الباب الثانى

الحركة التوافقية البسيطة

Simple Harmonic Motion

٢ - ١ الكميات الموجهة والكميات غير الموجهة (vectors and scalars)

الكمية الفيزيقية التى تحدد بمقدار واتجاه تسمى كمية موجهة (vector) مثل الازاحة والسرعة والقوة والعجلة . أما الكمية التى تحدد بمقدارها فقط فتسمى كمية موجهة (scalar) مثل الكتلة والحجم والكثافة .

٢ - ٢ السرعة الزاويه (angular velacity)

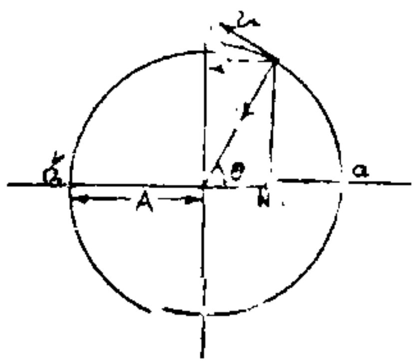
إذا تحركت نقطة حول أخرى كمركز فان معدل التغير فى الزاوية التى يرسمها الخط الواصل بينهما يسمى بالسرعة الزاوية .

٢ - ٣ العجلة الزاوية (angular acceleration)

هى معدل التغير فى السرعة الزاوية .

٢ - ٤ الحركه فى دائرة

إذا تحركت نقطة فى دائرة بسرعة زاوية منتظمة فانها تقطـــــع أقواسا متساوية فى فترات زمنيه متساوية أى مقدار سرعتها الخطيه ثابت بينما يتغير اتجاهها باستمرار .



شكل (١)

نفرض أن لدينا نقطة(Q) (شكل ١) تتحــرك بسرعة خطيــة (v)
ولنفرض أن النقطة بدأت فى التحرك من الوضع (a) وبعد زمن قدره (t)
ثانية وصلت النقطة إلى وضعها الحالى . تسمى (θ) بالازاحة الزاوية .

السرعة الزاوية $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

المسار $(aQ) = A \times \theta$ ويسمى بالازاحه الخطية

وعلى ذلك تكون السرعة الخطية للنقطة هى :

$$v = x' = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A\theta) = A\frac{d\theta}{dt} = A\theta' = A\omega$$

والعجلة الخطية :

$$x'' = \frac{d}{dt}(A\omega) = A\frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta''$$

فى إتجاه المركز

الزمن اللازم للنقطة كى تتحرك على محيط الدائرة مرة واحدة .

$$T = \frac{2\pi A}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

والتردد = $\frac{\omega}{2\pi}$

٢ ـ ٥ الحركة التوافقية البسيطة :

إذا كانت (N) هى مسقط النقطة Q على القطر aa' ، فكلما دارت النقطة (Q) حول الدائرة تحركت النقطة (N) من a إلى a' ثم من a' إلى a وتكررت هذه الحركة بانتظام كلما دارت (Q) دورة كاملة . وعلى ذلك فان الزمن اللازم للنقطة (Q) كى تتحرك حول الدائرة مرة واحدة هو نفس الزمن الذى تأخذه (N) .

حيث أن : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

فى زمن قدره (t) تكون الازاحة الزاوية

$$\theta = \omega t$$

فاذا كان بعد (N) عن المركز = x

$$\therefore x = A \cos(\omega t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وفيها A , ω ثابتان

$$\dot{x} = v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t) \qquad \ldots (4)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t) = -\omega^2 x \qquad \ldots (5)$$

أى أن :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad \ldots (6)$$

من المعادلة (٣) نجد أن موضع الجسيم Q دائما محصور بين ($x = A$) ، ($x = -A$) أى بين النقطتين a ، a' فى شكل (١) المتساويى البعد عن المركز وأنه يحتل النقطة (a) فى اللحظات :

$$t = 0 \,,\ \frac{2\pi}{\omega} \,,\ \frac{4\pi}{\omega} \,,\ \dots \quad \dots$$

