الفصل الخامس

حساب الاحتمالات

(١)

معنى الاحتمال :

إن معنى كلمة الاحتمال في اللغة هو « ما لا يكون تصور طرفيه كافيًا بل يتردد الذهن في النسبة بينهما ، ويراد الإمكان الذهني »[١] . وكلمة Probability مشتقة من الكلمة اللاتينية Probare ومعناها يبرهن على » أو « يصدق على » هي ترجمة للكلمة اليونانية *ευλογον* والتي معناها معقول » أو « مدرك » . لذلك تشير كلمة Probability إلى احتمال وقوع حادث ما ، أو ترجيح صدق قضية من القضايا[٢] . وعلى ذلك يكون مفهوم الاحتمال مناقضًا لكل من اليقين Certainty والاستحالة Impossibility[٣] .

ويعرف العالِم المنطقي دى مورجان De Morgan(١٨٠٦ – ١٨٧١) الاحتمال بأنه « حالة العقل تجاه حدث مقبل ، أو أى شيء لا تتوافر لدينا معرفة مطلقة عنه »[٤] . العقل يكون إذن في حالة تردد في إصدار حكم محدد أو يقيني ، ذلك أن العقل في تعامله مع المستقبل لا يستطيع أن يعطي حكمًا إلا وكان الشك مدخلاً لمثل ذلك الحكم . فعلى سبيل المثال إذا ألقى شخص بقطعتي زهر النرد عشر مرات متتالية ، فإنه من النادر أن يكون الرقم (٦) إلى أعلى عليهما معًا في المرات العشر جميعها . إننا لا نتوقع أن يحدث هذا – رغم أنه ليس مستحيلاً – لذا يتطرق إلى توقعنا بعض الشك . ويندرج مثل هذا النوع من الشك تحت مفهوم الاحتمال[٥] .

---

(١) الجرجاني ، التعريفات ، القاهرة ، مكتبة الحلبي ، ١٩٣٨ ، صفحة ٧ .

(٢) Reese, Willian L., Dictionary of Philosophy and Religion, New Jersey, P. 220.

(٣) Stebbing S., A Modern Introduction to Logic 4th., edition London, 1945 p.364

(٤) Cohen, M., & Nagel, An Introduction to Logic, London, P. 165 .

(٥) Russell, B., Human Knowledge, London, 1976, P. 353.

ويقول رونز Runes(فى قاموسه الفلسفى) : إن الاحتمال ينشأ من اقتران جهلنا الجزئى بالطبيعة بالغة التعقيد وبشروط الظواهر ، مع قصور وسائل الملاحظة والتجريب والتحليل[١] . ولذا فمن الضرورى أن نضع فى اعتبارنا الطرق التى تؤدى بنا إلى تقريبات معقولة ، وتقويم نتائجها بالقياس إلى الدلالة النسبية الممكنة فى كل حالة[٢] . ويرى رونز أن الاحتمال يعبر عن علاقة بين المقدمات والنتائج حين تكون المقدمات غير كافية لتحديد يقين النتيجة . ومع هذا فالاستدلال الاحتمالى يجب أن يكون منطقيًا على أية حال ، حتى ولو لم تكن نتيجته مؤكدة ، ذلك لأن مقدماته مؤشر حقيقى لنتيجته[٣] .

والاحتمال هو التعبير العلمى عن المصادفة فى المجال الرياضى . ومن المفكرين من يرى استبدال « الامكان » بالاحتمال ، لما فى كلمة الاحتمال من دلالة ذاتية ومافى كلمة الإمكان من إحالة مباشرة على موضوع خارجى ، وإشارة إلى علاقات موضوعية[٤] . على حين أن هذه الإشارة إلى موضوع خارجى ليست بوجه عام شرطًا فى حساب الاحتمالات كفرع من فروع الرياضة ، وإن تكن شرطًا لدى مدرسة بعينها تريد أن تخرج بحساب الاحتمالات من المجال الرياضى لتجعل منه عِلمًا موضوعيًا كالفيزياء مثلاً – سنوضح هذه المسألة فى الفصل السابع من هذا البحث . والحق ، إنه على الرغم من النجاح البالغ الذى حققه حساب الاحتمالات من الناحية التطبيقية فى الفيزياء الذرية ، وفى علم الحياة ، وفى غير ذلك من أوجه النشاط العلمى الحديث ، فإن الخلاف مازال على أشده حول تفسيره ودلالته الحقيقية . ولاشك أن أحد الأسباب الكثيرة الداعية إلى هذا الخلاف ، هو وضع حساب الاحتمالات نفسه فى منطقة وسطى بين الرياضيات والعلوم التجريبية ، حتى ليقال عنه فى هذا الصدد أن التجريبيين يتصورون أنه نظرية من النظريات الرياضية على حين أن الرياضيين يتصورون أنه واقعة تجريبية[٥] .

ولكنه « الاحتمال » معان كثيرة ومتعددة ، ومع ذلك يمكن حصرها فى المعانى الثلاثة الآتية[٦] :

---

(١) Runes , Dagobert D. , Dictionary of Philosophy , New Jersey , 1980 , P . 251 .

(٢) Ibid.,P.251.

(٣) Ibid.,P.251.

(٤) محمود أمين العالم ، فلسفة المصادفة ، صفحة ١٩٧ .

(٥) محمود أمين العالم ، فلسفة المصادفة ، صفحة ١٩٧ .

(٦) محمود فهمى زيدان ، الاستقراء والمنهج العلمى ، صفحة ١١٦ وما بعدها .

١ – المعنى الذى ينطوى عليه استخدامنا للاحتمال فى حياتنا اليومية والذى يعبر عن أن مضمون القضية الاحتمالية ونقيضه ممكن ، كأن أقول لصديقى : « من المحتمل أن أقوم بزيارتك غدًا » .

إن احتمال صدق هذه القضية يعادل كذبها .

٢ – المعنى الثانى للاحتمال وهو المتضمن فى نظريات الاحتمال الرياضى ، وفيه نجد أن القضية الاحتمالية ليست قضية يقينية كما أنها ليست قضية مستحيلة ، وإنما تقف بين اليقين والاستحالة . نرمز لليقين بالواحد الصحيح ، وللاستحالة بالصفر ، ونرمز للاحتمال بأى كسر من الكسور الواقعة بين الواحد والصفر .

٣ – المعنى الثالث ، وهو التعبير عن درجة عالية من التصديق ، كالتعميمات الاستقرائية فى العلوم الطبيعية ، والتى نصفها بأنها احتمالية ، بمعنى أن لدينا درجة عالية من الاعتقاد فى صحتها فى المستقبل ، وإن كانت لا ترتفع تلك الدرجة إلى اليقين .

ولقد بُذِلَت محاولات عديدة لتأسيس منطق للاحتمال ، ولكن معظم هذه المحاولات واجهت اعتراضات قوية بسبب إغفالها التمييز الدقيق للتصورات المختلفة للاحتمال ، غير أن هناك إجماع عام على وجود نظرية رياضية فى الاحتمال ترتكز على أسس راسخة ، وأنها فرع متطور من الرياضيات الحديثة[(١)] غير أن منطق الاحتمال – كما يقول « رسل » – أقل اكتمالاً وقبولاً من المنطق الصورى[(٢)] ، ولذا ينبغى علينا أن نتجنب وضع تعريف جامع مانع للاحتمال ، وذلك لسبب بسيط ، هو أنه لا وجود لمثل هذا التعريف . كما أننا لا نجانب الصواب إن قلنا أنه ينبغى النظر إلى كل تعريف للاحتمال على أساس أنه تعريف لنظرية بعينها يخصها هى دون غيرها . فى حين لا توجد نظرية واحدة فى الاحتمال ، بل هناك أنواع متعددة من النظريات ، يندرج تحت كل نوع عدة نظريات قد تختلف فيما بينها[(٣)] . أهم تلك الأنواع ، نوعان : نوع يضم نظريات الاحتمال التى هى فرع من الرياضة البحتة ، ونوع يضم نظريات الاحتمال التي تعالج مشكلة الاستقراء . وليس معنى هذا أن هناك فصلاً حاسمًا بين هذين النوعين من النظريات ، فهناك من

(١) Russell, B., Human Knowledge, p. 356.

(٢) Ibid., P. 355.

(٣) د . محمود فهمى زيدان ، الاستقراء والمنهج العلمى ، صفحة ١١٥ .

أصحاب الاحتمالات الرياضية من أراد أن يستخدم نظريته الرياضية فى حلّ مشكلة الاستقراء ، وكل عالِم له نظرية فى الاحتمال الاستقرائى إنما شارك فى إقامة أو مناقشة نظريات الاحتمال الرياضى ، لأن للاحتمال الاستقرائى أساسًا فى الاحتمال الرياضى[١] .

ولقد كانت « المصادفة » هى أول ما تناولته نظرية الاحتمالات بالبحث ، ولذا ينبغى علينا أن نحدد معنى « المصادفة » قبل المضى فى حديثنا عن حساب الاحتمالات .

(٢)

الضرورة والمصادفة :

المعنى الشائع للمصادفة TUX3 هو كل « ما يخرج على النظام والقانون المعروف ، ولا يبدو له سبب ولا غاية واضحة ، وهو أشبه ما يكون بالاتفاق »[٢] . ومفهوم المصادفة على هذا النحو يناقض مفهوم « الضرورة » necessity فالضرورى هو « ما لا يمكن ألا يكون أو ما لا يمكن أن يكون بخلاف ما هو عليه . ويسمى الواجب ، وهو ما يمتنع عدمه »[٣] . فالشىء إما ضرورى أو مصادف ، ولا سبيل إلى أن يكون ضروريًا ومصادفًا معًا . ولما كان الضرورى هو موضع العلم ، كانت المصادفة هى الموضوع الذى يتجنبه العلم ، وذلك لأن الضرورى يمكن صياغته فى قانون ، أما المصادفة فلا تخضع لتحديد القانون[٤] .

ولقد كان أرسطو هو أول من حدد معنى المصادفة (البخت)[٥] . ذهب إلى أنها علة ، ولكنها علة بالعرض ، فالمصادفة عنده هى اللقاء العرضى الشبيه باللقاء القصدى . مثال ذلك أن يحفر الإنسان ليغرس شجرة فيجد كنزًا[٦] . كما ميّز أرسطو بين المصادفة و « تلقاء النفس »[٧] على أساس أن المصادفة توجد فى الأشياء التى تعمل عن إرادة

(١) المرجع السابق ، صفحات ١٢٠ – ١٢١ .
(٢) مجمع اللغة العربية ، المعجم الفلسفى ، القاهرة ، ١٩٧٩ ، صفحة ١٨٥ .
(٣) المرجع السابق ، صفحة ١٠٩ .
(٤) محمود أمين العالم ، فلسفة المصادفة ، صفحة ٣١ .
(٥) المصادفة أو البخت = Fortune , Chance , TUX3
(٦) أرسطو طاليس ، الطبيعة ، ترجمة اسحق بن حنين ، تحقيق د . عبد الرحمن بدوى ، القاهرة ، الهيئة العامة للكتاب ، ١٩٨٤ ، صفحة ١٣١ .
(٧) تلقاء النفس = Spontaneité , Spontaneity , To aυτομα τον

وروية ، أما تلقاء النفس « فإنه قد يكون فى سائر الحيوان ويكون فى كثير مما لا نفس له ، مثال ذلك أن نقول أن الفرس أتانا من تلقاء نفسه حتى سلّم بمجيئه إلينا ، إلاّ أن مجيئه إلينا لم يكن قصدًا منه للسلامة » . وعلى ذلك فإن تلقاء النفس – هو فى رأى أرسطو – أعم وأشمل من المصادفة ، إذ كل ما يحدث بالمصادفة فهو يحدث بتلقاء النفس . ولكن ليس كل ما يحدث بتلقاء النفس كان حدوثه بالمصادفة[1] . ويرى أرسطو أن الحوادث أو الوقائع التى تحدث دائمًا وفى الغالب وبنفس الطريقة لا يمكن أن نقول عنها إنها تحدث مصادفة بل الحقيقة إنها تحدث بالضرورة[2] .

