الباب الثامن

التفاضل الجزئى

PARTIAL DIFFERENTIATION

٨ - ١ دوال المتغيرات المتعددة

Functions of Several Variables

إذا كان كل زوج من القيم لمتغيرين مستقلين x ، y يناظره قيمة معينة لمتغير z قيل إن z دالة المتغيرين المستقلين x ، y . فمثلا ، مساحة المستطيل هى دالة الطول والعرض معاً ، كما أن حجم الاسطوانة الدائرية القائمة هو دالة نصف قطر القاعدة والارتفاع .

وتكتب دالة متغيرين مستقلين x ، y على الصورة

$$z = f(x, y)$$

وعامة إذا كانت w دالة متغيرات متعددة x ، y ، z ، ... ، u ، t فإننا نكتب

$$w = f(x, y, z, \cdots, u, t)$$

٨ - ٢ الزيادة الجزئيه والزيادة الكليه للداله

Partial and Total Increment of a Function

نفرض أن z دالة المتغيرين المستقلين x ، y ، أى $z = f(x,y)$. فإذا

زدنا x بمقدار Δx مع الاحتفاظ بقيمة y دون تغيير ، فإن z تزداد. ومقدار هذه الزيادة فى z تسمى الزيادة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى x ويرمز لهذه الزيادة $\Delta_x z$ ، أى أن

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x , y) - f(x , y).$$

وبالمثل ، إذا إحتفظنا بقيمة x ثابتة ثم زدنا y بمقدار Δy فإن z تزداد تبعاً لذلك . وهذه الزيادة تسمى الزيادة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى y ويرمز لها بالرمز $\Delta_y z$ ، أى أن

$$\Delta_y z = f(x , y + \Delta y) - f(x , y).$$

وأخيراً ، إذا زاد x بمقدار Δx ، وزاد y بمقدار Δy ، فإن الزيادة الجديدة Δz فى z تسمى الزيادة الكلية للدالة z ، وتعرف بالعلاقة

$$\Delta z = f(x + \Delta x , y - \Delta y) - f(x , y).$$

ومما يجب ملاحظته أنه فى الحالة العامة لا تساوى الزيادة الكلية Δz مجموع الزيادتين الجزئيتين $\Delta_x z$ ، $\Delta_y z$.

مثال

احسب الزيادة الجزئية والكلية للدالة $z = x\,y$. (مساحة مستطيل طوله x وعرضه y) .

الحل :

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\,y - x\,y = y\,\Delta x$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\,\Delta y$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\,\Delta y$$

٨ — ٣ المشتقات الجزئيه لداله المتغيرات المتعددة

Partial Derivatives of a Function of Several Variables

تعرف المشتقة الجزئية للدالة $z = f(x, y)$ بالنسبة إلى x على أنها نهاية النسبة بين الزيادة الجزئية $\Delta_x z$ والزيادة Δx عندما تؤول Δx إلى الصفر. ويرمز لهذه المشتقة عادة بأحد الرموز :

$$z_x \,,\; f_x(x, y) \,,\; \frac{\partial z}{\partial x} \,:\; \frac{\partial f}{\partial x}$$

ويكتب التعريف السابق على الصورة

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

بالمثـل ، تعرف المشتقة الجزئية للدالة $z = f(x, y)$ بالنسبة إلى y على أنها نهاية النسبة بين الزيادة الجزئية $\Delta_y z$ والزيادة Δy عندما تؤول Δy إلى الصفر . وتمثل هذه المشتقة رمزياً كالآتى

$$z_y \,,\; f_y(x, y) \,,\; \frac{\partial z}{\partial y} \,.\; \frac{\partial f}{\partial y} \,\bullet$$

ومن التعريف يلى مباشرة

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

وإذا لاحظنا أننا نحسب $\Delta_x z$ مع تثبيت y ، $\Delta_y z$ مع تثبيت x ، فإنه يمكن القول بأن المشتقة الجزئية للدالة $z = f(x,y)$ بالنسبة إلى x هى المشتقة بالنسبة إلى x مع إعتبار y ثابتاً ، كما أن المشتقة الجـزئية للدالة بالنسبة إلى y نحصل عليها بالتفاضل بالنسبة إلى y مع إعتبار x ثابتاً . ومن الواضح أن القواعد المتبعة فى التفاضل الجزئى هى نفس قواعد التفاضل الخاصة بالدالة ذات المتغير الواحد ، مع ملاحظة أى المتغيرين الذى تحسب المشتقة بالنسبة له .

مثال (١)

أوجد المشتقات الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ للدالة $z = x^2 \sin y$

الحل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$$

مثال (٢)

نفس المثال السابق للدالة $z = x y$

الحل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\, x^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

ملاحظه : بنفس الطريقة يمكن إيجاد المشتقات الجزئيه لدالة ذات أى عدد من المتغيرات المستقلة

مثـال

أوجد المشتقات الجزئية للدالة $u = x^3 + y^2 + xtz^3$

الحـل :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3 \quad , \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3xt\ z^2 \qquad , \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3$$

٨ ـ ٤ الزيادة الكليه والتفاضليه الكليه (التامه)

Total Increment and Total (Exact) Differential

إعتبر الدالة $z = f(x,y)$ ولنحسب الآن الزيادة الجزئية

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x\ ,\ y) - f(x\ ,\ y)$$

كما فى بند (٢ ـ ٩) فنجد أن

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \alpha \Delta_x$$

حيث α متناهية فى الصغر تؤول إلى الصفر عندما $\Delta x \longrightarrow 0$.

