب (I) من المعادلة

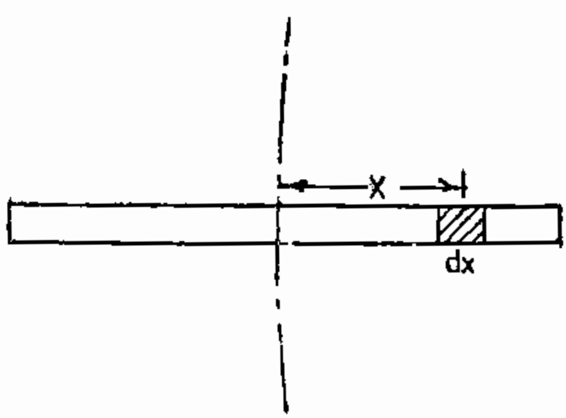
$$I = \int x^2 \, dm$$

حيث (dm) تمثل جزء صغير من الوزن الكلى للجسم وأن هذا الجزء يبعد عن محور الدوران مسافة (x) .

مثال (١)

قضيب منتظم كتلته (m) للسنتيمتر الطولى والمراد إيجاد (I) حول محور عمودى عليه ومارا بمنتصفه .

إذا كان (l) هو طول القضيب



شكل (١١)

$$\therefore \quad I = 2 \int_0^{l/2} x^2 \, . \, m \, dx$$

$$= \frac{m\, l^3}{12} = M \frac{l^2}{21}$$

حيث M كتلة القضيب = $m\, l$

ويمكن إيجـــاد (I) حول محور عمودى على القضيب ومارآ بأحد طرفيه كالآتى :

$$I = \int_0^l x^2 . m\, dx = \frac{m\, l^3}{3} = M \frac{l^2}{3}$$

مثـال (٢)

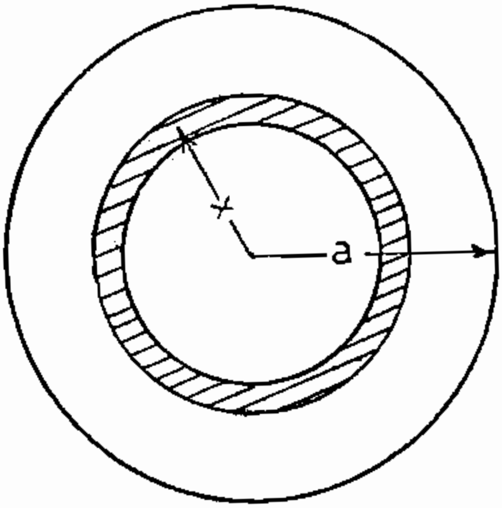
عزم القصور الذاتى لقرص دائرى حول محور عمودى عليه ومارا بمركزه . يمكن تقسيم القرص إلى حلقات .

نفرض واحدا منها نصف قطره (x) وعرضه (dx) فاذا كانت (m) هى كتلة وحدة الحجوم من القرص وأن (y) هو سمك القرص

$$\therefore \quad I = \int_0^a x^2\ 2\pi\, x\, my\ dx$$

$$= \int_0^a 2\pi\ my\ x^3\ dx$$

$$= 2\pi\ my \frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{2} . \pi a^2\ my$$



شكل (١٢)

ولـكن كتلة القرص : $\pi a^2 \gamma m = M$

$$\therefore I = M \frac{a^2}{2}$$

مثال (٣)

عزم القصور الذاتى لحلقة نصف قطرها الداخلى (a) والخارجى (b) حول محور عمودى عليها مارا بمركزها .

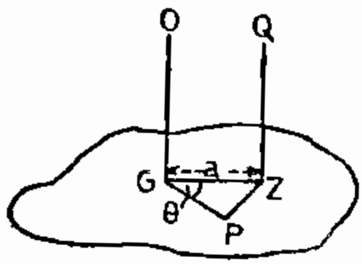
$$I = \int_a^b x^2 . 2\pi x \, m\gamma \, dx$$

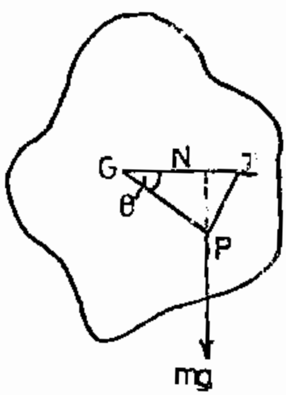
$$= \frac{2\pi m\gamma \, (b^4 - a^4)}{4} = \left(\frac{b^2 + a^2}{2}\right) \left\{ \pi (b^2 - a^2) m\gamma \right\}$$

$$= \frac{M}{2} \left(b^2 + a^2 \right)$$

٤ - ٤ نظرية المحاور المتوازية :

نفرض أن (I_z) هو عزم القصور الذاتى للجسم حـــول المحور (QZ) (شكل ١٣) وأن (I_G) هو عزم القصور للجسم حول المحور الموازى (OG) والمار بمركز الثقل (G) . وأن (a) هى المسافة العمودية بين المحورين .





(a) شكل (١٣) (b)

إذا كانت (m) هى كتلة جسيم عند النقطة (P) وزاوية $\theta = (PGZ)$

$$\therefore \quad I_z = \Sigma\, \overline{PZ}^2 = \Sigma\, m\,(\overline{PG}^2 + \overline{GZ}^2 - 2\, \overline{PG}\; \overline{GZ} \cos\theta)$$

$$= \Sigma m\, \overline{PG}^2 + \Sigma\, m\, \overline{GZ}^2 - 2\, \overline{PG}.\, \overline{GZ} \cos\theta$$

$$= I_G + Ma^2 - 2a\ \Sigma\, m\, \overline{PG}.\cos\theta$$

حيث (M) كتلة الجسم كله .