والمصادفة والضرورة كلمتان متضايفتان ، أى أن الواحدة منهما لا تفهم إلا مقرونة بالأخرى ، فمعنى المصادفة لا يتبين إلا بالنسبة إلى معنى الضرورة ، والعكس صحيح أيضًا . وتكون العلاقة بين شيئين « أ » و « ب » – من حيث الاتصال أو المصادفة – إحدى الحالات الثلاث الآتية[3] :

١ – إما أن « أ » تقتضى « ب » بالضرورة ، مثال ذلك أن صفة البياض فى الشيء تقتضى أن يكون ذلك الشيء ممتدًا .

٢ – وإما أن « أ » تستبعد « ب » بالضرورة ، مثال ذلك أن وجود الشيء « الآن » وفى « هذا الموضع » يستبعد غيابه « الآن » ومن « نفس الجهة »[4] .

٣ – وإما أن وجود « أ » لا يعنى شيئًا بالنسبة لوجود « ب » فقد توجد « ب » وقد لا توجد على حد سواء . كأن أصف الكرة بأنها بيضاء . فقد تكون الكرة بيضاء أو لا تكون . فليس هناك ضرورة لأن تكون بيضاء ولا تكون حمراء مثلاً . فإذا كانت بيضاء كان ذلك على سبيل المصادفة .

والحق أن لفكرة المصادفة عدة معان متباينة ، نستبقى منها معنيين : مصادفة مطلقة ومصادفة نسبية[5] .

---

(١) أرسطو طاليس ، الطبيعة ، ترجمة اسحق بن حنين ، تحقيق د . عبد الرحمن بدوى ، القاهرة ، الهيئة العامة للكتاب ، ١٩٨٤ ، صفحة ١٢٩ .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ١١٧ .

(٣) د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحة ٣٣٨ .

(٤) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

(٥) محمد باقر الصدر ، الأسس المنطقية للاستقراء ، صفحة ٤١ .

١ – المصادفة المطلقة : وهى أن يوجد شىء بدون سبب اطلاقًا ، فهى ناتجة عن عدم وجود علة . وهى تعبر عن غياب السابقة المحددة[١] .

٢ – المصادفة النسبية : وهى تعبر عن غياب القصد المدبر (كالمصادفة الناتجة عن عدم وجود غاية)[٢] ، كوجود حادثة معينة لتوافر سببها ويتفق اقترانها بحادثة أخرى مصادفة .

وعلى هذا الأساس يمكن القول بأن المصادفة المطلقة هى : أن توجد حادثة وجودًا مستقلاً بدون أى لزوم منطقى أو واقعى ، أى بدون سبب . أما المصادفة النسبية : فهى اقتران حادثتين بدون أى لزوم منطقى أو واقعى لهذا الاقتران ، أى رابطة سببية تحتم اقتران إحداهما بالأخرى[٣] .

والمصادفة المطلقة مستحيلة من وجهة نظر المذهب العقلى[٤] الذى يؤمن أصحابه بمبدأ السببية بوصفه مبدأ عقليًا قبليًا . لأن المصادفة المطلقة تتعارض مع مبدأ السببية ، فمن الطبيعى لكل من يؤمن بمبدأ السببية أن يرفض المصادفة المطلقة[٥] ، وأما المصادفة النسبية فلا تتضمن استحالة ، لأنها لا تتعارض مع فكرة السببية . فالمصادفة النسبية لا تنكر القول بأن الطبيعة تتكون من مجموعات من الظواهر التى تخضع كل منها لقانون يحددها تحديدًا ضروريًا ، وقد تتداخل هذه المجموعات فى لحظة معينة فتحدث المصادفة . فعندما نقول إن صديقين تقابلا اتفاقًا ، أو إن قالبًا سقط من حائط فقتل بالصدفة شخصًا مارًا ، نعنى بذلك أن المقابلة تبدو مقصودة ما دامت قد وصلت إلى نقطة التقى فيها الاثنان ، وأن سقوط الحجر يبدو منطويًا على قصد القتل ، لشدة ما يبدو لنا أنه قد قصد المار المشار إليه بالذات . ولكن الأمر فى الواقع بخلاف ذلك . فما يبدو أنه قصد مدبر لا يطابق أية حقيقة واقعية ، فليس ثمة قوة فاعلة هيأت المقابلة[٦] ، أو وجهت الحجر .

---

(١) بول موى ، المنطق وفلسفة العلوم ، صفحة ٦٦ .

(٢) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

(٣) محمد باقر الصدر ، الأسس المنطقية للاستقراء ، صفحة ٤١ .

(٤) فى كثير من الأحيان يقتصر اسم « المذهب العقلى » Rationalism فى الكتابات الفلسفية على مذاهب عقلانية معينة فى العصر الحديث ، بينما يطلق على المذاهب التى تميز بين عالَم الأشياء كما نراها فى الواقع وبين عالَم الأفكار كما تدركها العقول اسم « المثالية » Idealism تمييزًا لها عن السابقة . ولكننا سوف نستخدم فى هذا البحث اسم « المذهب العقلى » بالمعنى الواسع بحيث يشمل « المثالية » أيضًا .

(٥) المرجع السابق ، الموضع نفسه .

(٦) بول موى ، المنطق وفلسفة العلوم ، صفحة ٦٦ .

غير أن بعض الفلاسفة أعتقدوا أن فى وسعهم تأكيد وجود الصدفة وجودًا فعليًا ، ومن هؤلاء كورنو Cournot فالصدفة عنده تنحصر فى نظام « العلية » . فسقوط الحجر مثلاً يكّون هو وسوابقه وشروطه (تماسكه الواهى بالسقف ، هبوب الريح فى اتجاه معين ، وفى لحظة معينة ، وانخفاض الضغط الجوى) سلسلة حتمية تمامًا . ومن جهة أخرى ، فإن مرور السائر عاثر الحظ يكّون هو وسوابقه وشروطه (رغبته فى النزهة أوالذهاب إلى عمله) سلسلة أخرى حتمية كالسابقة ، وتقابل السلسلتين هو الذى لا يخضع للحتمية ، فالحتمية الأولى خاصة بالظواهر الجوية ، والثانية نفسية[١] .

وتمتاز نظرية « كورنو » بأنها ترجع مختلف تعريفات المصادفة إلى تعريف واحد . فليس ثمة إلا مصادفة واحدة ، هى تقابل سلاسل مستقلة . والنظرية لا تنكر الحتمية بالمعنى الصحيح ، بل تجزئها ، وتفصلها إلى سلاسل وخيوط متميزة[٢] .

إن المصادفة لا تتنافى مع الحتمية إلا إذا كانت كل حقائق الوجود وحوادثه مستقلة إحداهما عن الأخرى ، ولكن الواقع غير ذلك ، إذ من حقائق الوجود ما يقتضى بالضرورة حقائق أخرى ، وإذن فالمصادفة والحتمية لا يتناقضان ، أى أن الحادثة الواحدة المعينة قد تكون مصادفة بالنسبة لشىء ، وحتمية بالنسبة لشىء آخر[٣] .

(٣)

النشأة التاريخية لمفهوم الاحتمال :

لقد صار مفهوم الاحتمال ؛ كما يستخدم فى الرياضيات والفيزياء الرياضية والعلوم الاحصائية ، موضوعًا لأحد أفرع الرياضة البحتة ، يُطلق على هذا الفرع اسم « حساب الاحتمالات » ، ويعتمد حساب الاحتمالات على المعادلات الرياضية المجردة ، كما يعتمد فى تطبيقاته على مناهج الإحصاء الرياضية[٤]. ولقد بلغ «حساب الاحتمالات» حدًا كبيرًا من الاكتمال، رغم نشأته القريبة، إذ بدأ مع أبحاث باسكال Pascal، وفيرما Fermat[٥]،

(١) المراجع السابق ، صفحة ٦٨ .
(٢) المرجع السابق ، الموضع نفسه .
(٣) د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحة ٣٤٠ .
(٤) Reichenbach, H., Experience and Prediction, Chicago, The University of Chicago, 1952, P. 298.
(٥) Ibid., P.298

وذلك فى صيف عام ١٦٥٤ عندما طرح الشفاليـه دى ميريـه Chevalier de Méré على باسكال سؤالين متعلقين بألعاب الحظ ، يقول السؤال الأول : « على فرض أننا نلعب الزهر (النرد) . فما هو أقل عدد من الرميات يستطيع المرء بعدها أن يتوقع أن يظهر رقم ٦ فى زهرتى اللعب معًا ؟ » . أما السؤال الثانى ، فيقول : « إذا أوقف اللعبان لعبهما مختارين قبل نهاية الدور ، وبحثا عن تقسيم عادل لما جاء به الحظ لكل منهما ، فما نصيب كل منهما تبعًا لاحتمال كسبه الدور فى ذلك الوقت ؟ »[١] .

لقد نجح باسكال فى الإجابة عن السؤالين ، وتوصل إلى اكتشاف طريقتين من طرق حساب الاحتمالات ، واكتشف ثالثتهما فيرما » الذى راسله بسكال فى ذلك الوقت ، وقد نشرت ثلاث من هذه الرسائل – التى كُتِبَت سنة ١٦٥٤ – عام ١٦٧٩ ، ثم أُعيد نشرها فى مجموعة مؤلفات بسكال سنة ١٨١٩ . ولقد كان منهج بسكال يقف عند حد لاعبين . أما منهج فيرما فكان يقوم على الاقترانات المتعددة ، ويمتد ليشمل أى عدد من اللاعبين . ولقد دار النقاش بين بسكال وفيرما حول هذه النقطة ، اعترف باسكال فى نهايته بسلامة منهج فيرما[٢] .

