الباب العاشر

الذبذبة القسرية والرنين

(Forced Vibration and Resonance)

١٠ ـ ١ الذبذبة القسرية

الذبذبة القسرية هى الذبذبة التى يقوم بها جسم بفعل ذبذبة قوية خارجية لها تردد يختلف عن التردد الطبيعى للجسم .

إذا طرقت شوكة رنانة ووضع عنقها على منضدة ، فان سطح المنضـــدة يجبر على التذبذب بتردد مساو لتردد الشوكة . وإذا لم يساو هذا التردد التردد الطبيعى لسطح المنضدة، فعندئذ يقال أن سطح المنضدة تذبذب ذبذبة قسرية . تتوقف سعة هـذه الذبذبة على مقدار تردد الشوكة مع أحـد الترددات الطبيعية لسطح المنضدة .

١٠ ـ ٢ الرنين

إذا تساوى تردد الشوكة مع أحد الترددات الطبيعية لسطح المنضدة فان هذا السطح يكتسب تدريجيا سعة أكبر فأكبر وأخيرا يتذبذب بسعة كبيرة، ويقال لهذه الذبذبة بالرنين ، وفيها تحدث مساعدة وتقوية للجسم المتذبذب من القوة التذبذبية الخارجية ، وذلك لأن الذبذبتين دائما متحدتى الطور .

١٠ ـ ٣ معادلة الحركة التوافقية البسيطه

إذا تذبذب جسم حول جسم آخر كمركز بحيث تكون عجلة الجسم

المتذبذب دائماً متجهة نحو المركز ، فان معادلة حركة الجسم يمكن كتابتها هكذا :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58)$$

ولايجاد حل هذه المعادلة نفرض أن الحل هو :

$$x = Ae^{mt}$$

$$\therefore \; \dot{x} = Ame^{mt}$$

$$\text{and} \qquad \ddot{x} = m^2 Ae^{mt}$$

ومعنى ذلك أن :

$$m^2 e^{mt} + \omega^2 e^{mt} = 0$$

$$\therefore \; m^2 + \omega^2 = 0$$

$$\therefore \; m = \pm \, i\omega \text{ where } i = \sqrt{-1}$$

ومعنى ذلك أن الحل هو:

$$x = A_1 e^{i\omega t}$$

أو

$$x = A_2 e^{-i\omega t}$$

∴ يمكن حل المعادلة (٥٨) على الصورة العامة :

$$x = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

حيث $(A_1 \text{ ، } A_2)$ ثوابت ،

$$\therefore x = A_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + A_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

$$= (A_1 + A_2) \cos \omega t + i (A_1 - A_2) \sin \omega t$$

$$= A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

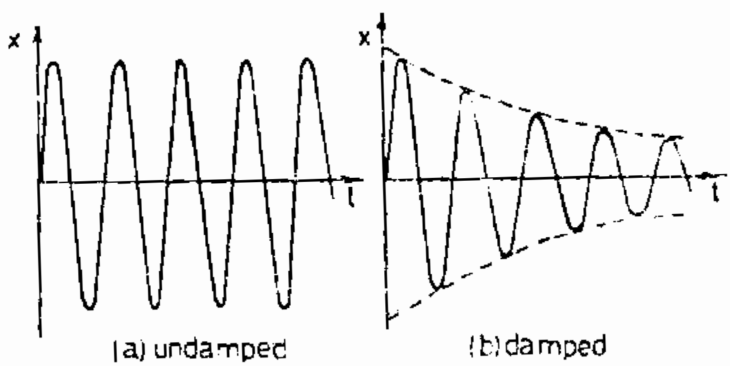
$$\therefore x = C \sin (\omega t + \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

حيث :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ and } \delta = \tan^{-1} \frac{A}{B}$$

ومن هذا يتضح أن السعة $= C$ وهى مقدار ثابت باستمرار كما فى شكل (a — ٦٧)

وأن الزمن الدورى للذبذبة $= \frac{2\pi}{\omega}$



شكل (٦٧)

والتردد $= \frac{\omega}{2\pi}$

١٠ ـ ٤ معادلة الحركة التوافقية المتخامدة (Damped Harmonic motion)

يحدث أحيانا أن تتخامد الحركة التذبذبية نتيجة لمقاومة خارجية مثل الاحتكاك أو مقاومة الهواء . وتتناسب قوة المقـــاومة على سرعة حركة الجسم المتذبذب .