إذا علق الجسم من مركز ثقله (G) بحيث يصبح المثلث PGZ رأسيا والضلع GZ أفقياً (شكل ١٣ b) فانه من خواص مركز الثقل يكون الجسم فى حالة اتزان وأن مجموع العزوم الدورانية حول (G) يساوى صفر

$$\therefore \Sigma mg \,.\, \overline{pG} \cos\theta = 0$$

ومن المعادلة السابقة

$$\therefore I_z = I_G + Ma^2$$

أى أن عزم القصور الذاتى للجسم حول محور التعليق

= عزم القصور الذاتى للجسم حول محور يوازى محور التعليق ومارا بمركز ثقله + كتلة الجسم × مربع البعد العمودى بين المحورين

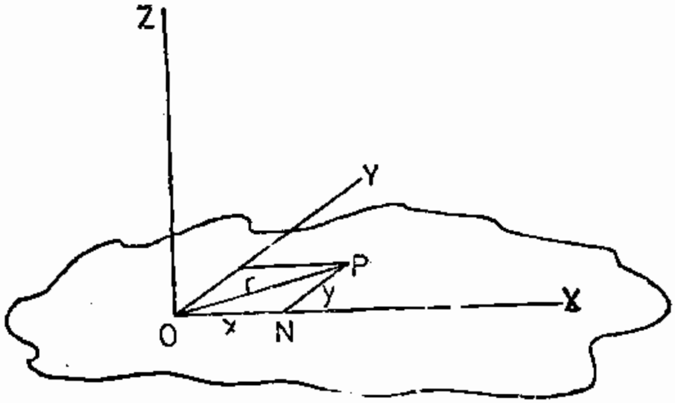
٤ ـ ٥ نظرية المحاور المتعامدة فى حالة صفيحة رقيقة .

نفرض أن I_x ، I_y ، I_z هم القصور الذاتى لصفيحة رقيقة حول المحاور المتعامدة ox ، oy ، oz وأن ox ، oy فى مستوى الصفيحة :

نفرض أن جسيم كتلته (m) موضوع عند (P) وأن احداثياته x ، y شكل (١٤) .

$$\therefore I_x + I_y = \Sigma m (x^2 + y^2) = \Sigma m r^2 = I_z$$

أى أن عزم القصور الذاتى حول أى محور يساوى مجموع عزوم القصور الذاتى حول المحورين الآخرين المتعامدين .



شكل (١٤)

مثال (١)

أثبت أن عزم القصور الذاتى لصفيحة مستطيلة الشكل حول محور عمودى عليها ومارآ بمركزها هو :

$\frac{M}{12}\ (a^2 + b^2)$ حيث a ، b هما الطول والعرض.

عزم القصور الذاتى للصفيحة حول محور فى مستواها ومارآ بمركزها موازيا للضلع الذى طوله (a) هو

$$I_x = \frac{M}{12} b^2$$

وعزم القصور الذاتى للصفيحة حول محور متعامد على المحور الأول وفى مستوى الصفيحة ومارآ بمركزها هو

$$I_y = \frac{M}{12}\ a^2$$

$$\therefore \quad I_z = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

مثال (٢)

أثبت أن عزم القصور الذاتى لقرص حول قطر من أقطاره $= \frac{M}{4} R^2$

حيث R نصف قطر القرص .

عزم القصور الذاتى للقرص حول محور عمودى عليه ومارا بمركزه .

$$I_z = \frac{M}{12} R^2$$

ولكن

$$I_z = I_x + I_y$$

$$I_x = I_y$$

$$\therefore I_x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{M}{2} R^2\right) = \frac{M}{4} R^2$$

وبالمثل يكون عزم القصور لحلقة نصف قطرها الداخلى (a) والخارجى (b) هو :

$$\frac{M}{4}\left(a^2 + b^2\right)$$

مثال (٣)

أثبت أن عزم القصور لقرص حول محور مماس له وفى مستواه يساوى

$$\frac{5}{4} R^2$$

عزم القصور الذاتى للقرص حول أى قطر من أقطاره .

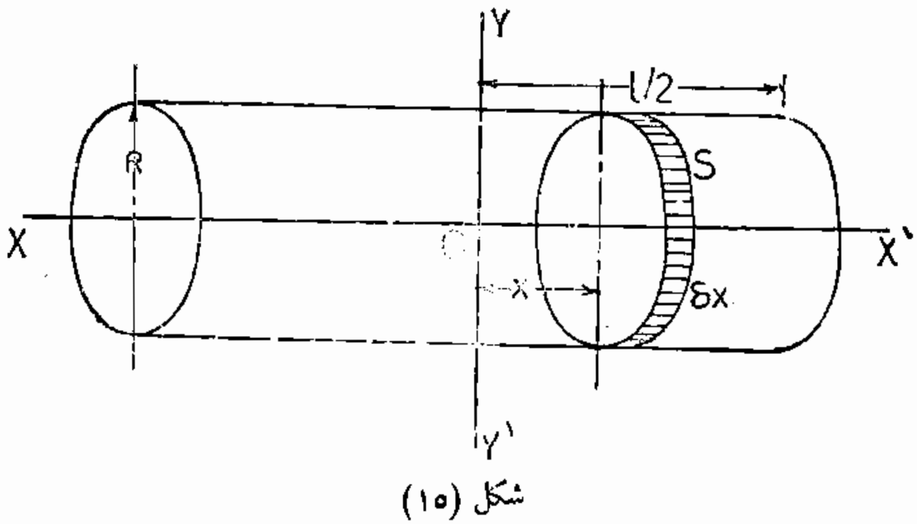
$$= \frac{M}{4} R^2$$

ومن نظرية المحاور المتوازية

$$\therefore I = \frac{M}{4} R^2 + MR^2 = \frac{5M}{4} R^2$$

مثال (٤)

عزم القصور الذاتى لأسطوانة مصمتة حول محور عمودى عليها ومارا بمركزها.



شكل (١٥)

نفرض أن (M) هى كتلة الأسطوانة ، (R) نصف قطرها ، (l) طولها .