ومن بين مسائل الخلاف التى أثيرت بين باسكال وفيرما أيضًا هذه المسألة البسيطة :

شخص عليه أن يرمى الرقم ٦ بزهرة اللعب فى ٨ رميات ، فلو افترضنا أنه رمى ثلاث رميات بدون نجاح ، فما مقدار نسبة ما يسمح له بأخذه من الرهان لو تنازل عن الرمية الرابعة ؟

إن مصادفة النجاح فى الرمية الواحدة المستقلة هى $\frac{١}{٦}$ ، وعلى هذا فله أن يأخذ $\frac{١}{٦}$ الرهان لو تنازل عن رمية من الرميات ، على أن الرمية الرابعة ليست مستقلة . فالرمية الأولى وحدها هى التى تساوى $\frac{١}{٦}$ ، والثانية تساوى $\frac{١}{٦}$ الباقى أى $\frac{٥}{٣٦}$ من الرهان ، والثالثة تساوى $\frac{١}{٦}$ الباقى أى $\frac{٢٥}{٢١٦}$ ، أما الرمية الرابعة فتساوى $\frac{١}{٦}$ الباقى الأخير أى تساوى $\frac{١٢٥}{١٢٩٦}$ من الرهان[٣] . وهكذا كانت مسألة النقط هى المسألة الرئيسية التى أثارت الخلاف ، ووضعت فى الوقت نفسه النواة الأولى لحساب الاحتمالات .

(١) د . نجيب بلدى ، بسكال ، القاهرة ، دار المعارف ، سلسلة نوابغ الفكر الغربى ، ١٩٦٨ ، صفحة ٤٠ .
(٢) محمود أمين العالم ، فلسفة المصادفة ، صفحة ١٩٩ .
(٣) المرجع السابق ، صفحة ٢٠٠ .

إن تصور الاحتمال الرياضي (حساب الاحتمالات) ، وإن كان قد بدأ في النصف الثاني من القرن السابع عشر على يد باسكال وفيرما – كما أشرنا – فإنه استمر في تطوره بفضل جهود لابلاس Laplace وجاوس Gauss إلى أن وصل هذا التطور إلى ذروته في المؤلفات العميقة التي قام بوضعها عدد كبير من علماء الرياضة المعاصرين . وتستلزم كل محاولة لوضع نظرية عن التصور الرياضي للاحتمال أن نبدأ من الصورة الرياضية لهذا التصور ، ومن هنا سعى بعض الرياضيين إلى القيام بدراسات حديثة من أجل بلورة أسس التصور الرياضي للاحتمال .

ومع هذا ، يجب علينا أن ننبه إلى وجود تصور آخر للاحتمال ، لا يبرز من خلال الصورة الرياضية ، ونعني به : مفهوم الاحتمال كما يستخدم في المحادثات الجارية ، والذي نعبر عنه بالكلمات الآتية : « ممكن » و « محتمل » و « مرجّح » !(٣) إن استخدام هذا المفهوم لا يقتصر على لغة الحياة اليومية ، بل يُستخدم أيضًا في اللغة العلمية وذلك حين يتطلب الأمر بعض التخمينات والتكهنات . إننا نطلق الأحكام العلمية دون الادعاء بأنها يقينية، أننا نقول بهذه الأحكام على سبيل الاحتمال أوباعتبارها على درجة عالية من الترجيح . إن كلمة « محتمل » Probable في مثل هذا السياق لا تخضع لطرق إحصائية . ومن الملاحظ أن هذا التصور المنطقي للاحتمال –والذي لايمكن الاستغناء عنه لإقامة المعرفة –لم يصل، رغم أهميته، إلى تحديد دقيق كالذي توصل إليه التصور الرياضي للاحتمال.

والحق أن المناطقة قد انشغلوا طوال الوقت – منذ أرسطو وحتى اليوم – بالتصور المنطقي للاحتمال ، ولذا فإن المعالجة العلمية لهذا التصور هي أقدم بكثير من المعالجة العلمية للتصور الرياضي (الذي بدأ مع باسكال وفيرما). ومع هذا فإن نظرية التصور المنطقي للاحتمال مازالت عاجزة عن بلوغ نفس الدرجة من الاكتمال التي وصلت إليها نظرية التصور الرياضي له !(٦)

---

(١) Reichenbach, H., Experience and Prediction, P. 298.

(٢) Reichenbach, H. Experience & Prediction, P. 298.

(٣) Ibid., P. 298.

(٤) Ibid., P. 298 - 299.

(٥) Ibid., P. 299.

(٦) Ibid., P. 299.

لقد كانت الميزة الكبرى لمبدعى المنطق الرمزى أنهم عقدوا العزم منذ البداية على جعل منطق الاحتمال يصل لدقة المنطق ثنائى القيمة . فلقد طالب « ليبنتس » Leibnitz ببرنامج لصياغة منطق للاحتمال فى صورة منطق كمى لقياس درجات الحقيقة . ولم يتحقق هذا المطلب إلا فى القرن التاسع عشر . لقد ظهرت فى هذا الصدد بعض المحاولات من جانب « دى مورجان » De Morgan غير أن « جورج بول » Boole كان هو الواضع الحقيقى لأول حساب متكامل لمنطق الاحتمال – رغم أن بيرس Peirce قام فيما بعد بتصحيح بعض أخطائه – إن منطق بول يُعد أعظم إنجاز فى تاريخ التصور المنطقى للاحتمال منذ أرسطو[١] . وظل منطق الاحتمال يواصل مسيرته من خلال أعمال فن Venn وبيرس كل على حده[٢] . كما استمر عند بعض المناطقة المعاصرين من أمثال : كينز Keynes ولوكاشيفتش Lukasiewicz وزوريسكى Zawirski [٣] .

إن خطى تطور الاحتمال الرياضى والاحتمال المنطقى تكشف عن وجود تصورين للاحتمال : تصور رياضى وآخر منطقى . قد يبدو ثمة تشابه وارتباط معين بين التصورين ، غير أن هناك ، من جانب آخر ، تمايز تام بين الطبيعة المنطقية لكل منهما . ومن هنا انقسم المناطقة إزاء هذا الموقف إلى فريقين[٤] :

الفريق الأول : يؤكد أصحابه – بشكل ضمنى أو صريح – على أن هناك تمايزا واضحا بين التصور الرياضى والتصور المنطقى للاحتمال .

الفريق الثانى: يتمسك بأن هذا التمايز الظاهر بين التصورين لايمثل اختلافا جوهريا بينهما.

ولقد كشفت أبحاث قريبة العهد عن تماثل التصورين ، واستنادهما إلى أساس واحد ، وإن بين التصورين هوية[٥] ، وأن القول بهويتهما يسمح بفهمهما فهما أعمق . ولقد

---

(١) Reichenbach, H. Experience & Prediction, P. 299.

(٢) Ibid., P. 299.

(٣) Ibid., P. 299-300.

(٤) Ibid., P. 300.

(٥) تذكرنا هذه المشكلة (التمايز أو التماثل بين التصور الرياضى والتصور المنطقى للاحتمال) بالمشكلة الأعم ، ونعنى بها : التمايز أو التماثل بين الرياضة البحتة والمنطق الصورى ، وقد حسم كل من نورث هوايتهد Whitehead, A.N . (١٨٦١–١٩٤٧) وبرتراند رسل ، هذه المشكلة فى كتابهما مبادئ الرياضيات ، بأن وحدا بين الرياضة والمنطق فى نسق موحد مما ترتب عليه استحالة وضع خط فاصل بينهما، إذ الواقع – كما يقول رسل – إن الاثنين شىء واحد. والخلاف بينهما كالخلاف بين الصبى والرجل، فالمنطق شباب الرياضيات، والرياضيات تمثل طور الرجولة للمنطق. (رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، صفحة ٢٠٨) .

احتل الصراع بين كلا الفريقين حيزا كبيرا من المناقشة الفلسفية المتعلقة بمشكلة الاحتمال . ولقد كانت نتيجة هذا الصراع على جانب كبير من الأهمية. فما أن توصلت النظرية الرياضية فى الاحتمال إلى حل مرض ، حتى انتهى الفريق المدافع عن هوية التصورين - الرياضى والمنطقى للاحتمال - إلى حل المشكلة الفلسفية للاحتمال برمتها ، بينما ترك الفريق المدافع عن التمايز بينهما، مشكلة التصور المنطقى للاحتمال معلقة على نحو غير مرض[1].

(٤)

الاحتمال الرياضى :

يقوم الاحتمال الرياضى على أساس ارتباط قضيتين إحداهما معروفة لنا تمامًا فى حين تكون الأخرى مجهولة لنا تمامًا[2] . إن درجة احتمال قضية ما ، لا تتوقف على شىء فى طبيعتها ، وإنما تتوقف على نسبتها إلى قضية أخرى ، وحسبنا أن نعلم أن درجة احتمال القضية الواحدة ، تختلف باختلاف القضية الأخرى التى ننسبها إليها ، أو بعبارة أخرى : إن درجة احتمال قضية ما متوقفة على ما لدينا من معلومات ، أو على ما لدينا من شواهد ، فإن قيل لنا أن فيلاً يسير شاردًا فى الطريق العام ، كان احتمال الصدق ضعيفًا جدًا ، لأننا ننسب هذا القول إلى ما نعلمه فى خبرتنا الماضية عما يسير فى الطريق العام وما لا يسير ، ولكن لو قيل لنا إن سيارة تسير فى الطريق ، كان احتمال الصدق قويًا جدًا ، لأننا هنا أيضًا ننسب القول إلى ما نعلمه عن الأشياء التى تسير فى الطريق . وهكذا تزيد درجة احتمال القول أو تنقص حسب الشواهد التى ننسبها إليه[3] .

وينشأ الاحتمال الرياضى - كما أشرنا - من ارتباط قضيتين ، إحداهما معروفة تمامًا ، فى حين أن الأخرى تكون غير معروفة على الإطلاق ، فإذا سحبت ورقة من أوراق اللعب ، فما هو احتمال أن تكون هذه الورقة مكتوبًا عليها الرقم (١) ؟ إن عدد الأوراق معروف لنا تمامًا - وهو اثنتان وخمسون ورقة - ونعلم أيضًا أن بين كل ثلاث

(١) Reichenbach, H., Experience and Prediction, P. 300.

(٢) Russell, B., Hum an Knowledge, P. 353.

(٣) د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحات ٣٤١ - ٣٤٢ .

عشرة ورقة توجد ورقة واحدة تحمل الرقم (١) ، ولكننا نجهل تمامًا رقم الورقة التى سأسحبها . ولكننا بعملية حسابية بسيطة نحصل على درجة الاحتمال المطلوبة(١) .

والحقيقة الأساسية التى يجب أن نضعها نصب أعيننا هى وجود نظرية رياضية فى الاحتمال ، وأن هناك إجماع شبه تام بين علماء الرياضة – المشتغلين بهذه النظرية – على أن كل شيء يمكن التعبير عنه بالرموز الرياضية . ومع هذا فليس هناك اتفاق نهائى على تفسير الصيغة الرياضية . فى مثل هذه الحالة فإن أبسط الإجراءات التى يمكن أن تتخذ هى أن نسرد البديهيات Axioms التى تستدل منها النظرية الرياضية فى الاحتمال(٢) – وهذا ما سنفعله فى الفقرة رقم (٥) – ومن ثم نقرر أى التصورات يفى بمطالب هذه البديهيات ويكون جديرًا – من وجهة النظر الرياضية – أن يسمى « احتمال » ويرى « رسل » أنه إذا كانت هناك كثرة من التصورات ، وإذا كنا قد قررنا أن نختار بينها ، فإن دوافع الاختيار تقع خارج الرياضيات(٣) .