فاذا كانت هذه القوة هى ($2k$) بالنسبة لوحدة الكتل ووحدة السرعه ، فان معادلة الحركة تصبح :

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

ويسمى (k) معامل التخامد

ولو فرضنا حلا لهذه المعادلة كما يلى :

$$x = Ae^{mt}$$

$$\therefore \quad \dot{x} = mAe^{mt}$$

$$، \quad \ddot{x} = m^2Ae^{mt}$$

ومعنى ذلك أن :

$$m^2 + 2km + \omega^2 = 0$$

$$\therefore \quad m = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$$

∴ الحل العام للمعادلة (٦٠) هو :

$$x = A_1 e^{(-k+\sqrt{k^2-\omega^2})t} + A_2 e^{(-k-\sqrt{k^2-\omega^2})t}$$

والشكل الحقيقى لهذا الحل يتوقف على القيمة النسبية لكل من (k ، ω) .

ا ـ اذا كانت :

$$k > \omega$$

فان : $\sqrt{k^2 - \omega^2}$ تكون حقيقية ولـكن أقل من (k)

∴ (x) تتكون من حدين فى كل منها أس (e) مقدار سالب . أى أن الحركة الاهتزازية تنعدم تدريجيا مثلما يحدث لو تذبذب بندول فى سائل كثيف .

ب ـ اذا كانت :

$$\omega = k$$

فان الحل الصحيح للمادلة(٦٠) هو :

$$x = e^{-kt}(A_1 + A_2)$$

أى أن الحركة الاهتزازية تنعدم بأسرع مايمكن ،

ويسمى التخامد فى هذه الحالة بالتخامد الحرج (Critical damping) .

ﺟ ـ اذا كانت :

$$k < \omega$$

فان : $\sqrt{k^2 - \omega^2}$ تكون تخيلية ، ويمكن كتابة :

$$\sqrt{k^2 - \omega^2} = iP$$

أى :

$$\omega^2 - k^2 = P^2$$

$$\therefore x = A_1 e^{(-k + iP)t} + A_2 e^{(-k - iP)t}$$

$$= e^{-kt}\left[A_1 e^{iPt} + A_2 e^{-iPt}\right]$$

وبمثل ماحصلنا على المعادلة (٥٩)

$$\therefore\ x = Ce^{-kt} \sin(Pt + \delta) \quad \ldots\ldots (61)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٥٩) نلاحظ :

١ — أن السعة (Ce^{-kt}) ليست ثابته بل تنعدم تدريجيا مع الزمن (شكل ٦٧ — b) .

٢ — التردد الذى كان $\frac{\omega}{2\pi}$ فى المعادلة (٥٩) أصبح $\left(\frac{P}{2\pi}\right)$ حيث :

$$P = \sqrt{\omega^2 - k^2}$$

والفرق بين الترددين صغير جداً فى حالة التخامد البطىء مثال ذلك إذا كان :

$$\frac{P}{2\pi} = 200 \text{ c/s}$$

وإذا وصلت سعة الحركة المتخامدة إلى $\left(\frac{1}{e}\right)$ من سعتها الأصلية بعد ثانية واحدة فان :

$$k = 1 \quad , \quad P = 400\,\pi$$

$$\therefore\ P^2 = 16000\,\pi^2 \simeq 1600000$$

$$\therefore\ \omega^2 = 1600001$$

أى أن (ω^2) تزيد عن (P^2) بمقدار ١ فى ١٦٠٠٠٠٠ بمعنى أن(ω) تزيد

عن (P) بمقدار ١ فى ٣٢٠٠٠٠٠ .