كما يحتل النقطة a' فى اللحظات

$$t = \frac{\pi}{\omega} \,,\ \frac{3\pi}{\omega} \,,\ \frac{5\pi}{\omega} \dots \quad \dots$$

أى أن الجسيم يتحرك حركة تذبذبية بين النقطتين a ، a' وزمن انتقاله $\frac{2\pi}{\omega}$ وتعرف هذه الحركة بالحركة التوافقية البسيطة ويعرف البعد (A) بسعة الذبذبة والزمن $\frac{2\pi}{\omega}$ بزمنها الدورى .

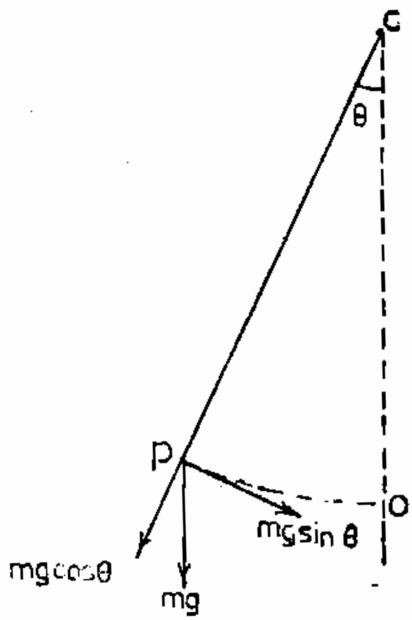
ويمكن تعريف الحركة التوافقية البسيطة كالآتى :

إذا تذبذبت نقطة حول نقطة أخرى ثابتة بحيث تكون عجلتها دائما متجهة نحو النقطة الثابتة وتتناسب تناسبا طرديا مع بعدها عنها فان حركتها تكون حركة توافقية بسيطة .

٢ ـ ٦ البندول البسيط : Simple pendulum

يتركب البندول البسيط من خيط خفيف مثبت من أحد طرفيه وفى الطرف الآخر تعلق كرة ثقيلة نوعا ما كتلتها (m) (شكل ٢) .

نفرض أن (θ) زاوية صغيرة جدا أى أن البندول أزيح إزاحة صغيرة عن وضعه الرأسى .



شكل (٢)

الـكرة تتحرك حركة توافقية بسيطة . القوة المؤثرة عليها .

$$F = -\, mg \sin \theta$$

$$\cong -\, m g \theta$$

لأن (θ) زاوية صغيرة

ولكن : $\quad x^{\cdot} = l\,\theta$

وبالتفاضل $\quad x = l\,\theta^{\cdot}$

$$\therefore F = m\,l\,\theta^{\cdot\cdot}$$

$$\therefore m\,l\,\theta^{\cdot\cdot} = -\, n g \theta$$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\frac{g\theta}{l}$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدورى

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

٢ ـ ٧ البندول المخروطى : (Conical pendulum)

إذا تحرك البندول البسيط على شكل مخروط بحيث تتحرك الكتلة (m) فى دائرة أفقية نصف قطرها (r) شكل (٣) فان :

$$r = l \sin\theta$$

واذا كانت (v) هى السرعة المنتظمة للكتلة فان :

القوة الطاردة المركزية $= \frac{m v^2}{r}$ فى الاتجاه الأفقى

وإذا كانت (F) هى قوة الشد فى الخيط فان :