ويطرح « رسل » تصورًا Concept بسيطًا وملائمًا يفى بمطالب بديهيات نظرية الاحتمال ، فيقول : بافتراض فئة محدودة (ب) بها الأعضاء (ن) ، وأن (م) من هذه الأعضاء ينتمى إلى فئة أخرى (أ) ، عندئذ نقول إنه إذا اختير عضو من (ب) عشوائيًا ، كان احتمال انتمائه للفئة (أ) هو $\frac{م}{ن}$ (٤) .

وجدير بالذكر أنه ليس هناك مجال للصدق أو الكذب فيما يتعلق باختيار التصور الملائم ، إذ أن أى تصور يشبع هذه البديهيات يمكن أن يُؤخذ على أنه تفسير رياضى للاحتمال(٥) . وقد تتجه رغبتنا إلى تبنى تفسير Interpretation ما فى سياق معين ، وتفسير آخر فى سياق آخر ، ومن هنا تتعدد التفسيرات . لأن الملاءمة هى الدافع الذى يرشدنا لاختيار تفسير دون آخر . وعادة ما يكون هذا هو الموقف إزاء تفسير النظريات بصفة عامة(٦) .

---

(١) Russell, B., Human Knowledge, P. 353.

(٢) Russell, B., Human Knowledge, P. 356.

(٣) Ibid., P. 356.

(٤) Ibid., P. 356.

(٥) Ibid., P. 356.

(٦) Ibid., P. 357.

ولكى يوضح « رسل » كيف أن النظرية الرياضية فى الاحتمال تُشْتَق من عدد معين من البديهيات يضرب مثلاً باشتقاق علم الحساب بالكامل من خمس بديهيات وضعها « بيانو » Peanoفلقد أثبت بيانو أن نظرية الأعداد الطبيعية كلها يمكن أن تشتق من ثلاثة مفاهيم أولية ، وخمس قضايا أُولية ، بالإضافة إلى قضايا المنطق البحت . والمفاهيم الثلاثة الأُولية فى حساب بيانو هى :

« الصفر » ، « العدد » ، « التالى » .

والمقصود بـ « التالى » العدد « المابعد » فى الترتيب الطبيعى ، أى أن تالى الصفر هو الواحد ، وتالى الواحد ، اثنان ... وهكذا[1] . والقضايا الأُولية الخمس التى يفترضها بيانو والتى تعد بمثابة العلاقات المنطقية التى تبين استعمال تلك الحدود ، هى :

١ – « الصفر » عدد .

٢ – « تالى أى عدد » هو عدد .

٣ – ليس لعددين نفس التالى .

٤ – ليس الصفر تاليًا لأى عدد .

٥ – كل خاصية للصفر بما أنها تصدق عليه باعتباره عددًا فهى تصدق على العدد التالى له كما تصدق على التالى لما يليه[2] ، وهكذا .

---

(١) رسل » ، مقدمة للفلسفة الرياضية ، صفحة ٩ .

(٢) من الملاحظ أن البديهية الأخيرة – من بديهيات « بيانو » الخمس – هى التى تتضمن اطراد العمليات الحسابية مثل الجمع والضرب مثلاً . وقد أطلق هنرى براتكاريه oincaré(١٨٥٤ – ١٩١٢) على هذه الخاصية اسم « الاستقراء الرياضى » أو الاستقراء بالتكرار ، أما برتراند رسل فقد أسماها الخاصية « الوراثية » للإعداد أى أن ما يصدق على عدد ينتقل بالوراثة إلى غيره . (د . محمد ثابت الفندى ، فلسفة الرياضة ، صفحة ١٢١) .

إن نظرية الأعداد الطبيعية تنشأ من هذه المفاهيم الثلاثة والقضايا الخمس[1] . وكما نشأت نظرية الإعداد الطبيعية من عدة مفاهيم أولية ، تنشأ نظرية الاحتمال الرياضية – على نفس النحو – من مجموعة بديهيات .

غير أن مفاهيم « بيانو » الأولية الثلاثة – التى هى « الصفر » و « العدد » و« التالى » – تقبل عددًا لا نهاية له من التفسيرات[2] ، تحقق جميعها القضايا الأولية الخمس[3] ، ولكننا نختار منها ما يصلح للرياضة البحتة وما يناسب الحياة اليومية أيضًا . وبالمثل فى حالة نظرية الاحتمالات الرياضية يتم اختيار التفسير وفقًا للغرض الذى نضعه نصب أعيننا[4] .

---

(١) يمكننا أن نشير باختصار إلى الكيفية التى بها تنشأ نظرية الأعداد الطبيعية من المفاهيم الثلاثة والقضايا الخمس الأولية التى وضعها بيانو : الخمس – نجد أن كل عدد نصل إليه فله تال ، وبمقتضى القضية الثالثة ، نجد أنه لا يمكن أن يكون هذا التالى أى عدد من الأعداد التى عُرِفَت من قبل ، لأنه لو كان كذلك فسيكون لعددين مختلفين نفس التالى ، وبمقتضى القضية الرابعة نجد أنه لا عدد من الأعداد التى نصل إليها فى هذه المتسلسلة يمكن أن يكون الصفر . وبذلك تعطينا متسلسلة التوالى متسلسلة لا آخر لها من أعداد جديدة باستمرار . ومن القضية الخامسة نجد أن جميع الأعداد ترد فى هذه المتسلسلة التى تبدأ من الصفر وتستمر فى سيرها عن طريق التوالى المتعاقبة ، لأن :

(أ) الصفر ينتمى إلى هذه المتسلسلة .

(ب) إذا انتمى عددان إلى هذه المتسلسلة فإن تاليه ينتمى كذلك إلى هذه المتسلسلة . ومن ثم فبالاستقراء الرياضى كل عدد ينتمى إلى المتسلسلة .

وهكذا نشأت نظرية الأعداد الطبيعية من عدة مفاهيم أولية . (رسل ، مقدمة للفلسفة الرياضية ، صفحة ١٠) .

(٢) قدم « رسل » (فى كتابه : مقدمة للفلسفة الرياضية ، صفحة ١٢ وما بعدها) عدة تفسيرات لمفاهيم « بيانو » الأولية الثلاثة ، محاولاً التدليل على أنه ليس فى نظام « بيانو » ما يمكّننا من التمييز بين التفسيرات المختلفة لمفاهيمه اولية . وكان « بيانو » يفترض أننا نعرف ما نقصده بـ « الصفر » وأننا سوف لا نفترض أن هذا الرمز يعنى « ١٠٠ » أو أى شيء آخر مما يمكن أن يرمز إليه . إذ من الممكن – كما بيّن « رسل » – أن نأخذ « الصفر » ونعنى به « ١٠٠ » ، ونأخذ « العدد » لنعنى به الأعداد من « ١٠٠ » فصاعدًا فى متسلسلة الأعداد الطبيعية ، وبذلك تتحقق جميع القضايا الأولية الخمس ، وواضح أن أى عدد يمكن أن يوضع بدل الـ « ١٠٠ » فى هذا المثال . ويكون تفسيرنا فى هذه الحالة صحيح أيضًا .

ويؤكد « رسل » على أننا نتطلب من الأعداد ، لا مجرد تحقيق الصيغ الرياضية ، بل لتنطبق بطريقة صحيحة على الأشياء العادية ، نريد أن يكون لنا عشرة أصابع وعينان ، وأنف واحد . فالنظام الذى فيه « ١ » يقصد به « ١٠٠ » ، « ٢ » يقصد به « ١٠١ » ... وهكذا ، قد يصلح للرياضة البحتة ، ولكنه لا يناسب الحياة اليومية .

(٣) رسل ، مقدمة للفلسفة الرياضية ، صفحة ١٢ .

(٤) Russell, B., Human Knowledge, P. 357 .

(٥)

بديهيات نظرية الاحتمال :

هناك مجموعة من البديهيات – تكاد واحدة عند معظم الباحثين – تستند إليها النظريات المختلفة في تفسير الاحتمال ، ولقد عرضهابرتراند رسل » فى كتابه « المعرفة البشرية Human Knowledge نقلا عن « برود » .Broad, C.D «ويشير» رسل بـ $\frac{ب}{أ}$ إلى الفكرة غير المعرفّة والتى تعبر عن « احتمال ب إذا كانت لدينا أ » . وهذه الفكرة غير المعرّفة إنما يقصد بها « رسل » أنها تُعَرّف فقط عن طريق بديهيات معينة ، وأى شيء يتفق ومتطلبات هذه البديهيات هو « تفسير » لحساب الاحتمالات[١] . وعلى ذلك فمن المتوقع أن تكون هناك عدة تفسيرات ممكنة ، ليس من بينها ما هو أكثر صوابًا أو مشروعية من الآخر ، ولكن ربما يكون أحد التفسيرات أكثر أهمية من غيره ، تمامًا كما هى الحال بالنسبة لبديهيات « بيانو » الخمس للحساب . فلقد رأينا أنها تقبل عددًا لا نهاية له من التفسيرات إلا أن تفسير الأعداد الطبيعية بأنها تبدأ بالصفر ، أهم من تفسيرها على أنها تبدأ بالعدد ٣٧٨١ مثلا . وهو أكثر أهمية لأنه مقبول فى الصياغات الرياضية البحتة وفى الحياة اليومية على السواء[٢]. وحاليا سنغض الطرف عن كل المشاكل المتعلقة بالتفسير ونواصل المعالجة الصورية المجردة للاحتمال . وها هى بديهيات نظرية الاحتمال[٣] :

١ – إذا افترضنا (ب) و (أ) فهناك قيمة واحدة فقط لـ $\frac{ب}{أ}$ ،ولذا يمكننا أن نتحدث عن « احتمال (ب) على أساس (أ) » .

٢ – إن القيم الممكنة للصيغة $\frac{ب}{أ}$ هى كل الأعداد الحقيقية ابتداء من الصفر وانتهاء بالواحد الصحيح وما بينهما .

٣ – إذا كانت (أ) تستلزم (ب) كانت $\frac{ب}{أ}$ = ١ .

يستخدم (الواحد الصحيح) للدلالة على اليقين » .

---

(١) Russell, B., Human Knowledge, P. 362 .

(٢) Ibid., P. 362.

(٣) Ibid., P. 363.

وأيضا : محمد باقر الصدر ، صفحات ١٤٨–١٤٩ .

وأيضا : د . نازلى إسماعيل حسين ، مناهج البحث العلمى ، صفحات ١٢٦–١٢٧ .

٤ – إذا كانت (أ) تستلزم لا – ب ، كانت = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = صفر .

« ويستخدم (الصفر) للتعبير عن الاستحالة » .

٥ – إن درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفتي (ب) ، (جـ) معًا هي درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفة (ب) ، مضروبة في درجة احتمال أن تتصف (أ ب) بصفة (جـ) .

« وهذه البديهية تعرف باسم (بديهية الاتصال) » .