أى أن النقص فى التردد نتيجة لتخامد الحركة يكون صغيرا جـدا .

٢٠ — ٥ معادلة الحركة التذبذبية القسرية

إذا كانت القوة التذبذبية الخارجية المؤثرة على الجسم هى ($F \sin qt$) بالنسبة لوحدة الكتل ، فان معادلة حركة الجسم تصبح

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = F \sin qt \qquad . \; . \; . \; (62)$$

ولو فرضنا حلا لهذه المعادلة كالآتى :

$$x = A \sin (qt - \varepsilon)$$

فان :

$$\dot{x} = Aq \cos (qt - \varepsilon)$$

$$، \quad \ddot{x} = - Aq^2 \sin (qt - \varepsilon)$$

وبكتابة :

$$F \sin qt = F \sin [(qt - \varepsilon) + \varepsilon]$$

$$= F [\sin (qt - \varepsilon) \cos \varepsilon + \cos (qt - \varepsilon) \sin \varepsilon]$$

∴ الحل المفروض يتحقق إذا كان :

$$- A q^2 \sin (qt - \varepsilon) + 2k\, Aq \cos (qt - \varepsilon) + \omega^2 A \sin (qt - \varepsilon)$$

$$= F [\sin (qt - \varepsilon) \cos \varepsilon + \cos (qt - \varepsilon) \sin \varepsilon]$$

وحيث أن الحل يجب أن يكون صالحا لجميع قيم (ε)

∴ معامل كل من

$$\sin(qt - \varepsilon) \quad ، \quad \cos(qt - \varepsilon)$$

فى أى طرف من المعادلة يساوى معامل نفس المقدار فى الطرف الآخر

$$\therefore -Aq^2 + A\omega^2 = F\cos\varepsilon$$

$$،\ 2kAq = F\sin\varepsilon$$

وبالتربيع والجمع

$$\therefore \quad F^2 = A^2[(\omega^2 - q^2)^2 + 4k^2q^2]$$

$$\therefore A = \frac{F}{[(\omega^2 - q^2)^2 + 4k^2q^2]^{\frac{1}{2}}}$$

وبالقسمة :

$$\therefore \quad \tan\varepsilon = \frac{2kq}{\omega^2 - q^2}$$

أى أن المعادلة :

$$x = A\sin(qt - \varepsilon) \quad \ldots\ldots \quad (63)$$

هى حل المعادلة (٦٢) إذا كانت قيم (A ، ε) هى

$$A = \frac{F}{[(\omega^2 - q^2)^2 + 4k^2q^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$،\ \tan\varepsilon = \frac{2kq}{\omega^2 - q^2}$$

والحل الكامل للمعادلة (٦٢) هو :

$$x = Ce^{-kt}\sin(Pt + \delta) + A\sin(qt - \varepsilon)$$

حيث :

$$P = (\omega^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}$$

، (A ، ε) لهما القيم المذكورة :

أى أن معادلة الحركة تشمل حدين أحدهما يتخامد تدريجيا والآخر له سعة ثابتة ولذا فان تأثير الحد الأول على الثانى يكون قليلا .

المعادلة (٦٣) هى معادلة الحركة القسرية وفيها التردد يساوى تردد القوة الدورية المؤثرة أى :

$$= \frac{q}{2\pi}$$

وتتخلف عنها بطور قدرة (ε)

وحيث أن (sin ε) دائما موجب ، فان (ε) تقع بين (0 , π)

وحيث أن :

$$F \cos \varepsilon = A\,(\omega^2 - q^2)$$

فان (cos ε) تكون موجبة إذا كان : $q<\omega$

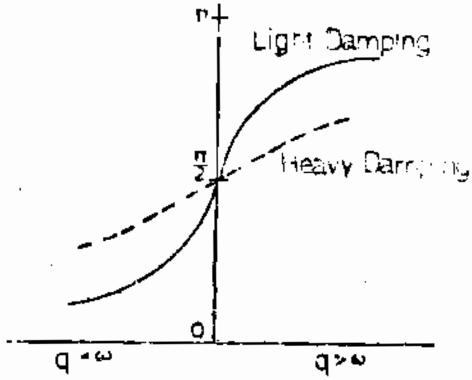
∴ (ε) تقع بين (0 ، $\frac{\pi}{2}$)

