الباب الثالث

الجـاذبية (Gravitation)

٣ - ١ قانون نيوتن للجاذبية :

كل جسيم مادى ينجذب نحو أى جسيم مادى آخر بقوة تتناسب مع حاصل ضرب كتلتى الجسيمين وعكسيا مع مربع البعد بينهما . فاذا كان (m_2 ، m_1) هما كتلتى الجسيمين على الترتيب ، (d) المسافة بينهما فان القوة :

$$F = G . \frac{m_1 \, m_2}{d^2}$$

حيث (G) مقدار ثابت يسمى بالثابت العالمى للجاذبية . وإذا كانت وحدات الكتلة هى الجرام والمسافة بالسنتيمتر والقوة بالداين فقد وجد عمليا أن أحدث قيمة للثابت (G) هى :

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \ gm^{-1} \ cm^3 \ sec^{-2}$$

من ذلك نرى أن قيمـــة (G) صغيرة جدا ولذا فان قوى الجاذبية بين الأجسام التى على سطح الكرة الأرضية صغيرة جداً ويمكن إهمالها فى كثير من الحالات .

مثال ذلك كرتين كتلة كل منهما ١٠٠ كيلو جرام والمسافة بينهما ١ متر فان قوة الجاذبية بينهما :

$$F = 6.67 \times 10^{-8} \times \frac{100000 \times 100000}{(100)^2}$$

$$= 6.67 \times 10^{-2} \ dyn$$

٣ - ٢ حساب كتلة الكرة الأرضية :

حيث أن الكرة الأرضية كبيرة وكتلتها هائلة فان قوة جذب الأرض للأجسام التى على سطحها يكون كبيراً . ويمكن حساب كتلة الأرض كالآتى :ـ

نفرض أن كتلة الأرض هى (M) جم وأن جسما على سطحها كتلته (m) جم وأن نصف قطر الأرض هو ($R = 637 \times 10^6 cm$) وقوة جذب الأرض للجسم هى (F) داين :

$$\therefore F = mg$$

حيث (g) عجلة الجاذبية الأرضية وتساوى تقريبا ٩٨٠ سم/ثانية٢ ولكن:

$$F = G \frac{M \times m}{R^2}$$

$$\therefore G \frac{M \times m}{R^2} = mg$$

$$\therefore M = \frac{g}{G} R^2$$

$$= \frac{980 (637 \times 10^6)^2}{6.6 \times 10^{-8}}$$

$$= 597 \times 10^{25} gm$$

٣ - ٣ شدة مجال الجاذبية : (Gravitational field)

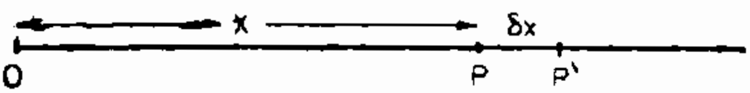
تعرف شدة مجال الجاذبية عند أى نقطة بأنها القوة المؤثرة على وحدة الكتل عند هذه النقطة . وعلى ذلك فان شدة المجال عند نقطة تقع على بعد (d) من كتلة قدرها (m) هى :

$$F = \frac{Gm}{d^2} \qquad \text{في اتجاه } m$$

ويجب ملاحظة أن شدة المجال كمية موجهة لها مقدار واتجاه .

٣ - ٤ جهد الجاذبية (Gravitational potential) :

يعرف الجهد عند أى نقطة فى مجال الجاذبيه بأنه الشغل المبـذول لتحريك وحـدة الكـتل من (∞) إلى هــــذه النقطة . نفرض وجود جسيم عنـد



شكل (٨)

النقطة (0) (شكل ٨) كتلته m . شدة المجال (F) عند النقطة (P) والتى تبعد بالمسافة (x) من (0) هى :

$$F = \frac{Gm}{x^2} \qquad \text{فى إتجاه } (0)$$

الشغل المبذول لتحريك وحدة الـكتل ضد الجاذبية المسافة (δx) من (P) إلى (P') هو :

$$G\,\frac{m}{x^2}\ .\ \delta x$$

∴ الشغل المبذول لتحريك وحدة الـكتل من (P) إلى (∞) هو :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{Gm}{x^2}\ .\ dx = \frac{Gm}{x}$$