مركبة قوة الشد فى الاتجاه الأفقى $= F \sin\theta$

∴ فى حالة الاتزان الأفقى :

$$F \sin\theta = \frac{m v^2}{r}$$

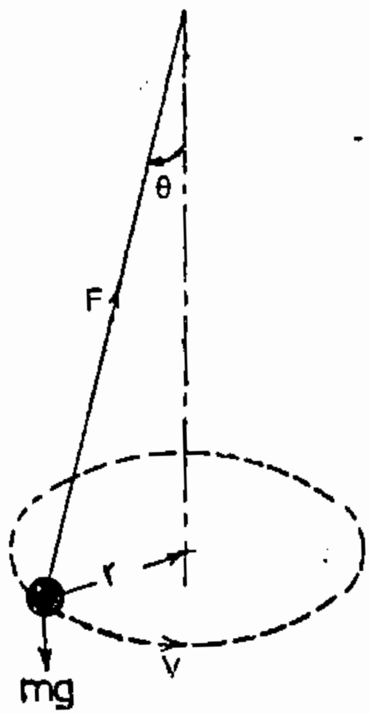
وفى حالة الاتزان الرأسى :

$$F \cos\theta = mg$$

وبقسمة المعادلتين :

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{rg \tan\theta} = \sin\theta \sqrt{\frac{gl}{\cos\theta}}$$



شكل (٢)

ولكن زمن الذبذبة :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi l \sin\theta}{\sin\theta \sqrt{\frac{l g}{\cos\theta}}}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\theta}{g}}$$

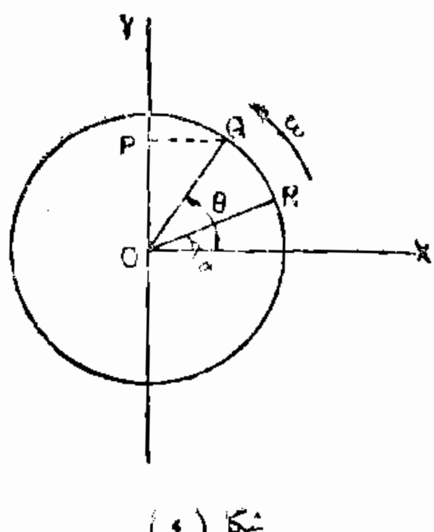
٢ — ٨ منحنيات الحركة التوافقية البسيطة

إذا حسب الزمن ($t = 0$) عندما تقع (Q) على المحور (0 x) فتكون الإزاحة (O P) (شكل ٤) هى :

$$y = A \sin\theta$$

$$= A \sin \omega t \qquad \dots \dots (7)$$

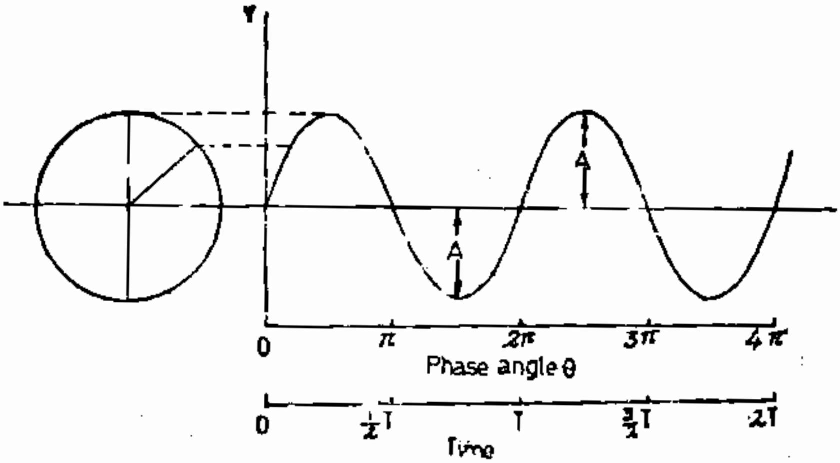
الزاوية (ωt) تسمى طور الذبذبة (Phase)



شكل (٤)