وإذا كان $\omega > q$

فان (cos ε) تكون سالبة

∴ (ε) تقع بين ($\frac{\pi}{2}$ ، π)

أى أن طور الذبذبة القسرية يتغير تبعا لتردد القوة المؤثرة كما فى شكل (٦٨) وكلما قلت قيمة (k) كلما زاد معدل تغير الطور لأن ($\tan \varepsilon$) تتناسب مع (k)



شكل (٦٨)

إذا كانت .

$$q = \omega$$

أى إذا كان تردد الذبذبة يساوى تردد القوة المؤثرة ، فان فرق الطور يصبح $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

بما أن :

$$A = \frac{F}{\left[(\omega^2 - q^2)^2 - 4k^2 q^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

∴ السعة (A) تكون أكبر ما يمكن إذا كان :

$$\frac{d}{dq}\left[(\omega^2 - q^2)^2 - 4k^2q^2\right] = 0$$

أى

$$-4(\omega^2 - q^2)\,q + 8k^2 q = 0$$

$$\therefore q^2 = \omega^2 - 2k^2$$

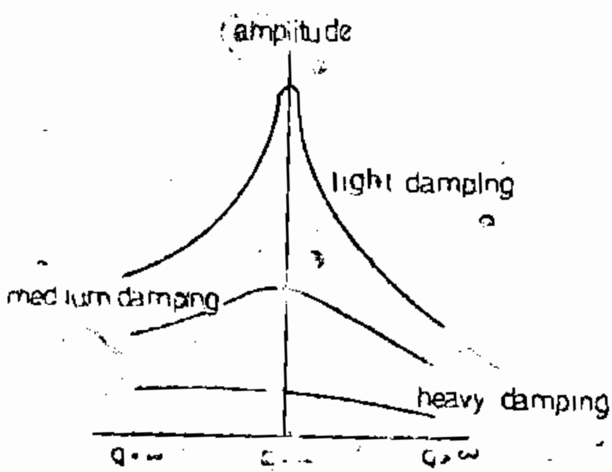
$$\therefore q = (\omega^2 - 2k^2)^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (65)$$

أى تكون السعة أكبر ما يمكن إذا كان تردد القوة المؤثرة

$$= \frac{(\omega^2 - 2k^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi}$$

وبالتعويض من (٦٥) فى المعادلة (٦٤) تكون النهاية العظمى للسعة هى :

$$A = \frac{F}{2k\,(\omega^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}}$$



شكل (٦٩)

∴ النهاية العظمى للسعة تزداد كلما نقص معامل التخامد (k) (شكل ٦٩ ،

تمرين

حركة تذبذبية متخامدة بسعة إبتدائية قدرها ٥٠٠مم تغيرت إلى ٥٠ مم بعد ١٠٠ ذبذبة ، الزمن الدورى لكل منها ٢٫٣ ثانية ، أحسب معامل التخامد .

إذا كان (n) هو عدد الذبذبات خلال الزمن (t)

$$\therefore t = nT$$

حيث (T) هو الزمن الدورى

ومن المعادلة (٦١)

$$C_t = C\,e^{-kt} = C\,e^{-kn\,T}$$

حيث : (C) هى السعة الابتدائية ، (k) معامل التخامد .

$$\therefore \log_e (C_t) = \log_e (C) - kn\,T$$

$$\therefore 2.3 \left[\log_{10} C - \log_{10} C_t \right] = kn\,T$$

$$\therefore 2.3 [\log_{10} 500 - \log_{10} 50] = k \times 100 \times 2.3$$

$$\therefore k = \frac{\log_{10} 10}{100} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$