$\therefore$ كتلة وحدة الأطوال $= \frac{M}{l}$

نفرض أن عنصرا (S) سمكه (δx) ويبعد عن مركز الاسطوانة بالمسافة (x) . كتلة هذا العنصر $= \frac{M}{l} \cdot \delta x$

عزم القصور الذاتى لهذا العنصر حول قطر من أقطاره

$$= \frac{M}{l} \cdot \delta x \times \frac{R^2}{4}$$

∴ عزم القصور الذاتى له حول المحور الموازى (YY') باستخدام نظرية المحاور المتوازية :

$$= \frac{M}{l} \delta x \times \frac{R^2}{4} + \frac{M}{l} \cdot \delta x \times x^2$$

$$= \frac{M}{l} \delta x \left(\frac{R^2}{4} + x^2 \right)$$

∴ عزم القصور الذاتى للاسطوانة كلها حول المحور (YY') هو :

$$I = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{R^2}{4} + x^2 \right) dx$$

$$= \frac{M}{l} \left[\frac{R^2}{4} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \right) + \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right) \right]$$

$$= M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right)$$

٤ - ٥ نظرية المحاور المتعامدة فى حالة جسم ذى ثلاث ابعاد :

نفرض أن I_x ، I_y ، I_z هم عزم القصور الذاتى للجسم حول المحاور

OX ، Oy ، OZ (شكل ١٦) وأن جسم كتلته (m) موضوع عند (P) حيث إحداثياتها x ، y ، z أى أن :

$$PM = z \; , \; MN = y \; , \; NO = x$$

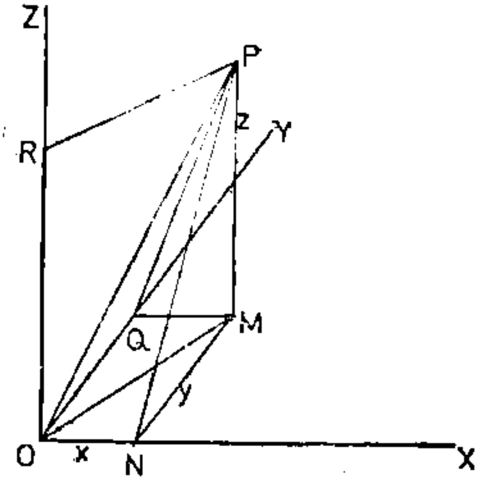
أرسم PR ، PN ، PQ عموديا على OZ ، OX ، OY على الترتيب .

$$\therefore I_x = \Sigma m . \overline{PN}^2 = \sum m (y^2 + z^2)$$

$$I_y = \Sigma m . \overline{PQ}^2 = \sum m (z^2 + x^2)$$

$$I_z = \sum m . \overline{PR}^2 = \sum m \overline{MO}^2 = \Sigma m (x^2 + y^2)$$

$$I_o = \Sigma m . \overline{PO}^2 = \Sigma m . (x^2 + y^2 + z^2)$$



شكل (١٦)

وبالجمع :

$$\therefore \quad I_x + I_y + I_z = 2\ \Sigma\ m\ (\ x^2 + y^2 + z^2 = 2I_0$$

حيث $I_0 = \Sigma\ m\ r^2$ حول النقطة O

مثال (١)

عزم القصور الذاتى لقشرة كروية

فى هذه الحالة تكون كل الأجزاء على نفس البعد من المركز (O)

$$\therefore\ I_0 = M\ r^2$$

وحيث أن :

$$I_x = I_y = I_z$$

$$،\ 2\ I_0 = I_x + I_y + I_x$$

$$\therefore\quad 2\ M\ r^2 = 3\ I_x$$

$$\therefore\quad I_x = \frac{2}{3}\ M\ r^2$$

حول قطر من أقطار القشرة الكروية :

وعزم القصور الذاتى لها حول مماس

$$= I_x\ + M\ r^2 = \frac{2}{3} M\ r^2 + Mr^2 = \frac{5}{3} M\ r^2$$

مثال (٢)

عزم القصور الذاتى لكرة مصمتة حول قطر من أقطارها .

نقسم الكرة إلى قشرات رقيقة ونفرض أن سمك إحـــداها هو (d)
ونصف قطرها (x) . فاذا كانت (m) هى كتلة وحدة الحجوم .

∴ وزن القشرة = $4\ \pi\ x^2 .\ m .\ dx$

وعزم القصور الذاتى لهذه القشرة = $4\ \pi\ x^2 .\ m .\ dx .\ x^2$

∴ عزم القصور الذاتى للكرة كلها هو :

$$I_0 = \int_0^r 4\ \pi\ x^2\ m\ x^2\ .\ dx$$

$$= \int_0^r 4\ \pi\ x^4\ m\ dx$$

$$\therefore I_0 = \frac{3}{5}\ M\ r^2$$

وحيث أن :

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z$$

$$، I_x = I_y = I_z$$

$$\therefore \frac{6}{5}\ Mr^2 = 3\ I_x$$

$$\therefore I_x = \frac{2}{5} M r^2$$

حول قطر من أقطار الكرة .

وعزم القصور الذاتى حول مماس :

$$= I_x + Mr^2 + \frac{2}{5} Mr^2 + Mr^2 = \frac{7}{5} Mr^2$$

إذا حذف من جسم جزء ما فان عزم القصور الذاتى للجسم حول أى محور ينقص بمقدار عزم القصور الذاتى للجزء المحذوف . وعلى ذلك يكون عزم القصور الذاتى لجسم به فجوة يساوى عزم القصور الذاتى للجسم المتكامل ناقص عزم القصور الذاتى للفجوة .

٤ — ٦ نصف قطر القصور : radius of gyration

مما تقدم يمكن كتابة عزم القصور الذاتى على الصورة الآتية :

$$I = Mk^2$$

حيث k كمية تتوقف على أبعاد الجسم وشكله وتسمى نصف قطر القصور حول المحور المذكور .

ويمكن تعريف (k) بأنه نصف قطر حلقة يتوزع عليها وزن الجسم بانتظام وأن محور الدوران عموديا على مستوى الحلقة ومارا بمركزها .

٤ — ٧ العجلة الزاوية المنتظمة :

الحركة الزاوية ذات العجلة المنتظمة يمكن أن تتم بواسطة إزدواج مكون من قوتين متساويتين ومتضادتين ومتوازيتين . وإذا ثبتت نقطة من الجسم

فان قوة واحدة (لاتمر بهذه النقطة) تعمل مع رد الفعل عند النقطة المثبتة إزدواجا يعمل على دوران الجسم .

فاذا كانت ω_0 ، ω هما السرعة الزاوية الابتدائية والنهائية على التوالى وأن $\frac{d\omega}{dt}$ هى العجلة الزاوية ، θ الازاحة الزاوية ، c الازدواج .