٦ – إن درجة احتمال أن تتصف (أ) بواحدة على الأقل من صفتي « ب » و«جـ » هي درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفة (ب) وحدها ، مضافًا إليها درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفة (جـ) وحدها ، مطروحًا من ذلك درجة احتمال أن تتصف (أ) بصفتي (ب) و (جـ) معًا .

هذه هي البديهيات الست التي تشتق منها نظرية الاحتمال ، وعلى هذا الأساس يجب أن يُلاحَظ عند تفسير الاحتمال أن يُعطى مفهومًا تصدق عليه تلك البديهيات ، أي يجب أن يكون لاحتمال (ب) على افتراض (أ) معنى يفرض أن يكون لهذا الاحتمال قيمة واحدة لا أكثر تحقيقًا للبديهية الأولى ، ويسمح بأن يحصل هذا الاحتمال على أية قيمة ابتداء من الصفر وانتهاء بالواحد الصحيح تحقيقًا للبديهية الثانية ، ويتطلب أن تكون درجة الاحتمال مساوية للواحد الصحيح في حالة لزوم (ب) عن (أ) ، وتكون درجة الاحتمال مساوية للصفر في حالة لزوم لا - ب عن (أ) . وذلك تحقيقًا للبديهية الثالثة والرابعة[1]. أما البديهية الخامسة (بديهية الاتصال) والسادسة (بديهية الانفصال) فسنعود إلى شرحها بعد أن نعرض بشكل مبسط الأسس المتضمنة في حساب الاحتمالات.

(١) محمد باقر الصدر ، الأسس المنطقية للاستقراء ، صفحة ١٥٠ .
وأيضا : د . نازلي إسماعيل حسين ، مناهج البحث العلمي ، صفحة ١٢٨ . <cأما البديهية الخامسة (بديهية الاتصال) والسادسة (بديهية الانفصال) فسنعود إلى شرحهما بعد أن نعرض بشكل مبسط الأسس المتضمنة في حساب الاحتمالات .

(٦)

حساب الاحتمالات :

توضح بديهيات نظرية الاحتمال أن القضية الاحتمالية ليست قضية يقينية كما أنها ليست مستحيلة ، وإنما تقف بين اليقين والاستحالة ، فإذا قلنا إن الحادثة « هـ » من الممكن أن تحدث ، فهذا معناه أن هناك أسبابًا ترجح حدوثها ، وأن هذه الأسباب أقوى من الأسباب التي ترجح عدم حدوثها[1] . ولكي نتمكن من قياس درجة احتمال وقوع حادثة ما ، فإنه يجب علينا أن نحصي عدد الحالات المواتية والحالات غير المواتية التي تساعد أو تعوق وقوع الحادثة المذكورة[2] . وتتفاوت درجة احتمالها بين الصفر والواحد ، أي بين الاستحالة واليقين . وعلى ذلك يتضح أن نظرية الاحتمال تستبعد النظرة الذاتية ، وتجعل درجة الاحتمال أمرًا موضوعيًا خارجًا عن ذات الإنسان الذي يقوم بقياسها . فليس الاحتمال بهذا المعنى أمر عقيدة شخصية لا سند له إلا ما نظنه صوابًا ، بل القضية الدالة على احتمال هي تعبير عن العلاقة بين قضيتين[3] ، فإذا كانت العلاقة لزومًا ضروريًا كانت العلاقة بينهما درجة احتمالها واحد صحيح ، وإذا كانت العلاقة بينهما تناقضًا كانت درجة الاحتمال صفرًا ، وإذا كانت العلاقة بينهما هي بين هذين الطرفين ، احتاج الأمر إلى عمليات رياضية لقياس درجة الاحتمال[4] .

ولتوضيح كيفية قياس درجة الاحتمال ، نأخذ المشكلة المألوفة زهر اللعب (النرد) . إذ أن العوامل المتضمنة فيها بسيطة ويمكن حسابها بسهولة[5] :

١–ما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ إذا ألقينا زهرة لعب واحدة ؟

إنه من الواضح أن هناك ستة طرق لوقوع زهرة اللعب ، وأنها يجب أن تقع بطريقة من هذه الطرق الستة بحيث تستقر الزهرة عند أي وجه من وجوهها الستة .

---

(١) Stebbing, L. S., A Modern Introduction to Logic, 4th., edition, Methuen & Co. LTD., London, 1945, P. 364.

(٢) Ibid., P. 364.

(٣) د . زكي نجيب محمود ، المنطق الوضعي ، جـ ٢ ، صفحات ٣٤٣–٣٤٤ .

(٤) المرجع السابق ، صفحة ٣٤٤ .

(٥) اعتمدنا في عرض هذا الموضوع على: Stebbing. L. S., A Modern Introduction to Logic, PP. 364-368.

إذن احتمال ظهور الرقم ٦ إلى أعلى إذا ألقينا زهرة لعب واحدة هو $\frac{١}{٦}$.

٢–ما هو احتمال ألا يظهر الرقم ٦ إلى أعلى إذا ألقينا زهرة واحدة ؟

الاحتمال هو $\frac{٥}{٦}$.

٣–إذا ألقينا بزهرتين فما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ فى الزهرتين معًا ؟

بما أن لكل زهرة ستة أوجه ، وبما أن أيًا من هذه الأوجه قد يظهر مع أى وجه من الأوجه الستة للزهرة الأخرى ، فإنه من الواضح أن هناك ٣٦ اقترانًا ممكنًا . إذن فالاحتمال المطلوب هو $\frac{١}{٣٦}$.

إنه من الواضح أن الحصول على الرقم ٦ فى واحدة من قطعتى الزهر ليس معتمدًا على احتمال الحصول على الرقم ٦ فى الزهرة الأخرى . وهذه الأحداث تسمى أحداثًا مستقلة . واحتمال أن كليهما سوف يحدث إنما هو اقتران بين الاحتمالات المستقلة لكل منهما .

أى : $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣٦}$.

وهكذا نحصل على الاحتمال الاقترانى بين حادثتين أو أكثر من الحوادث المستقلة بضرب احتمالاتها المنفصلة .

٤ – ما هو احتمال ألا يظهر الرقم فى أية من الزهرتين إذا ألقيتا معًا ؟

هذان الحدثان مستقلان . وعلى ذلك فإن احتمال عدم الحصول على الرقم ٦ فى كل منهما على حدة هو $\frac{٥}{٦}$. إذن الاحتمال المطلوب هو $(\frac{٥}{٦} \times \frac{٥}{٦}) = \frac{٢٥}{٣٦}$.

٥–ما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ فى **زهرة واحدة فقط** ، إذا ألقيت الزهرتان معًا ؟

لا يهمنا فى هذه الحالة أن نبحث عما إذا كان الرقم ٦ سيظهر فى الزهرة الأولى أو الثانية ، ونستطيع أن نشير إلى الحالة التى يظهر فيها الرقم ٦ بالرمز « س١ أو س٢ » ، والحالة التى لا يظهر فيها الرقم ٦ بالرمز « ص١ أو ص٢ » .

وهكذا فنحن نتطلب إما س١ ص١ أو س٢ ص٢ . ولقد عرفنا أن احتمال « س » هو $\frac{١}{٦}$ وأن احتمال « ص » هو $\frac{٥}{٦}$.

إذن فاحتمال س١ ص١ هو $(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦})$.

واحتمال س٢ ص٢ هو أيضا $(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦})$.

إذن فاحتمال س١ ص١ أو س١ ص٢ هو :

$$(\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}) + (\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}) = (\frac{٥}{٣٦} + \frac{٥}{٣٦}) = \frac{١٠}{٣٦}$$

إن الحدثين س١ ص١ و س٢ ص٢ حدثان استبعاديان Exclusive أو تبادليان Alternative إذن فاحتمال انفصالهما هو مجموع احتمالهما المنفصلين ، وهو $\frac{١٠}{٣٦}$.

٦–ما هو احتمال أن زهرة **واحدة على الأقل** سيظهر فيها الرقم ٦ إذا ألقيت معًا ؟

بما أننا في هذه الحالة لا نستبعد كليهما ، فإن الحالة الوحيدة المستبعدة هي « لا هذه ولا تلك » . إذن فالاحتمال المطلوب يكافئ مجموع :

١ – كليهما . ٢ – واحد منهما فقط . ٣ – الآخر .

أى : $(\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦}) + (\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}) + (\frac{١}{٦} \times \frac{٥}{٦}) = \frac{١١}{٣٦}$

وينبغي ملاحظة أن احتمال الحصول على الرقم ٦ في زهرة واحدة على الأقل واحتمال عدم الحصول عليه في كل من الزهرتين يستنفد الحالات الممكنة ، إذن فعلينا أن نأخذ واحدة من الحالتين أو الأخرى ، فيكون مجموع الحالتين مساويًا للواحد الصحيح . وهذه الاحتمالات المنفصلة تكافئ $\frac{١١}{٣٦}$ و $\frac{٢٥}{٣٦}$.

وينتج عن هذا أن :

$$\frac{١١}{٣٦} + \frac{٢٥}{٣٦} = \frac{٣٦}{٣٦} = ١$$

إن وقوع حدث معين أو عدم وقوعه يستنفدان كل الاحتمالات .

ويمكن التعبير عن هذا بالصيغة الآتية : هـ + هـ / = ١

وهكذا نرى مرة أخرى (بواسطة مبدأ الوسط المرفوع) أنه احتمال الحوادث الاستبعادية هو جمع منطقي . ويمكن تطبيق صيغ « دى مورجان » إذا كتبنا (أ) للتعبير عن احتمال أن (أ) سوف تحدث ، و (ب) للتعبير عن أن (ب) سوف

تحدث ، إذن (أ ب) تشير إلى احتمال أن كليهما سيحدثان ، أ + ب تشير إلى احتمال أن واحدًا منهما أو الآخر سوف لا يحدث . إذن فلدينا :

١ - (أ + ب) = أ ب

٢ - (أ ب) = أ + ب

وهذا يعبر عن أن :

١ - احتمال أن لا ـ أ أو لا ـ ب يحدثان يكافئ حاصل احتمال أن (أ) سوى لا تحدث واحتمال أن (ب) سوف لا تحدث .

٢ - احتمال أن ليس كل من (أ) و (ب) سوف يحدثان يكافئ مجموع الاحتمالين القائلين بأن (أ) سوف لا يحدث و (ب) سوف لا تحدث .

وترى سوزان استبينج[1] Stebbing أن صيغ « دى مورجان » يمكن تطويرها لتغطى حالات أيا كانت درجة تعقيدها ، وكذلك يمكن تطبيق القوانين السابقة حتى تغطى الحالات التى تتضمن أكثر من عاملين اثنين . كما تشير استبينج[2] إلى أنه فى عمليات حساب الاحتمالات يجب أن نعتنى عناية بتحديد ما إذا كانت الحوادث مستقلة أو تابعة أو استبعادية . إن المبدأ الأساسى واحد سواء كانت الحوادث تابعة أو استبعادية . ولكن إذا كانت الحوادث مستقلة ، فحينئذ تكون كل الاحتمالات عُرضة لأن تحدث فى كل حالة . وعلى سبيل المثال ، يكون احتمال الحصول على « الصورة » فى قطعة العملة هو $\frac{١}{٢}$ ، ويبقى هذا الاحتمال ثابتًا ، ولا ينال منه كثرة ظهور « الكتابة » ، إلا إذا كنا نحسب احتمال ظهور عدد معين من « الصورة » فى عدد محدود من الرميات . وإذا كان حدث ما معتمدًا على آخر غيره ، فحينئذ يحسب احتماله فقط بعد حساب احتمال الحدث المستقل . وهذا يعنى أنه فى حالة الحوادث التابعة تكون بإزاء شروط أولية مختلفة .