أما إذا حسب الزمن ($t = 0$) عندما تقع (Q) عند (R) حيث يصنع الضلع (O R) زاوية قدرها (α) مع المحور (ox) :

$$\therefore \quad y = A \sin(\omega t + \alpha) \qquad \dots \dots \dots (8)$$



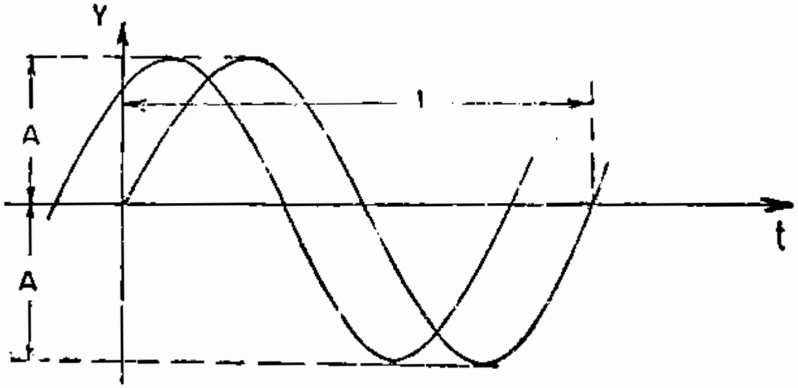
شكل (٥)

وطور الذبذبة هنا هو ($\omega t + \alpha$) وتسمى (α) ثابت الطـــور ، ويوضح شكل (٥) العلاقة البيانية بين الازاحة (y) والزمن (t) كما يوضح تغير الطور أثناء الذبذبة .

أما شكل (٦) فهو يمثل العلاقات البيانية للمعادلتين (٧ ، ٨) ومنه يتضح أن الحركتين لهما نفس سعة الذبذبة (A) ولا يختلفان إلا فى الطـــور وتسبق أحداهما الأخرى بفترة زمنيـة قدرها $\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)$ كما يتضح ذلك بوضع ($y = 0$) فى المعادلة (٨) .

٢ — ٩ محصلة عدة حركات توافقية بسيطة :

كثيرا ما يطلب تجميع عدة حركات توافقية بسيطة فى حركة واحدة ويمكن عمل ذلك كالآتى :



شكل (٦)

نفرض أن سعة الحركة الاولى هى (A) وسعة الحركة الثانية هى (B) وأن الحركتين لهما نفس التردد (f) أى لهما نفس السرعة الزاوية (ω)

لأن : $f = \frac{\omega}{2\pi}$

فإذا تساوت الحركتين فى الطور فان محصلتهما هى :

$$A \sin \omega t + B \sin \omega t = (A + B) \sin \omega t$$

أى أن المحصلة هى حركة توافقية بسيطة لها نفس التردد والطور وسعتها (A + B)

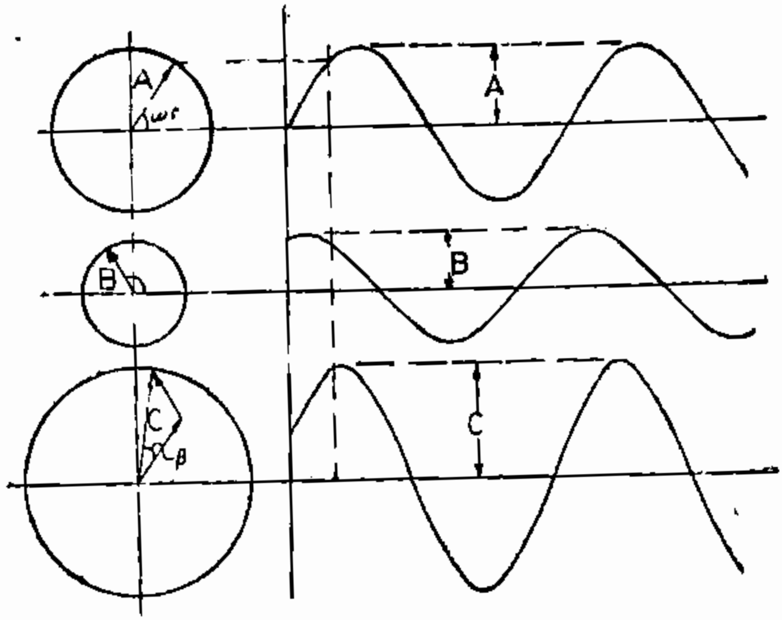
أما إذا أختلفت الحركتين فى الطور والسعة بأن يكون معادلة إحداهما

$$y = A \sin \omega t$$

ومعادلة الأخرى :

$$y = B \sin (\omega t + \alpha)$$

فيمكن إيجاد محصلة الحركة بيانيا كما فى شكل (٧) وذلك برسم مثلث يبين مقدار وإتجاه كل من (B ، A).