فانه يمكن كتابة :

$$I\omega - I\omega_0 = I\frac{d\omega}{dt}t$$

$$\text{،} \ \tfrac{1}{2}I\omega^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 = I\frac{d\omega}{dt}\theta$$

تشبها بالمعادلتين

$$mv - mv_0 = mat = Ft$$

$$\text{،} \ \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = max = Fm$$

فى حالة الحركة الخطية حيث (a) هى العجلة الخطية ، (v) السرعة الخطية .

تسمى الكمية $(I\omega)$ عزم الدوران (angular momentum)

وتسمى الكمية [illegible] طاقة الحركة [illegible] (angular kinetic [illegible])

فاذا كانت العجلة الخطية لنقطة ما (P) هى $\left(r\frac{d\omega}{dt} \right)$ وأثرت قوة قدرها (F) على هذه النقطة فى إتجاه عمودى على الخط الواصل بين هذه النقطة ومركز الدوران (0) :

$$\therefore F = mr \frac{d\omega}{dt}$$

حيث (m) كتلة الجسيم الموضوع عند هذه النقطة

عزم هذه القوة $= mr^2 \frac{d\omega}{dt}$ حول المركز (0)

ومجموع العزوم حول (0) لجميع القوى المؤثرة على الجسيم

$$= \Sigma mr^2 \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = C$$

التغير فى طاقة الحركة الدورانية $= c\,\theta$ وهو الشغل المبذول بواسطة أزدواج عزمه c لازاحة زاوية قدرها θ . فاذا علق جسم بواسطة سلك التواء (Torsion wire) فان الازدواج الخارجى (C) يعاكسه ازدواج $(c\theta)$ ناتج من الالتواء ويحصل توازن إذا كان :

$$C = c\theta$$

حيث c تتوقف على نوع السلك

$$\therefore I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -c\,\theta \quad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (15)$$

وهنا الاشارة سالبة لأن الازدواج الخارجى فى عكس اتجاه الأزدواج .

هذه المعادلة تمثل حركة توافقية بسيطة لأن العجلة ازاوية تتناسب مع الازاحة الزاوية . وزمن الذبذبة :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

٤ ـ ٨ عزم القصور الذاتى للحدافة : (Fly wheel)

يلف حول محور الحدافة خيط رفيع يتدلى منه ثقل كتلته (m) بينما يثبت الطرف الآخر من الخيط على المحور ذاته . فاذا ترك الثقل لكى يهبط فان العجلة تدور وتتحول طاقة الوضع ($mg\ h$) التى يفقدها الثقل إلى :

طاقة حركة للثقل $= \frac{1}{2}\ m\ v^2$

، طاقة دورانية للحدافة $= \frac{1}{2}\ I\ \omega^2$

، شغل للتغلب على الاحتكاك عند المواضع التى يدور فيها المحور :

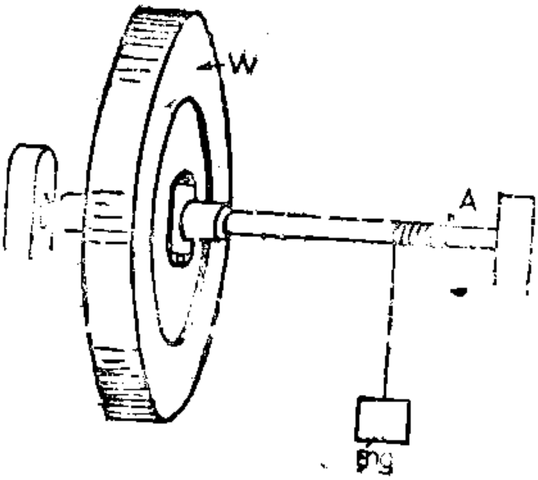
$$\therefore m\ g\ h = \frac{1}{2}\ m\ v^2 + \frac{1}{2}\ I\ \omega^2 + fn_0 \quad \dots \quad (17)$$

حيث (g) عجلة الجاذبية الأرضية ، (h) المسافة التى هبطتها الكتلة ، (ω) السرعة الزاوية النهائية ، (f) الشغل المبذول للتغلب على الأحتكاك أثناء دورة واحدة ، (n_0) عدد الدورات أثناء سقوط الجسم .

فاذا حسبنا عدد الدورات(n) التى تدورها الحدافة بعد سقوط الجسم حتى تقف الحدافة تماما فان :

طاقة الحركة الدورانية = الشغل المتغلب على الاحتكاك

أى أن : $\frac{1}{2}\ I\ \omega^2 = f\ n$



شكل (١٦)

ومن المعادلة (١٧) :

$$\because \quad mgh = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} I \omega^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2 \frac{n_0}{n}$$

$$\therefore mgh = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2 (1+\frac{n_0}{n}) \quad \dots (18)$$

وحيث أن السرعة ازاوية الابتدائية = صفر

والسرعة الزاوية النهائية = ω

$\therefore$ متوسط السرعة ازاوية = $\frac{\omega + 0}{2}$

ولكن متوسط السرعة الزاوية = $\frac{2\pi n_0}{t}$

حيث (t) الزمن الذى استغرقته عدد الدورات (n_0)

$$\therefore \frac{2\pi n_0}{t} = \frac{\omega}{2}$$

$$\therefore \omega = \frac{4\pi n_0}{t}$$

وبما أن

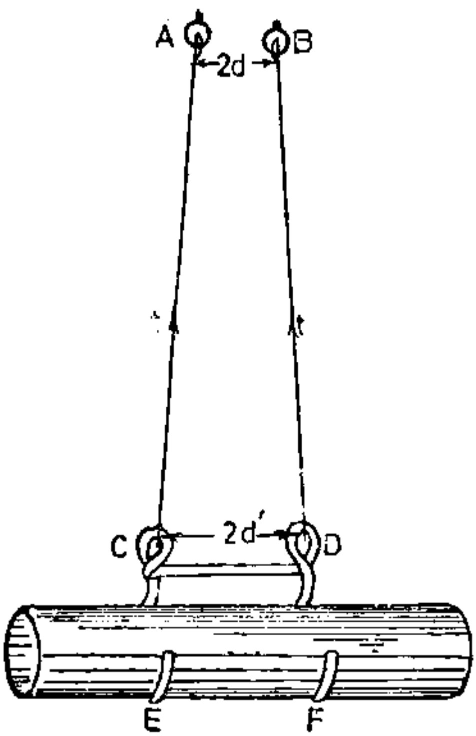
$$v = \omega r$$

حيث (r) نصف قطر محور الحدافة الملفوف حوله الخيط .