∴ الشغل المبذول لتحريك وحدة الكتل من (∞) إلى (P) هو :

$$-\frac{Gm}{x}$$

∴ الجهد (V) عند (P) هو :

$$V = -\frac{Gm}{x}$$

فرق الجهد بين النقطتين (P)، (P′) هو الشغل المبذول لتحريك وحدة الكتل من (P′) الى (P) أى :

$$\delta V = -F\ \delta x$$

$$\therefore\quad F = -\frac{\delta V}{\delta x}$$

وفى الصورة التفاضلية

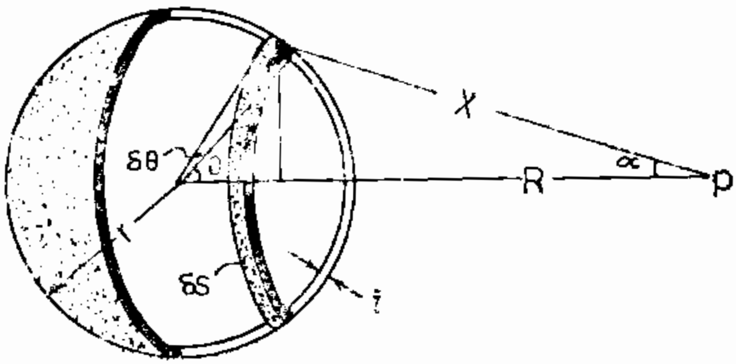
$$\therefore\quad F = -\frac{dV}{dx}$$

٣ - ٥ شدة المجال عند نقطة خارج كرة منتظمة:

نفرض أن لدينا قشرة كروية منتظمة كثافة مادتها (ρ) وسمكها (t) . نأخذ عنصرا حلقياً صغيرا (δS) من القشرة يقع بين الزاويتين (θ) ، (θ+δθ). تقع كل نقط هذه الحلقة على بعد (x) من النقطة (P) كما فى شكل (٩) .

نصف قطر هذه الحلقة $= r\sin\theta$

عرض الحلقة $= r\,\delta\theta$



شكل (٩)

∴ حجم الحلقة

$$2\pi\, r \sin\theta .\ r\,\delta\theta .\ t =$$

∴ كتلتها :

$$\delta M = 2\pi\ r^2 \rho t \sin\theta\ \delta\theta$$

وشد المجال عند النقطة (P) نتيجة لهذا العنصر الحلقى :

$$\delta F = G .\ \frac{2\pi r^2 \rho t \sin\theta .\ \delta\theta}{x^2} \cos\alpha \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

فى الاتجاه من (P) إلى مركز الكرة

ولكن من الشكل :

$$\cos\alpha = \frac{R - r\cos\theta}{x} \quad . \ . \ . \ . \quad (10)$$

$$،\ x^2 = R^2 + r^2 - 2R\, r \cos\theta \quad . \ . \ . \quad (11)$$

$$\therefore\ r\cos\theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R} \quad . \ . \ . \quad (12)$$

وبتفاضل المعادلة (١١) مع ملاحظة أن (r ، R) كميات ثابتة :

$$\therefore\ 2x\ dx = 2R\ r\ \sin\theta\ d\theta$$

$$\therefore\ \sin\theta\ \delta\theta = \frac{x}{Rr}\ dx$$

$$\therefore\ \sin\theta.\ \delta\theta = \frac{x}{Rr}\ \delta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

وبالتعويض من المعادلة (١١) فى المعادلة (١٠)

$$\therefore\ \cos\alpha = \frac{R}{x} - \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2Rx} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

وبالتعويض من المعادلتين (١٣ ، ١٤) فى المعادلة (٩)

$$\therefore\ \delta F = G\,\frac{\pi t\ \rho r}{R^2}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right)\delta x$$

وبتكامل هذه المعادلة مع ملاحظة أن حدود (x) هى من (R − r) إلى (R + r) .