كذلك نحسب الزيادة الجزئية $\Delta_y z$ بنفس الطريقة فينتج

$$\Delta_y z = \frac{\partial z}{\partial n} \Delta y + \beta \Delta y$$

حيث β متناهية فى الصغر تؤول إلى الصفر عندما $\Delta y \longrightarrow 0$.

فاذا كانت الزيادات Δx ، Δy صغيرة صغراً كافيا فإنه يمكن اعتبار الزيادة الكلية Δz تساوى مجموع الزيادتين الجزئيتين $\Delta_x z$ ، $\Delta_y z$ بالتقريب ، أى

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z \qquad \text{تقريباً}$$

$$\text{or} \quad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \qquad \text{تقريباً}$$

الحدان الأول والثانى يمثلان الجزء الرئيسى من هذه الزيادة الذى يسمى التفاضلة الكلية أو التامة dz للدالة z وحيث أن الزيادة فى المتغير المستقل تساوى تفاضلته فان التفاضله الكلية تصبح

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

وإذا أهملنا المتناهيات فى الصغر من الرتبة الثانية فى علاقة Δz نحصل على العلاقة التقريبية $dz \simeq \Delta z$ ، أى

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

ويمكن تعميم العلاقات الأخيرة إذا زاد عدد المتغيرات المستقلة عن إثنين .

مثال (١)

أحسب الزيادة الكلية والتفاضلة الكلية للدالة $z = xy$ عند النقطة $(2,3)$ عندما $\Delta x = 0,1$ ؛ $\Delta y = 0.2$

الحل :

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy = y\Delta x + x\Delta y$$

بالتعويض بالقيم العددية نجد أن

$$\Delta z = 3(0.1) + 2(0.2) + (0.1)(0.2) = 0.72$$

$$dz = 3(0.1) + 2(0.2) = 0.7$$

مثـال (٢)

اوجد التفاضلة التامة للدالة

$$u = e^{x^2 + y^2} \sin^2 z$$

الحـل :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\, e^{x^2 + y^2} \sin^2 z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\, e^{x^2 + y^2} \sin^2 z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2 + y^2}\, 2 \sin z \cos z = e^{x^2 + y^2} \sin 2z$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy - \frac{\partial u}{\partial z}\, dz$$

$$= e^{x^2 + y^2} (2x \sin^2 z\, dx + 2y \sin^2 z\, dy + \sin 2z\, dz)$$

٨ ـ ٥ المشتقات الجزئية العليا

Higher Partial Derivatives

إذا كانت $z = f(x,y)$ فإن مشتقتيها الجزئيتين $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ تكونان عامة دالتين فى كل من x ، y . لذلك يمكن إيجاد المشتقات الجزئية لكل منها فنحصل على أربع مشتقات جزئية من الرتبة الثانية للدالة z وهى

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ بالتفاضل مرتين متتاليتين بالنسبة إلى x ،

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ بالتفاضل أولا بالنسبة إلى x ثم بالنسبة إلى y ،

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}$ بالتفاضل أولا بالنسبة الى y ثم بالنسبة إلى x ،

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ بالتفاضل مرتين متتاليتين بالنسبة الى y .

وهكذا للمشتقات الجزئية من الرتب الأعلى .

والجدير بالملاحظة أنه إذا كانت : $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x}$ ، $\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}$

دوالا متصلة فى x ، y فإن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}$$

أى أن الترتيب فى التفاضل بالنسبة الى x ، y لايلعب أى دور فى ايجـــاد المشتقة الثانية المختلطة .

مثـال

أوجد المشتقات الجزئية الثانية للدالة $z = x^2 y + y^3$

الحل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,x\,y \text{ ، } \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = 2x$$

تمــارين

١) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدوال الآتية :

a) $z = x^2 \sin^2 y$ b) $z = x^{y^2}$

c) $u = e^{x^2 + y^2 + z^2}$ d) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

e) $z = \tan^{-1}(xy)$ f) $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

g) $z = \sin^{-1}(x + y)$ h) $u = e^{x/y} + e^{z/y}$

٢) أوجد التفاضلة الـكلية لـكل من الدوال لآتية :

a) $z = x^2 + xy^2 + \sin y$ b) $z = \ln (xy)$

c) $z = e^{x^2 + y^2}$ d) $w = \sin^{-1} \frac{x}{y}$

٣) إحسب $f_x(2,3)$ ، $f_y(2,3)$ إذا كان $f(x,y) = x^2+y^2$.

٤) أوجد قيمة $d\ f(x,y)$ عند $x=1$ ، $y=0$ ، $dx = \frac{1}{2}$ ، $dy = \frac{1}{4}$ إذا كان $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

٥) أوجد مشتقات الرتبة الثانية للدالة $z = x^3 - 4x^2 y + 5y^2$

٦) أوجد مشتقات الرتبة الثانية للدالة $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$

٧) إذا كان $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ فأثبت أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 .$$

٨) إذا كان $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}$ فان $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$

٩) إذا كان $z = \ln (x^2 + y^2)$ فأثبت أن $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$