إذن يمكن التعويض عن كل من (v) ، (ω) فى المعادلة (١٨) وايجاد I (عزم القصور الذاتى للحدافة حول محور عمودى عليها ومارا بالمركز) .

٤ — ٩ التعليق المزدوج Bifilar suspension

تستخدم طريقة التعليق المزدوج لايجاد عزم القصور الذاتى لجسم حول محور مار بمركز الثقل . يعلق الجسم بحيث يكون محور الدوران رأسيا ويعين زمن الذبذبة (T) بايجاد زمن ذبذبة ٤٠ أو ٥٠ ذبذبة كاملة . إذا أريد مثلا تعيين عزم القصور الذاتى لاسطوانة حول محور مار بمركز الثقل . تعلق الاسطوانة (شكل ١٧) بحيث يقع محورها فى المستوى الأفقى . ويكون التعليق بواسطة سلكين مثبتين عند A ، B . فاذا أزيحت الاسطوانة قليلا فى المستوى الأفقى فانها تتذبذب .

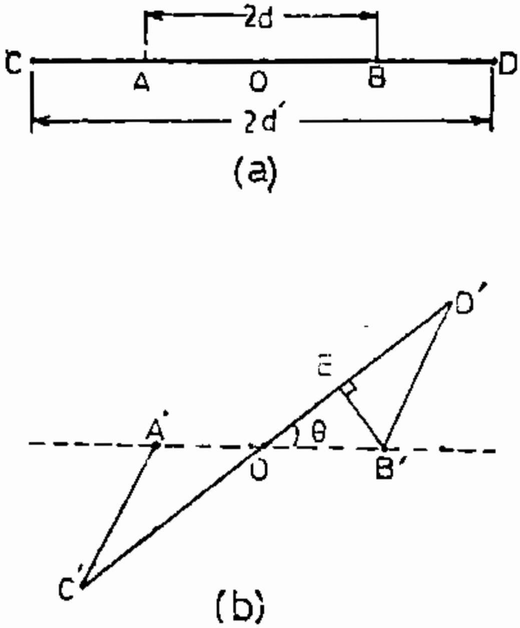


شكل (١٧)

نفرض أن الشد فى السلك هو(t)داين ونفرض أن (O) شكل(١٨)هو منتصف البعد (AB) . فاذا نظرنا من أعلى فان شكل (١٨ a) يبين مواضع الاربع نقط A ، B ، C ، D ٠

وإذا أزيح الجسم محدثا التواءآ فى السلكين فان A′،B′ هما مسقطا النقطتين A′B على المستوى الأفقى المار به الضلع C D ؟ D′،C′ هما موضعى النقطتين D,C بعد الازاحة .

نفرض أن (a) هى الزاوية التى يصنعها الخط DB مع الأفق (شكل ١٧) ٠



شكل (١٨)

∴ مركبة الشد فى الإتجاه الأفقى = $t \cos \alpha$

وحيث أن B' هى مسقط B فان المثلث $BB'D'$ قائم الزاوية

$$\therefore \quad \cos \alpha = \frac{B' D'}{l}$$

حيث (l) طول سلك التعليق

∴ القــــوة فى إتجاه $B' D'$

$$F = t \; \frac{B' D'}{l}$$

ومركبة هذه القوة فى الاتجاه العمـــودى على الجسم أى فى الإتجاه العمودى على $C'D'$:

$$F = \sin (ED'B') = F \frac{B'E}{B'D'} = t \frac{B'D'}{l} \cdot \frac{B'E}{B'D'}$$

$$= t \frac{B'E}{l}$$

وتعمل هذه القوة عند D' وفى اتجاه عمودى على الجسم . وتوجد قوة مماثلة تؤثر عند C' . ويتضح أن هاتين القوتين تعملان ازدواجا يعمـــل على حفظ الجسم فى حالة اتزان مع الازدواج الخارجى .

عزم هذا الازدواج $= C'D' . \frac{B'E}{l}\ t$

فاذا كانت زاوية الازاحة (θ) صغيرة فان :

$$B'E = OB' \sin \theta = d \times \theta$$

$$C'D' = 2d'$$

حيث (2d) المسافة بين B ، A ‏(2d') المسافة بين D'C

∴ عزم الازدواج

$$C = \frac{t.\ d.\ \theta}{l} .2d' = \frac{2d.\ d'\ \theta}{l} \times \frac{mg}{2} = \frac{mg}{l} dd'\theta$$

لأن الشد $= t = \frac{mg}{2}$

حيث (m) كتلة الجسم المعلق

ولكن $G = I\ddot{\theta}$

$$\therefore I \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{m\,gdd'}{l}\,.\theta$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة تعطى زمن الذبذبة :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I\,l}{m\,g\,dd'}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (19)$$

من الملاحظ أن زمن الذبذبة متساو لجميع الأجسام المتساوية فى الأبعاد والمنتظمة الكثافة . ولاثبات ذلك نفرض أن (ρ) هى الكثافة المنتظمة

$$\because I = \Sigma\, m\, r^2 = \Sigma\, v\, \rho\, r^2 = \rho\, \Sigma\, vr^2$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{gdd'} \cdot \frac{\Sigma v\, r^2}{\Sigma v}}$$

أن أى (T) لاتعتمد على الكثافة .

ويمكن إثبات ذلك عمليا بإيجاد اسطوانتين متساويتين فى الأبعاد أحداهما من الخشب والأخرى من الحديد . ثم تعلق كل منهما على حدة ويعين زمن الذبذبة فنجد أن (T) متساوية فى الحالتين .

من المعادلة (١٩) يمكن تعيين (I) عمليا كما يمكن حسابها من المعادلة .

$$I = M\left(\frac{L^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right)$$

حيث (2L) طول الأسطوانة ، (r) نصف قطرها .