لقد أصبح من المعتاد أن نحدد صيغًا معينة لحساب احتمال أن حدثًا مثل « هـ » سيتكرر حدوثه مرة أخرى . ونستطيع أن نميز حالتين :

١ - احتمال أن يتكرر حدوث « هـ » مرة واحدة أزيد .

---

(١) Stebbing, L. S., A Modern Introduction to Logic, P. 366.

(٢) Ibid., P. 366.

٢ – احتمال أن يتكرر حدوث « هـ » بمقدار « ن » من المرات .

ويمكن أن نقسم كلاً من هاتين الحالتين طبقًا لما يلى :

(أ) أننا لم نعلم أن « هـ » سيتخلف عن الحدوث .

(ب) أننا علمنا أن « هـ » سيتخلف عن الحدوث .

١ – (أ) إذا علمنا أن « هـ » قد حدث عددًا من المرات قدرها « م » ولم نعلم أنه تخلف ، فحينئذ نعبر عن نسبة الحالات المواتية إلى العدد الكلى للحـــالات الماضية بالكسر $\frac{م}{م}$ = ١ (أى حالة اليقين) . وعلى فرض أن احتمال وقوع « هـ » مساو لاحتمال عدم وقوعها ، فعندئذ تكون درجة الاحتمال هى $\frac{١}{٢}$ ، لكنها إذا حدثت مرة ، زادت نسبة احتمال وقوعها فى المرة الثانية ، وأصبحت درجة الاحتمال كالآتى : $\frac{م+١}{م+٢} = \frac{٢}{٣}$

١ – (ب) وباستخدام « م » كما استخدمناها من قبل ، فإن احتمال أن تحدث « هـ » مرات أكثر عددها ن » هو : $\frac{م+١}{م+ن+١}$

٢ – (أ) باستخدام « م » كما سبق ، وبالتعبير عن عدد المرات التى علمنا أن « هـ » سيتخلف فيها بالرمز « م » وهى تساوى لا ـ م ، نعبر عن الاحتمال المطلوب بالكسر الآتى : $\frac{٥+١}{م+م+ن}$

٢ – (ب) باستخدام « م + م- + ن » كما سبق ، فإننا نعرف بيسر أن الاحتمال المطلوب يعبر عنه بالكسر الآتى : $\frac{م+١}{م+م+ن+١}$

وتؤدى بنا ملاحظة هذه الصيغ إلى :

١ – كلما كبرت « م » اقتربت قيمة الكسر من الواحد الصحيح ، وبالتالى يزداد احتمال حدوث « هـ » .

٢ – كلمـا كبرت (م أو ن) ، قل احتمـال حـدوث « هـ » . وتعــرف الصيغة $\frac{م+١}{م+ن}$ بقانون التتابع لـ «لابلاس » الذى يعتمد على « إمكانية التساوى » للحالات التى لدينا . ولا يمكن البرهنة على صحة إمكانية التساوى إلا إذا كانت البدائل الممكنة متساوية القيمة .

(٧)

قياس الاحتمال فى الحوادث المركبة وفقًا للبديهية الخامسة :

المراد هنا هو قياس احتمال أن يكون شيء ما (أ) موصوفًا بصفتين فى آن واحد هما ب » و « جـ » . وقياس درجة الاحتمال فى هذه الحالة يجرى على أساس « البديهية الخامسة » من بديهيات نظرية الاحتمال – سبق أن ذكرناها – والتى تسمى باسم « بديهية الاتصال »[١] ، وهى تتيح الفرصة للقول بأن الحادثتين ستقعان معًا . فعلى سبيل المثال :

إذا سحبت ورقتين من أوراق اللعب ، فما هو احتمال أن تكون الورقتان حمراوين ؟

فى هذه الحالة نجد أن (أ) تمثل المعطى الذى يقول (إن ورق اللعب يتكون من ٢٦ ورقة حمراء و ٢٦ ورقة سوداء) .

أما (ب) فهى تمثل العبارة القائلة : « إن الورقة الأولى حمراء » وتمثل (جـ) العبارة القائلة : « إن الورقة الثانية حمراء » .

إذن $\frac{ب \times جـ}{أ}$ تمثل درجة احتمال أن كلتيهما حمراء .

و $\frac{ب}{أ}$ تمثل درجة الاحتمال أن الورقة الأولى حمراء وهى تساوى $\frac{١}{٢}$.

و $\frac{جـ}{ب \times أ}$ تمثل درجة احتمال أن الورقة الثانية حمراء على فرض تحقق أن الورقة الأولى حمراء . وهى تساوى $\frac{٢٥}{٥١}$ ، لأنه سيتبقى لنا بعد سحب الورقة الأولى ٥١ ورقة من بينها ٢٥ ورقة حمراء)[٢] .

وهكذا فإن درجة احتمال أن تكون الورقتان المسحوبتان حمراوين معا هى :

$$\frac{١}{٢} \times \frac{٢٥}{٥١} = \frac{٢٥}{١٠٢}$$

وهناك صيغة رمزية للبديهية الخامسة ، وهى :

---

(١) د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحة ٣٤٦ .

(٢) Russell, B., Human Knowledge, P. 364.

وأيضا : د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحات ٣٤٨ – ٣٤٩ .

ح (أ – ب جـ) = ح (أ – ب) × ح (أ ب – جـ)[1] .

فإذا أردنا مثلاً أن نستخرج درجة احتمال أن يكون الطالب متفوقًا فى اللغة الانجليزية والرياضة معًا ، وجب أن نحسب درجة احتمال تفوقه فى اللغة الانجليزية وحدها . ثم نضرب ذلك فى درجة احتمال تفوقه فى الرياضة على أساس أنه متفوق فى الإنجليزية .

ومن الملاحظ أننا نخطئ الحساب لو جعلنا :

ح (أ – ب جـ) = ح (أ – ب) × ح (أ – جـ) .

أى أننا نخطئ الحساب فى المثال السابق لو ضربنا درجة احتمال تفوق الطالب فى اللغة الإنجليزية فى درجة تفوقه فى الرياضة ، لأن ذلك قد يفوّت علينا الاحتمال بأن يكون التفوق فى اللغة الإنجليزية هو نفسه عاملاً يؤثر فى درجة الامتياز فى الرياضة ، ولذلك ينبغى – بعد حساب التفوق فى اللغة الإنجليزية – أن نضرب هذا فى درجة احتمال التفوق فى الرياضة فى هذه الحالة الخاصة التى ظهر فيها تفوق فى اللغة الإنجليزية لا فى حالة التفوق فى الرياضة مطلقة من غير قيد[2] .

فإذا كانت درجة الاحتمال فى الحالة الأولى وحدها هى : $\frac{١}{ن}$.

ودرجة الاحتمال فى الحالة الثانية – على فرض تحقق الحالة الأولى – هى $\frac{١}{م}$. فإن درجة احتمال اجتماع الحالتين معا هى $\frac{١}{م \times ن}$ [3] .

مثال آخر : وعاءان فى كل واحد منهما ثلاث كرات : اثنتان بيضاوان وواحدة سوداء ، فما درجة احتمال أن تسحب السوداوين فى وقت واحد ؟

قد يخيل إلينا للوهلة الأولى أن هناك أربع احتمالات ، هى : ب ب ، ب س ، س ب ، س س (حيث ب = أبيض ، ص = أسود) لكن فى ذلك الحساب تجاهلاً للقيمة الاحتمالية للأبيض بالنسبة للأسود ويجعلهما متساويتين ، مع أن القيمة الاحتمالية

---

(١) Kneale, W., Probability & Induction, P. 126.
نقلا عن د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحات ٣٤٦ .

(٢) د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحات ٣٤٦ – ٣٤٧ .

(٣) المرجع السابق ، صفحة ٣٤٧ .

للأبيض أكبر من القيمة الاحتمالية للأسود ، ويجب مراعاة ذلك – كما أسلفنا – عند حساب درجة الاحتمال ، ولشرح ذلك نقول[1] :

نرمز لكرات الوعاء الأول بالرمز :

ب١ ، ب٢ ، س١ .

ونرمز لكرات الوعاء الثانى بالرموز :

ب٣ ، ب٤ ، س٢ .

فيكون احتمال السحب من الوعاء الأول هو :

أ إما أن تكون ب١ ، ب٢ ، س١

واحتمال السحب من الوعاء الثانى هو :

أ⁻ إما ن تكون ب٣ أو ب٤ أو س٢ .

واحتمالات الجمع بين أ ، أ معًا هى :

ب١ ب٣ ، ب١ ب٤ ، ب١ س٢ ، ب٢ ب٣ ، ب٢ ب٤ ، ب٢ س٢ ، س١ ب٤ ، س١ ب٤ ، س١ س٢ .

وهى تسع حالات ، فيهما الأسودان معًا مرة واحدة ، وإذن فاحتمال سحبهما معًا هو $\frac{1}{9}$

وهذه النتيجة تتفق مع بديهية الاتصال التى شرحناها ، لأن احتمال الأسود فى الحالة الأولى هو $\frac{1}{3}$ ، وفى الحالة الثانية هو $\frac{1}{3}$ ، وإذن يكون احتمالهما معًا هو $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

(٨)

قياس الاحتمال في الحوادث المركبة وفقًا للبديهية للسادسة :

المراد هنا هو قياس درجة احتمال أن يكون شيء ما (أ) هو موصوفا بواحدة على الأقل من صفتى (ب) و (جـ) .

---

(١) Welto and Monahan, Intermediate Logic, P, 427.
نقلا عن : د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ٢ ، صفحات ٣٤٧ – ٣٤٨ .

وقياس درجة الاحتمال فى هذه الحالة يجرى على أساس « البديهية السادسة » من بديهيات نظرية الاحتمال ، والتى تسمى باسم « بديهية الانفصال » – سبق أن أشرنا إليها – والصورة الرمزية لهذه البديهية هى كالآتى :

ح (أ – ب ٧ جـ) = ح (أ – ب) + ح (أ – جـ) – ح (أ – ب جـ)[١] .

وتقرأ الصيغة هكذا : إن درجة احتمال أن تكون (أ) موصوفة إما بصفة (ب) أو بصفة (جـ) ، تساوى درجة احتمال أن تكون (أ) موصوفة بصفة (ب) مضافًا إليها درجة احتمال أن تكون (أ) موصوفة بصفتى (ب) ، (جـ) معًا[٢] .