شكل (٧)

.٠. معادلة الحركة المحصلة هى :

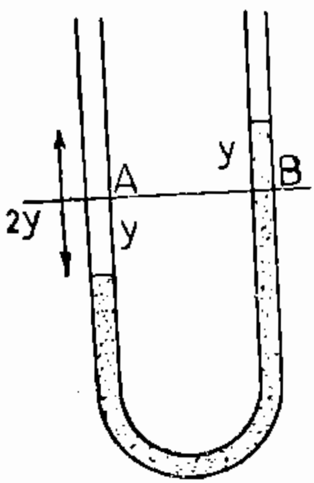
$$y = A \sin \omega t + B \sin (\omega t + \alpha)$$

$$= C \sin (\omega t + \beta)$$

حيث (C) هى السعه المحصلة ، (β) ثابت الطور للحركة المحصلة

تمارين

(١) وضعت أنبوبة على شكل حرف (U) رأسيا وملئت بالماء حتى ارتفاع ٣٠ سم . فاذا ضغط سطح الماء فى أحد الفرعين ثم ترك بعد ذلك أثبت أن حركة المـــاء فى الأنبوبة هى حركة توافقية بسيطة ثم أحسب زمنها الدورى .



شكل (٨)

افرض أن سطح الماء كان قبل الازاحة عند (AB) وأن سطح الماء فى الفرع الأيسر أزيح المسافة (y) وبالطبع سطح الماء قد ارتفع فى الفرع الأيمن نفس المسافة .

∴ الفرق بين ارتفاعى السائل بعد الازاحة $= 2y$

القوة الناتجة من هذا الارتفاع $= 2y \times a \times g \times d$

حيث (a) مساحة مقطع الأنبوبة باعتباره منتظما ، (g) عجلة الجاذبية

الأرضية ، (d) كثافة السائل = ١ فى حالة الماء .

الكتلة الكلية للسائل داخل الانبوبة :

$$= 30 \times 2 \times a \times d = 60 \times a \times d$$

$$\therefore \text{ acceleration } = \frac{\text{force}}{\text{mass}} = \frac{2\,y\,a\,g\,d}{60\,ad} = \frac{g}{30}\,y$$

أى أن العجلة تتناسب مع الازاحة .

∴ الحركة توافقية بسيطة زمنها الدورى

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{30}{980}} = 1.098 \text{ second}$$

(٢) أنبوبة زجاجية مملوءة بكرات الرصاص وتطفو رأسيا فى سائل كثافته ١٫٢ جم / سم٣ . فاذا كان طول الجزء المغمور من الأنبوبة هو ١٥ سم أحسب زمن الذبذبة الرأسية .

(الجواب : ٠٫٧٩٥ ثانية)

(٣) ارسم على ورقة مربعات موجة حركة توافقية بسيطة سعتها ٤ سم وطول الموجة ١٠ سم ، ثم ارسم فوقها موجة حركة توافقية بسيطة أخرى لها نفس السعة وطولها نصف طول الموجة الأولى . ركب الموجتين وكون منهما الموجة المحصلة .

(٤) جسم يتذبذب بحركة توافقية بسيطة بحيث تكون ازاحته (x) عند أى زمن (t) هى :

$$0 = 6 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ meters}$$

أحسب السرعة والعجلة عند ازمن (t = 0 ثانية)

واحسب أيضا تردد الذبذبة

(الجواب : - ٩ π $\sqrt{3}$ متر/ثانية ، - ٢٧ π^2 متر/ثانية٢ ، $^3/_2$)