كما يلاحظ من المعادلة (٩) أنه بتغيير T، l، d، d'

نجد أن العلاقة بين $\frac{l}{dd'}$ ، T^2 خط مستقيم .

٤ — ١٠ البندول المركب Compound pendulum

البندول المركب عبارة عن جسم متماسك تتوزع فيه الكتلة على جميع الحجم ويتذبذب حول محور ثابت . ويبين شكل (١٩) مقطعاً للجسم يمر بمركز الثقل (c) وعمودياً على المحور الأفقى الذى يدور حوله الجسم وأن (0) هو محور التعليق . إذا وقع مركز الثقل رأسيا تحت محور التعليق (0) فان الجسم يكون فى حالة سكون . أما إذا أزيح أزاحة صغيرة (θ) عن الوضع الرأسى فان الجسم يتذبذب .

فاذا كانت (M) هى كتلة الجسم ، (h) هى المسافة بين محور التعليق ومركز الثقل ، (g) عجله الجاذبية الأرضية فان عزم الأزدواج :

$$C = Mg\ h \sin\theta = Mg\ h\ \theta$$

على اعتبار أن (θ) ازاحة صغيرة بحيث يكون $\sin\theta = \theta$

$$\therefore\ I\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\ Mg\ h\ \theta$$

وهذه تمثل حركة توافقية بسيطة ويكون زمن الذبذبة الواحدة

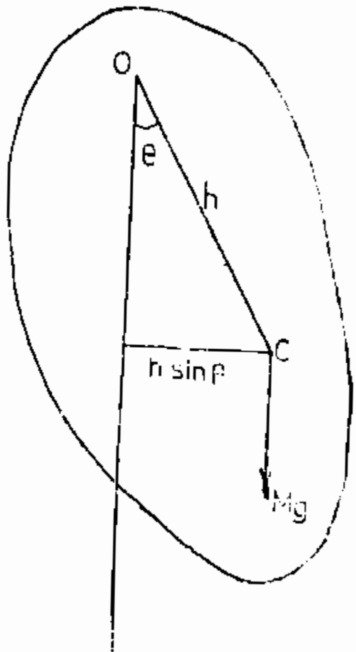
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{Mg\ h}} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (20)$$

حيث (I_o) هو عزم القصور الذاتى للجسم حول محور الدوران (0) . فاذا كان (I_c) هو عزم القصور الذاتى للجسم حول محور يوازى المحور السابق و يمر بمركز الثقل :

$$\therefore \; I_o = I_c + Mh^2$$

$$= Mk^2 + Mh^2$$

حيث (k) هو نصف قطر القصور للجسم حول محور يمر بمركز الثقل و موازيا لمحور الدوران .



(شكل ١٩)

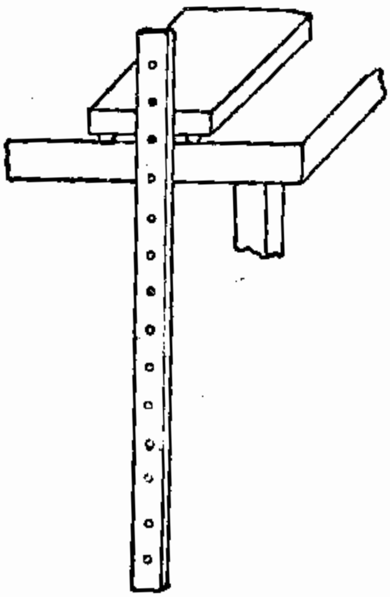
و بالتعويض فى المعادلة (٢٠)

$$\therefore \; T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{hg}} \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; (21)$$

ومنها يمكن ايجاد عجلة الجاذبية الأرضية (g) ونصف قطر القصور (k) عمليا كالآتى :

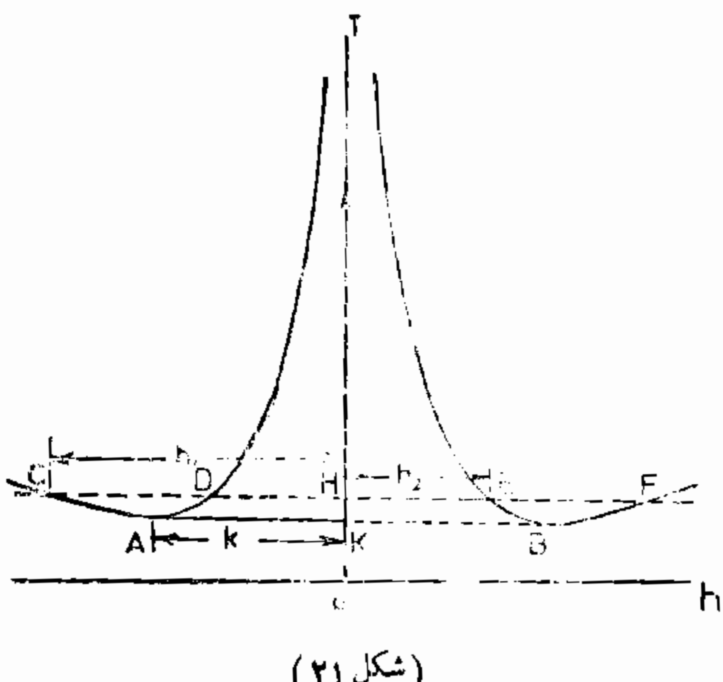
نأتى بقضيب طوله حوالى متر وله عدة ثقوب على أبعاد متساوية (حوالى ٢ سم) . يعلق القضيب من أحد الثقوب حول محور أفق (شكل ٢٠) .

ونتركه يتذبذب بحيث تكون زاوية الازاحة صغيرة ويحسب زمن الذبذبة الواحدة [T] بمعرفة زمن ذبذبة ٥٠ ذبذبة . تقاس المسافة [h] بين محور التعليق ومركز الثقل . وتكرر التجربة بتعليق القضيب من ثقب آخر وهكذا .



(شكل ٢٠)

نرسم العلاقة بين [T] ، [h] شكل (٢١) ومنه يتضح أن :



(شكل ٢١)

(١) للعلاقة جزئين متماثلين تماما كل لأحـــد شطرى القضيب على جانبي مركز الثقل .