∴ شدة المجال عند النقطة (P) نتيجة للقشرة الكروية كلها هى

$$F = \int_{R-r}^{R+r} \frac{G\pi\ t\ \rho\ r}{R^2}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right) dx$$

$$= \frac{G\pi\ t\ \rho r}{R^2}\int_{R-r}^{R+r}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right) dx$$

$$= \frac{G\pi\ t\ \rho\ r}{R^2} \times 4\,r$$

$$= G\frac{4\pi\ r^2\ \rho t}{R^2}$$

ولـكن كتلة القشرة الكروية = $M = 4\pi\ r^2\ \rho\ t$

$$\therefore\quad F = G\frac{M}{R^2}$$

من ذلك نرى أن القشرة الـكروية تعمل جذبا بالنسبة للنقط خارجها كما لو كانت كتلة الـكرة مركزة فى مركزها . ويمكن إثبات ذلك أيضا بالنسبة للكره المصمتة .

ومن أمثلة ذلك الـكرة الأرضية والشمس والقمر .

٣ - ٦ شدة المجال عند نقطه داخل كرة منتظمه :

من الشكل السابق إذا كانت النقطة(P) داخل القشرة الـكروية فان حدود (x) تقع بين (R+r) ، (r—R)

$$\therefore\quad F = \int_{r-R}^{R+r} \frac{G\pi\ t\ \rho\ r}{R^2}\left(\frac{R^2-r^2}{x^2}+1\right)dx$$

$$= \frac{G\pi\ t\ \rho\ r}{R^2}\int_{r-R}^{R+r}\left(\frac{R^2-r^2}{x^2}+1\right)dx$$

$$= \frac{G\pi\, t\, \rho\, r}{R^2}\times 0$$

$$= 0$$

من ذلك نرى أن شدة مجال الجذب عند أى نقطة داخل قشــــرة كروية يساوى صفر .

تمارين

١ — كتلتان مقدارهما ٢٠٠، ٨٠٠جم وتبعدان عن بعضهما بمقدار ١١سم، احسب (أ) شدة مجال الجاذبية عن نقطة تقع على بعد ٤ سم من الكتلة الأولى وعلى الخط الواصل بين الكتلتين (ب) جهد الجاذبية عند هذه النقطة، علما بأن ١ جول = ١٠^٧ أرج

(الجواب : صفر ، — ١٠^٩ جول/كيلوجرام)

٢ — أحسب الطاقة التي تربط الأرض في مدارها حول الشمس إذا علم أن كتلة الأرض ٦ × ١٠^٢٤ كيلو جرام وكتلة الشمس قدر كتلة الأرض ٣٠٠٠٠٠ مرة وأن نصف قطر مدار الأرض حول الشمس باعتباره دائريا هو ١٥٠ × ١٠^٩ متر .

إذا أهملنا تأثير جاذبية باقى الكواكب فإن :

الطاقة التي تربط الأرض في مدارها حول الشمس = الشغل المبذول ضد الجاذبية لنقل الأرض من مدار لانهائى إلى مدارها الحالى حول الشمس :

$$= -G\frac{M_1 M_2}{R}$$

$$= -\frac{6.67 \times 10^{-8} \times 6 \times 10^{27} \times 300000 \times 6 \times 10^{27}}{150 \times 10^{11}}$$

$$\simeq -5 \times 10^{40}\ \text{erg}$$

٣ — احسب الطاقة التي بها يمكن قذف جسم إلى الفضاء الخارجى للأرض بحيث لايعود إليها أبدا .

الشغل المبذول ضد الجاذبية لنقل كتلة قـدرها (m) من (∞) إلى سطح الأرض .

$$= - G \frac{M \times m}{R_e}$$

حيث (M) كتلة الأرض ،(R_e) نصف قطر الأرض .

∴ الطاقة اللازمة لقذف الجسم من سطح الأرض إلى ما لا نهاية تـكون أكبر من :

$$\frac{6.67 \times 10^{-8} \times 6 \times 10^{27} \times m}{637 \times 10^{6}} \text{ erg}$$

$$\simeq 9 \times 10^{11} \text{ arg/gm}$$

(٤) كرة منتظمة نصف قطرها ٢ سم . احسب النسبة المئوية للزيادة فى وزنها إذا لامستها من أسفل كرة أخـــرى نصف قطرها ٢٠ سم وكثافتها ١٢ جم / سم٣ علما بأن عجلة الجاذبية الأرضية ٩٨١ وثابت الجاذبية ٦٫٦٧ × ١٠^-٨ .

(الجواب : ٥٫٦٥ × ١٠^-٦).