ولشرح هذا الجزء الأخير من بديهية الانفصال ، نقول : إذا افترضنا أن حالتى ب ، جـ متضادتان ، أى أنهما لا تجتمعان معًا ، مثال ذلك أن تكون لديك تذكرتان فى نصيب ، ولا بد أن تكون الرابحة إحداهما فقط ، إذ لا يربح فى النصيب إلا تذكرة واحدة ، فها هنا يكون احتمال ربحك بتذكرة ب أو بتذكرة جـ هو :

ح (أ – ب) + ح (أ – جـ) .

لكن قد تكون حالتان ب ، جـ مما يمكن اجتماعهما معًا ، مثال ذلك أن ورقة اللعب قد تتصف بصفتين فى آن واحد ، فتكون – مثلاً – سبعة وتكون حمراء ، ونريد أن نحسب درجة احتمال سحب ورقة تكون فيها إحدى الصفتين على الأقل ، فعندئذ لا يكفى فى قياس درجة الاحتمال أن نجمع احتمال أن تكون الورقة المسحوبة سبعة ، إلى احتمال أن تكون الورقة المسحوبة حمراء ، لأن احتمال أن تكون الورقة المسحوبة سبعة يدخل فيه احتمال أن تكون حمراء كذلك ، وأيضًا احتمال أن تكون الورقة المسحوبة حمراء يدخل فيه احتمال أن تكون سبعة كذلك ، لذا لا يكفى لحساب احتمال إحدى الحالتين على الأقل مجرد جمع الاحتمالين ، بل لابد أن نطرح من ذلك درجة احتمال اجتماعهما معًا[٣] .

---

(١) Kneale , W . , Probability & Induction, P. 125.
نقلا عن : د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحة ٣٥٠ .

(٢) د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحة ٣٥٠ .

(٣) د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحات ٣٥٠ – ٣٥١ .

مثال[1] : ما درجة احتمال أن نسحب ورقتين من أوراق اللعب فتكون إحداهما على الأقل حمراء ؟

(عدد ورق اللعب ٥٢ ورقة ، نصف أحمر والنصف الآخر أسود) احتمال أن تكون الأولى حمراء هو $\frac{١}{٢}$.

احتمال أن تكون الثانية حمراء هو $\frac{١}{٢}$.

احتمال أن تكونا حمراوين معًا هو $\frac{٢٥}{١٠٢}$ (لقد أوضحنا هذه النتيجة فى مسألة سابقة) .

احتمال أن تكون إحداهما على الأقل حمراء ، هو :

$$\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}-\frac{٢٥}{١٠٢}=\frac{٧٧}{١٠٢}$$

أمثال آخر[2] : وعاءان ، الأول به ٨ كرات بيضاء وكرتان سوداوان ، والثالث به ٦ كرات بيضاء وأربع كرات سوداء ، فما درجة احتمال أن أسحب كرة من كل من الوعائين ، فأسحب كرة واحدة على الأقل بيضاء ؟

احتمال سحب كرة بيضاء من الوعاء الأول هو $\frac{٨}{١٠}$.

واحتمال سحب كرة بيضاء من الوعاء الثانى هو $\frac{٦}{١٠}$.

واحتمال سحب كرتين بيضاوين معا هو $\frac{٤٨}{١٠٠}$.

واحتمال سحب واحدة على الأقل بيضاء هو :

$$\frac{٨}{١٠}+\frac{٦}{١٠}-\frac{٤٨}{١٠٠}=\frac{٩٣}{١٠٠}$$

ويتضح مما سبق أنه إذا كنا أمام احتمالات منفصلة لأية مجموعة محدودة من الحوادث ، فإنه يمكننا – باستخدام البديهتين الخامسة والسادسة – حساب درجة احتمال حدوث جميع هذه الحوادث أو على الأقل درجة احتمال حدوث إحداها[3] .

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٣٥١ .
وأيضا : Russell , B . , Human Knowledge , P . 364 .

(٢) المرجع السابق ، صفحة ٣٥٢ .

(٣) Russell , B . Human Knowledge . p . 364 .

(٩)

مبدأ الاحتمال العكسى :

يرى « رسل »[1] أنه ينتج عن بديهية الاتصال أن :

$$\frac{ب}{(ا+جـ)} = \frac{\frac{ب}{ا} \times \frac{جـ}{(ا+ب)}}{\frac{جـ}{ا}}$$

وهذا ما يسمى بمبدأ الاحتمال العكسى

ويمكن توضيح هذا المبدأ على النحو الآتى :

نفترض أن (ب) نظرية ما ، و (جـ) معطيات تجريبية تلائمها . إذن $\frac{ب}{أ}$ تمثل درجة احتمال النظرية (ب) القائمة على المعطيات (جـ) المعروفة لنا . وأن $\frac{جـ}{أ}$ تمثل درجة احتمال (جـ) استنادًا إلى المعطيات السابقة . وهكذا فإن درجة احتمال النظرية (ب) استنادًا إلى المعطيات (جـ) التى تم التأكد منها ، يمكن الحصول عليها بضرب الاحتمال السابق لـ (ب) فى احتمال (جـ) بافتراض أن لدينا (ب) وقسمته على الاحتمال السابق لـ (جـ) . وفى أقصى الحالات ستضمن النظرية ب جـ ، لأن :

$$ا = \frac{جـ}{ا+ب}$$

وفى هذه الحالة نجد أن :

$$\frac{\frac{ب}{ا}}{\frac{جـ}{ا}} = \left(\frac{ب}{ا+جـ}\right)$$

وهذا يعنى أن المعطى الجديد (جـ) يزيد من درجة احتمال (ب) . وبعبارة أخرى ، إذا عرفنا وقوع حوادث معينة ، وكانت هناك عدة فروض لتفسيرها ، فالاحتمال العكسى هو الذى نقيس به درجة ترجيح فرض على آخر ، معتمدين على الحوادث التى عرفناها ، كما يتضح من المثال التالى :

---

(١) Russell, B., Human Knowledge, P. 364 ,

لدينا وعاء به ثلاث كرات نجهل لونها ، سحبنا كرة منها فوجدناها بيضاء ، ثم أرجعناها إلى الوعاء ، وسحبنا كرة أخرى فوجدناها سوداء ، ثم أرجعناها إلى الوعاء . وبعدئذ أخذنا نكرر العملية ، لكننا كلما سحبنا كرة وجدناها إما بيضاء أو سوداء .

وهنا نجد أنفسنا أمام أحد احتمالين :

الاحتمال الأول : أن تكون الكرات الثلاث مزيجًا من أبيض وأسود معًا .

الاحتمال الثاني : أن تكون هناك مرة ثالثة لونها مخالف للأبيض والأسود ، لم تخرج أبدًا في عمليات السحب .

فكيف نُرجّح فرضًا على فرض ؟

لو فرضنا أن في الوعاء كرة لونها مخالف للأبيض والأسود ، كان احتمال عدم سحبها في المرة الأولى هو $\frac{٢}{٣}$ ، وفي المرة الثانية $\frac{٤}{٩}$ ، وفي المة الثالثة $\frac{٨}{٢٧}$ ، وفي المرة الرابعة $\frac{١٦}{٨١}$ ، ... واحتمال عدم سحبها في المرة الثامنة هو $\frac{٢٥٦}{٦٦٥١}$ ، وهي نسبة تكاد تبلغ $\frac{١}{٢٦}$ ، وهكذا تأخذ نسبة الاحتمال في النقصان كلما مضينا في السحب ، مما يقلل من شأن الفرض الثاني ، ويزيد من ترجيح الفرض الأول[١] .

ولنوضح فائدة مبدأ الاحتمال العكسي في حساب الاحتمالات نأخذ المثال الآتي :

إذا فرضنا خطًا مستقيمًا مُقسمًا إلى قسمين : (أ) و (ب) .

والمطلوب اطلاق النار على هدف موضوع على هذا الخط . ونحن لا علم ما إذا كان هدف موضوعًا على (أ) أو على (ب) ، ولنفرض أن احتمال كونه موضوعًا على (أ) هو $\frac{٣}{٤}$ ، واحتمال كونه موضوعًا على (ب) هو $\frac{١}{٤}$. وعلى هذا الأساس وجهنا القذيفة إلى (أ) ، وكان احتمال إصابة (أ) وفقًا لمحاولتنا هو $\frac{٣}{٤}$ ، واحتمال نخطئ في المحاولة ونصيب القذيفة (ب) هو $\frac{١}{٤}$ ، ولنفرض أنه قيل لنا بشكل مؤكد أنّا أصبنا الهدف ، فما هي درجة احتمال أن يكون الهدف موضوعًا على (أ) بعد افتراض أننا قد أصبنا الهدف ؟[٢] .

---

(١) د . زكي نجيب محمود ، المنطق الوضعي ، جـ ٢ ، صفحات ٣٥٥ – ٣٥٦ .
(٢) محمد باقر اصدر ، الأسس المنطقية للاستقراء ، صفحات ١٥٦ – ١٥٧ .
وأيضًا : د . نازلي اسماعيل حسين ، مناهج البحث العمي ، صفحات ١٣٥ – ١٣٦ .

لقد كانت درجة الاحتمال قبل توجيه الطلقة حسب ما افترضناه هي $\frac{٣}{٤}$ ، ولكنها سوف تزداد الآن . ومبدأ الاحتمال العكسي هو الذي يحدد لنا قيمة ذلك الاحتمال بعد افتراض اصابة الهدف ، فإذا كنا نرمز إلى درجة الاحتمال بـ (د) ، وإلى كون الهدف في (أ) بـ (جـ) ، وإلى كون الهدف في (ب) بـ (س) ، وإلى إصابة الهدف على تقدير كون الهدف في (أ) بـ (ط) ،وإلى إصابة الهدف على تقدير كون الهدف في (ب) بـ (و) فسوف نحصل على المعادلة الآتية :

$$\frac{\text{د (جـ)} \times \text{د (ط)}}{\text{د (جـ)} \times \text{د(ط)} + \text{د (س)} \times \text{د (و)}} = \text{د (جـ) بعد إصابة الهدف}$$ (1) .

وإذا بدلنا الرموز بالأرقام ، وافترضنا قيم الاحتمال كما تقدم في المثال ، كانت المعادلة كمايلي :

$$\frac{\frac{٣}{٤}\times\frac{٣}{٤}}{\frac{٣}{٤}\times\frac{٣}{٤}+\frac{١}{٤}\times\frac{١}{٤}} = \frac{\frac{٩}{١٦}}{\frac{١٠}{١٦}}$$

أي أن درجة احتمال كون الهدف موضوعًا على (أ) هي قبل الإصابة $\frac{٣}{٤}$ وبعد إصابة الهدف زادت فأصبحت $\frac{٩}{١٠}$.

ويمكن فهم مبدأ الاحتمال العكسي بواقعة اكتشاف كوكب Neptune باعتبار أن اكتشاف هذا لكوكب زاد من احتمال صدق نظرية الجاذبية (في هذه الحالة ستكون :-

ب = نظرية الجاذبية .

أ = كل الوقائع التجريبية المعروفة قبل اكتشاف كوكب نبتون .