(٢) يتضح من الشكل البيانى أن أقل زمن ذبذبة للبندول يأتى لو علق من النقطتين اللتين يمثلهما A , B واللتين على بعـــدين متساويين $[h_0]$ من مركز الثقل وبتفاضل المعادلة (٢١) بالنسبة إلى $[h]$ ووضع $\left(\frac{dT}{dh} \right)$ يساوى صفر نجد أن :

$$h_0 = k$$

وبالتعويض فى المعادلة (٢١) نجد أن أقل زمن ذبذبة للبندول هو :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2k}{g}}$$

وهذا يعنى أن البندول يعمل فى هذه الحالة كبندول بسيط طـــوله ($2k$) .

(٣) من المعادلة (٢١) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{k^2}{h} + h}{g}}$$

وهذه معادلة البندول البسيط الذى طوله $= h + \frac{k^2}{h}$

ويسمى بالبندول البسيط المتكافىء (Simple epuivalent Pendulum) والذى يعطى نفس زمن ذبذبة البندول المركب .

(٤) يمكن كتابة المعادلة (٢١) على الوجه الآتى :

$$T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{k^2 + h^2}{hg} \right)$$

$$\therefore h^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2} \cdot h + k^2 = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية فى (h) . أى أن فى البندول المركب يوجد طولين مختلفين يعطيان نفس زمن الذبذبة . فاذا كان جذرى المعادلة هما (h_2 ، h_1)

$$\therefore \quad h_1 \, h_2 = k^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (22)$$

ومنها يمكن تعيين (k) وذلك برسم خط موازى لمحور (k) مثل (CDHEF) فنجد أن $CH = h_1$ ، $HE = DH = h_2$ كما يمكن تعيين (k) عند أقل زمن ذبذبة فنجد أن $AK = k$.

(٥) من المعادلة (٢١) نجد أن :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(k - h)^2 + 2kh}{h \, g}}$$

منها نجد أن T تكون أقل ما يمكن إذا كان

$$(k - h)^2 = 0$$

أى إذا كان

$$k = h$$

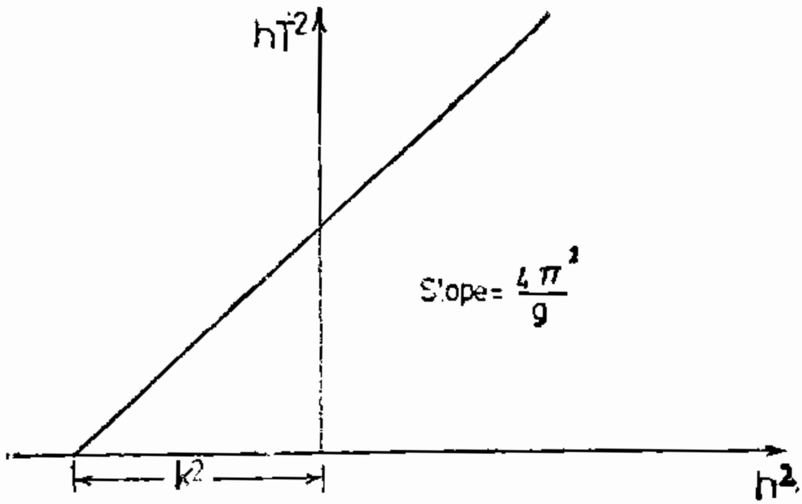
$$\therefore \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2k}{g}}$$

وقد أثبتنا ذلك بالتفاضل .

(٦) يمكن كتابة المعادلة (٢١) على الوجه الآتى :

$$h \, T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \; (h^2 + k^2)$$

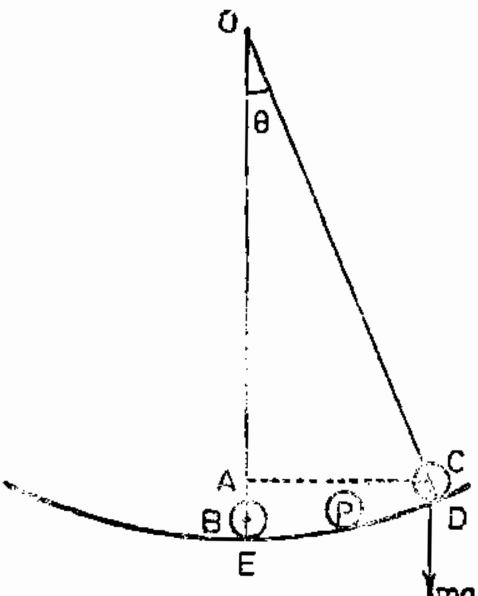
فاذا رسمنا العلاقة بين (hT^2) ، (h^2) نجدها خط مستقيم (شكل ٢٢) يقطع محور (h^2) فى جزء يعطى (k^2) أما ميل الخط فهو $\frac{4\pi^2}{g}$ ومنه يمكن ايجاد عجلة الجاذبية الأرضية (g)



شكل (٢٢)

٤-١١ ايجاد عجلة الجاذبية الأرضية بطريقة تدحرج كرة صغيرة فوق مرآة مقعرة

توضع المرآة المقعرة (شكل ٢٣) أفقيا فتحتها إلى أعلى بحيث يمكن أن أى تتدحرج فوقها كرة صغيرة من الصلب وتتذبذب فى مستوى رأسى ماراً بأسفل نقطة . ثم يحسب زمن الذبذبة (T) .



(شكل ٢٣)

فاذا كانت (R) هى نصف قطر تكور المرآة (الوجه الذى تتدحرج فوقه الكرة) ويمكن قياس ذلك بالاسفيرومتر (m) كتلة الكرة المعدنية ، (r) نصف قطرها ، (g) عجلة الجاذبية الأرضية فانه فى

حالة ما إذا كانت الأزاحة (BC) صغيرة بالنسبة إلى (R) وإذا وضعت الكرة عند (C) ثم تركت تتدحرج فان :

طاقة الوضع للكرة عند (C) $= mg.\ \overline{AB}$

ولكن :

$$AB = OB - OA = (R - r) - (R - r)\cos\theta$$
$$= (R - r)(1 - \cos\theta)$$

∴ طاقة الوضع :

$$= [R - r]\ 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ mg$$

$$= 2\ [R - r]\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 mg = \frac{1}{2}[R - r]\ \theta^2\ mg$$

لأن θ صغيرة ، $\theta = \sin$

من الشكل يتبين أى مركز الثقل يتحرك فى جزء من دائرة (BC) .
أى أن :

$$\frac{BC}{R - r} = \theta$$

∴ طاقة الوضع عند النقطة (C)

$$= \frac{1}{2}[R - r]\ \frac{\overline{BC}^2}{[R - r]^2}\ mg$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{mg}{[R - r]}\ \overline{BC}^2$$

ليس للكرة طاقة حركه عند النقطة (C) ولكن لها طاقة حــركة عند النقطة (B) .

$$= \tfrac{1}{2}\, m\, v^2_m + \tfrac{1}{2}\, I\, \omega^2_m$$

حيث (v_m) هى السرعة الخطية العظمى لمركز ثقل الكرة ، (ω_m) السرعة الزاوية العظمى للدوران ، (I) عزم القصور الذاتى للكرة حول محور مار بمركز ثقلها وعموديا على مستوى الرسم .

∴ طاقة الحركة عند (B)

$$= \tfrac{1}{2}\, m\, v^2_m + \tfrac{1}{2}\, I\, \frac{v^2_m}{r^2}$$

وعند أى نقطة متوسطة (P) تبعد (x) عن (B) على قوس الحركة فان:

طاقة الوضع + طاقة الحركة = ثابت

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}\, m\, x'^2 + \tfrac{1}{2}\, \frac{I}{r^2}\, x'^2 + \tfrac{1}{2}\, mg\, \frac{x^2}{(R - r)} = \text{constant}$$

حيث (x') هى السرعة عند النقطة (P) فى إتجاه القوس . وبالتفاضل :

$$\therefore\ m\, x'\, x'' + \frac{I}{r^2}\, x' \,.\, x'' + \frac{mg}{(R - r)}\, x \,.\, x' = 0$$

وبالقسمة على (x') نجد أن :

$$x'' = -\, \frac{mg}{(R - r)\left(m + \frac{I}{r^2}\right)}\, x$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدورى :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{mg}{(R-r)\left(m+\dfrac{I}{r^2}\right)}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)\left(m+\dfrac{I}{r^2}\right)}{mg}}$$

ولـكن :

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

$$\therefore\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)\dfrac{7}{5}}{g}} \qquad \dots\ \dots\ \dots\ (25)$$

ومن هذه المعادلة يمكن تعيين (g) . ولا تعتـــبر هذه الطريقة من الطرق الدقيقة فى قياس عجلة الجاذبية الأرضية .

تمارين

(١) قضيب رفيع طوله ١٢٠ سم وعرضه ٦ سم يتذبذب فى المستوى الرأسى كبندول حول النقطة (A) . أحسب البعد بين (A) وطرف القضيب عند أقل زمن ذبذبة .

(الجواب : ٣١ر٢٥ سم)

(٢) إذا حفر نفق فى الأرض فى إتجاه قطرها من السطح إلى السطح المقابل أثبت أن حركة جسم يسقط فى هذا النفق هى حركة توافقية بسيطة ثم أوجد زمن الذبذبة إذا علم أن الكرة الأرضية منتظمة الكثافة ونصف قطرها ٦٤٠٠ كيلومتر وعجلة الجاذبية الأرضية ٩٨٠ سم / ثانية ٢ .

إذا كانت (g) هى عجلة الجاذبية الأرضية على سطح الأرض .

∴ قوة الجاذبية المؤثرة على جسم كتلة (m) على سطح الأرض هى :

$$m\,g = \frac{G\,m\,M}{R^2} = \frac{G \times {}^4/_3\,\pi\,R^3\,D \times m}{R^2} = \frac{4\,\pi\,GRD\,m}{3} \quad (i)$$

حيث (M) هى كتلة الأرض ، (R) نصف قطر الأرض ، (G) الثابت العالمى للجاذبية ، (D) كثافة الكرة الأرضية .

قوة الجاذبية عندما تصل الكتلة (m) على عمق (d) مع سطح الأرض هى

$$m\,g' = \frac{G\,{}^4/_3\,\pi\,(R-d)^3\,D \times m}{(R-d)^2} = \frac{4\,\pi\,G\,(R-d)\,D \times m}{3} \quad (ii)$$

حيث (R - d) هو نصف القطر على بعد (d) من سطح الأرض ، (g') عجلة الجاذبية الأرضية عند هذا العمق .

بقسمة المعادلتين (i) ، (ii)

$$\therefore \quad \frac{g'}{g} = \frac{R - d}{R}$$

$$\therefore \quad g' = \frac{g}{R}(R - d)$$

$$= \frac{g}{R} \times \text{distance from the center of the earth}$$

أى أن عجلة الجسم الساقط فى النفق تتناسب مع بعد الجسم عن مركز الكرة ومتجه نحو هذا المركز .

أى أن الحركة توافقية بسيطة زمنها الدورى .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{6400 \times 1000 \times 100}{980}}$$

$$= \underline{\underline{84 . 6}} \text{ minutes}$$

(٣) اذا كان أقل زمن ذبذبة للبندول المركب هو ١ ثانية فما هى مواضع نقطتين على جانبي مركز ثقـــل القضيب اللتين عندهما يكون زمن الذبذبة ٢ ثانية .

(الجواب : ١٫٥٨ سم ، ٩٧٫٨ سم)

(٤) قضيب رفيع وطويل ومنتظم كتلته ١٠٠٠ جم . إذا تذبذب حول محور يبعد ٤٠ سم من مركز ثقله كان زمن الذبذبة ١٫٤٨ ثانية وإذا تذبذب حول محور مواز لهذا المحور ويبعد عنه مسافة قدرها ١٠ سم كان زمن الذبذبة ١٫٧ ثانية . إحسب .

(ا) عجلة الجاذبية الأرضية (ب) عزم القصور الذاتى للقضيب حول مركز الثقل (حـ) طول القضيب .

(الجواب : ٩٩٠٫٤ سم / ثانية^{٢} ، ١٠٤١٠٠٦٠ جم / سم^{٢} ، ٩٤٫٩ سم)