جـ = واقعة وجود كوكب نبتون في موضع معين)[2] .

وباستخدام المثال السابق – الخاص بإطلاق قذيفة على هدف موضوع على خط مستقيم – نقول إن نظرية الجاذبية يمثلها الهدف الموضوع على (أ) ، واكتشاف كوكب

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ١٥٧ .

(٢) Russell, B., Human Knowledge, P. 365 .

نبتون يمثله العلم بأن الهدف قد أصيب عند توجيه القذيفة ، فكلما زادت درجة احتمال كون الهدف موضوعًا على (أ) بعد اكتشاف أن الهدف قد أصيب مع محاولة الرامى لتوجيه الطلقة إلى (أ) ، تزيد بالتالى درجة احتمال صدق نظرية الجاذبية بعد اكتشاف كوكب نبتون[1] .

ولمبدأ الاحتمال العكسى أهمية كبرى فى تبرير الاستدلال الاستقرائى ، لأننا فى هذا الاستدلال نحكم على كل أفراد النوع بما شاهدناه فى بعض الأفراد ، فمثلاً نشاهد بعض الغربان ونجدها سوداء ، فنعمم الحكم قائلين : إن كل غراب أسود – فعلى أى أساس اعتمدنا فى تعميم هذا الحكم ، مع أن هنالك احتمالاً بأن تكون الغربان التى لم نرها ليست سوداء ؟ إننا نعمم هذا الحكم على أساس مبدأ الاحتمال العكسى[2] .

(١٠)

مبرهنة بايز :

يقول « رسل »[3] فى فصل بعنوان « الاحتمال الرياضى » من كتابه « المعرفة البشرية » : إن هناك قضية على جانب كبير من الأهمية تسمى أحيانًا باسم (مبرهنة بايز) Bayes's theorem ويوضحها رسل « على النحو الآتى :

لنفرض أن ع ١ ، ع ٢ ،... ع ن ممكنات تخارجية[4] Exclusive Possibilities وأننا نعلم أن إحدى هذه الممكنات صادقة ، ولنفترض أن (ك) معطيات عامة . وأن (هـ) واقعة مواتية . ونريد أن نعرف درجة احتمال إحدى الممكنات (ع) إذا كانت لدينا (هـ) .

إن احتمال (ع –) قبل أن تكون لدينا (هـ) ، وأيضا احتمال (هـ) إذا كانت لدينا (ع –) تمثله المعادلة الآتية :

---

(١) محمد باقر الصدر ، الأسس المنطقية للاستقراء ، صفحة ١٥٧ .
وأيضا :د . نازلى اسماعيل حسين ، مناهج البحث العمى ، صفحة ١٣٦ .
(٢) د . زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ ٢ ، صفحة ٣٥٦ .
(٣) Russell , B . , Human Known Knowledge , P . 365 .
(٤) التخارج Exclusio علاقة منطقية بين كليين أو صفتين ليس بينهما عامل مشترك ، ويقابل التداخل . (مجمع اللغة العربية ، المعجم الفلسفى ، ص ٤١ .

$$\frac{\overline{\text{ع}}}{\text{هـ}+\text{ك}} = \frac{\frac{\text{هـ}}{(\text{ع}-+\text{ك})} \times \frac{\overline{\text{ع}}}{\text{ك}}}{\text{خى}_{1}^{\text{ن}} \frac{\text{هـ}}{\text{ع}+\text{ك}} \quad \frac{\overline{\text{ع}}}{\text{ك}}}$$

هذه المعادلة تمكّننا – على سبيل المثال – من حل المشكلة الآتية[1] :

إذا افترضنا أن لدينا ثلاث حقائب تحتوى كل منها على خمس كرات ، غير أنها تختلف فى عدد ما تحتويه من الكرات البيضاء ، فواحدة منها تحوى على ثلاث كرات بيضاء فقط ، والأخرى على أربعة كرات بيضاء فقط ، والثالث لا تشتمل إلا على الكرات البيضاء . ولنفرض أنّا أخذنا حقيبة من تلك الحقائب الثلاث عشوائيًا ، أى لا ندرى ما إذا كانت الأولى أو الثانية أو الثالثة ، ثم سحبنا من الحقيبة المختارة ثلاث كرات ،فاتفق أنها بيضاء . فما هى درجة احتمال أن تكون هذه الحقيبة التى اخترناها عشوائيا هى الحقيبة الثالثة التى لا تحتوى إلا على كرات بيضاء فقط ؟

إننا إذا رمزنا بـ (د) إلى درجة الاحتمال ، و بـ (جـ) إلى كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة الثالثة التى تحتوى على الكرات البيضاء فقط ، و بـ (ط) إلى سحب ثلاث كرات بيضاء على تدير (جـ) ، و بـ (س) إلى كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة الأولى التى لا حتوى إلا لى ثلاث كرات بيضاء ، وبـ (و) إلى سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير (س) ، وبـ (ك) إلى كون أن الحيبة المختارة هى الحقيبة الثانية التى تحتوى على أربع كرات بيضاء ، وبـ (هـ) إلى سحب ثلاث كرات بيضاء على تقدير (ك) .

باستخدام هذه الرموز نحصل على المعادلة الآتية :

$$\text{د (جـ)} = \frac{\text{د (جـ)} \times \text{د (ط)}}{\text{د (جـ)} \times \text{د (ط)} + \text{د(س)} \times \text{د(و)} + \text{د (ك)} \times \text{و (هـ)}}$$

وبالتعويض عن الرموز بالأرقام تكون المعادلة كما يلى :

احتمال أن تكون الحقيبة هى الثالثة التى تحتوى على كرات بيضاء فقط يساوى :

(١) المشكلة مأخوذة من كتاب :
محمد باقر الصدر ، الأسس المنطقية للاستقراء ، صفحات ١٥٧ – ١٥٨ . وأيضًا : د . نازلى اسماعيل حسين ، مناهج البحث العلمى ، صفحات ١٣٧ – ١٣٨ .

$$\frac{\frac{١}{٣}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١ \times \frac{١}{٣}}{\frac{٤}{١٠}\times\frac{١}{٣}\times\frac{١}{١٠}\times\frac{١}{٣}+١\times\frac{١}{٣}}$$

أي أن احتمال كون الحقيبة المختارة هى الحقيبة التى تحتوى على كرات بيضاء فقط هو $\frac{٢}{٣}$.

وهذه المشكلة لها أهمية تاريخة تتعلق ببرهان لابلاس Laplace الخاص بالاستقراء(١).

(١١)

نظرية بيرنوى فى الأعداد الكبيرة :

يعد بيرنوى Bernoulli, J.S. (١٦٥٤ – ١٧٠٥) من أعلام النظرية الرياضية فى الاحتمالات . ولقد وضع كتابًا بعنوان « فن التخمين » The art of conjecture نشره ابن أخته نيقولا لابيرنوى عام ١٩١٣ – أى بعد وفاة خاله بثمان سنوات – ويقع الكتاب فى أربعة أجزاء ، ليس للاجزاء الأولى أهمية تاريخة كبيرة . أما الجزء الرابع ، فعلى الرغم من أنه تركه ناقصًا فانه يمثل صفحة هامة فى تاريخ تطور نظرية الاحتمالات . إذ يقدم فيه بيرنوى خطوط نظريته الخاصة التى تسمى باسمه . ففى القرن السابع عشر دأب الرعيل الأول من علماء الإحصاء ، على تجميع المعلومات الضرورية لتحديد الوفيات والمواليد وجنس المولود وغير ذلك . ولقد كشفت هذه الأبحاث الأولى عن واقعة جدية لم تكن متوقعة من قبل ، وهى : أنه لو وجد انتظام بين نوع معين من الأمثلة المجمعة ، فإن هذا النظام يصبح أكثر وضوحًا كلما تضاعف عدد الأمثلة موضوع البحث . كما تم اكتشاف أن الذكور والإناث لا تولد فحسب بنسب متساوية على وجه التقريب نحو رقم معين محدد عندما يصبح عدد الأمثلة المسجلة كبيرًا(٢) .

ونظرية بيرنوى ليست إلا الصياغة الدقيقة لهذه الظاهرة ، ويسميها المؤلفون عادة باسم قانون الأعداد الكبيرة . وإن كان كينز Keynes يراه إسمًا غير ملائم ، ويرى أن تسمى

---

(١) Russell, B., Human Knowledge, P. 365.

(٢) محمود أمين العالم ، فلسفة المصادفة ، صفحات ٢٠٢ – ٢٠٣ .

النظرية باسم « ثبات التكرارات الإحصائية » . وخلاصة نظرية بيرنوى أن درجة الاحتمال تزداد ثباتًا كلما مضت الأمثلة فى الزيادة[1] .

ولتوضيح هذه النظرية بمثال رمى قطعة العملة : (الصورة) و (الكتابة) ولنفترض أن ظهور (الصورة) مساويًا لاحتمال ظهور (الكتابة) وذلك فى حالة ما إذا أجرينا عددًا كافيًا من الرميات . وعلى ذلك لن تنحرف النسبة المئوية لهور (الصورة) بعد الرمية « ن » عن ٥٠ إلاّ بمقدار ضئيل جدًا تجيز إهماله (وحيث أن « ن » تمثل عددًا كافيًا من الرميات)[2] .

ووفقًا لنظرية الأعداد الكبيرة فإن النسبة المئوية لظهور « الصورة » ستبقى دائمًا بين ٤٩ و ٥١ . وإنه لا يمكننا دحض هذه النسبة ، لأننا إذا قررنا أن نتحقق من صدقها تجريبيًا باجراء المزيد من الرميات فسنجد أن هذا الإجراء سوف يثبت – لا أن يدحض – صحة هذه النسبة . حيث أن نظرية الأعداد الكبيرة تقول بأنه كلما زاد عدد الرميات كلما اقتربت النسبة من النصف ، أى أن التجربة ستدعم القول بأن النسبة المئوية لظهور « الصورة » تظل دائمًا بين ٤٩ و ٥١[3] .

وحتى إذا تقدمنا خطوة أبعد وأكدنا على أن نسبة ظهور « الصورة » ستظل دائمًا بين ٤٩,٩٪ ، ٥٠,١٪ . وأراد شخص ما ان يتحقق من صحة هذه النسبة فقام بإجراء المزيد من الرميات ووجد أن تأكيدنا السابق غير محقق ، وبناء على ذلك ، زعم هذا الشخص أن ازدياد عدد الرميات يهدم هذه النظرية . حتى فى هذه الحالة سيكون الرد ، هو : أن « هذه الرميات » لم تستمر إلى الحد الكاف . وعلى هذا لا يمكن لنظرية الأعداد الكبيرة أن يتم إثباتها أو دحضها بالدليل التجريبى[4] .

وبانتهائنا من معالجة نظرية « بيرنوى » فى الأعداد الكبيرة نكون قد انتهينا من عرض القضايا الأساسية لحساب الاحتمالات .

---

(١) المرجع السابق ، صفحة ٢٠٣ .

(٢) Russell, B., Human Knowlege, P. 366.

(٣) Ibid., 366.

(٤) Ibid., P. 366 .