الباب السابع

تطبيقات التكامل المحدد

APPLICTION OF THE DEFINITE INTEGRAL

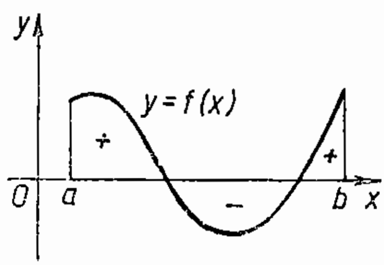
٧ - ١ حساب المساحات :

Compnting Areas

وجدنا فى بند (٣ - ٥) أنه إذا كانت الداله $f(x) \geqslant 0$ فى الفترة $[a , b]$ فإن المساحة المحصورة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور x والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ يمثلها التكامل المحدد

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \cdots \cdots \qquad (1)$$

فإذا كانت $f(x) \leqslant 0$ فى الفتره $[a , b]$ ، يكون التكامل المحـــدد $\leqslant 0$ أيضاً ، وبالتالى المساحة المحسوبة بواسطته . وإذا غيرت الدالة $f(x)$ اشارتها فى الفترة $[a , b]$ عدداً محدودا من المرات فإن التكامل المحدد يكون موجبا فى الفترات التى تكون فيها الدالة $f(x) \geqslant 0$ وسالبا حيث تكون $f(x) \leqslant 0$. وعلى ذلك فإن التكامل على طول الفترة $[a ,b]$ يعطى الفرق بين المساحات الواقعة فوق محور x وتلك الواقعة تحته ، شكل (٧-١) . أى أن التكامل المحدد يعطى



شكل (٧ - ١)

المجموع الجبرى لهذه المساحات . فإذا كان المطلوب إيجاد كل المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور x وجب إيجاد مجموع القيم المطلقه للتكاملات التى نحصل عليها على كل فترة جزئيه على حده تكون فيها الدالة ذات اشارة واحدة ، أى نحسب التكامل المحدد للقيمه المطلقة للدالة على طول الفترة

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

مثـال (١)

أحسب المساحة الواقعة تحت المنحنى الجيبى $y = \sin x$ فى الفترة $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ثم أحسب المساحة الكلية المحصورة بين المنحنى ومحور x .

الحل : بالرجوع إلى شكل (٤-١) والخاص بهذا المنحنى نجد أنه ينقسم إلى جزئين فى الفترة $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ، يقع أحدهما فوق محور x والآخر تحته . وحيث أن المساحتين متساويتان فإن المجموع الجبرى للمساحتين يكون صفرا :

$$A = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \Big[\cos x\Big]_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

ولإيجاد المساحة الكلية المحصورة بين المنحنى ومحور x نقسم الفتره $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ إلى نصفين ، النصف الاول $0 \leqslant x \leqslant \pi$ وفيه $\sin x \geqslant 0$ والنصف الآخر ، $\pi \leqslant x \leqslant 2$ وفيه يكون $\sin x \leqslant 0$ وتصبح المساحة الكلية هى

$$A = \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right| ;$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -2$$

وبالتالى نحصل على المساحة الكلية

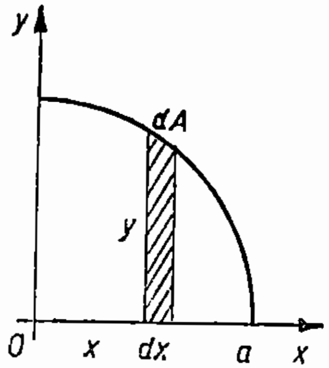
$$A = 2 + |-2| = 4$$

مثال (٢)

أوجد مساحة الدائرة التى نصف قطرها a

الحل : نأخذ مركز الدائرة كنقطة أصل ، شكل (٧ - ٢) ، فتكون معادلتها هى

$$x^2 + y^2 = a^2$$



شكل (٧-٢)

ونظرا لتماثل المساحة ، يكفى حساب مساحة ربع الدائرة ثم ضرب الناتج فى 4

$$dA = y\ dx = \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

وتكون المساحة الكلية للدائرة مساوية للتكامل المحدد

$$A = 4 \int_0^a dA = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

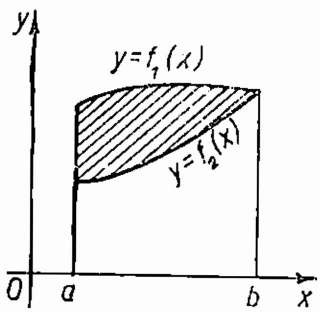
وقد سبق لنا حساب هذا التكامل المحدد فى مثال (١) بند (٥-٨) ، فكان $\frac{1}{4}\pi a^2$. وعلى هذا فمساحة الدائرة تصبح

$$A = 4 \times \frac{1}{4} \pi a^2 = \pi a^2$$

كما هو معروف .

المساحة المحصورة بين منحنيين

نفرض أن المطلوب حساب المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = f_1(x)$ ، $y = f_2(x)$ والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ حيث $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ كما فى شكل



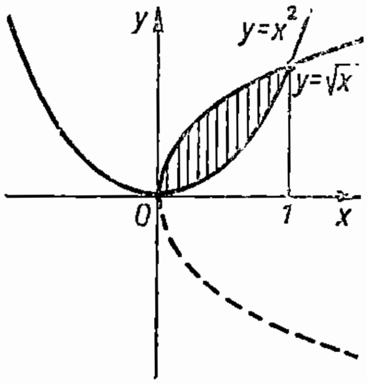
شكل (٧-٣)

(٧ - ٣) . من الواضح أن هذه المساحة تكون

$$A = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

مثـال

أحسب المساحـة المحصورة بين المنحنيين $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^2$



شكل (٧ ـ ٤)

الحـل : نوجد أولا نقط تقاطـع المنحنيين ، شكل(٧ - ٤):

$$\sqrt{x} = x^2 \ , \ x = x^4 \ , \ x\,(x^3 - 1) = 0; \ x_1 = 0 \ , \ x_2 = 1$$

$$\therefore \ A = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\Big[x^{3/2}\Big]_0^1 - \frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} .$$

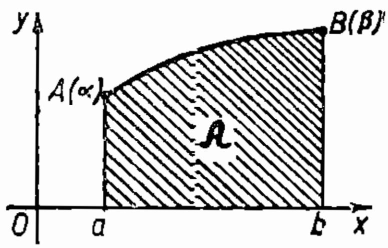
المساحة تحت منحنى ممثل بارامتريا :

نفرض أن المنحنى معطى بمعادلتيه البارامتريتين

$$x = \varphi(t) \quad . \quad y = \psi(t) \qquad \cdots \cdots \cdots \qquad (2)$$

حيث $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ ، $\varphi(\beta) = b$ ، $\varphi(\alpha) = a$ ، شكل (٧ - ٥).

نفرض أن المعادلتين (2) تعرفان دالة ما مثل $y = f(x)$ فى الفترة $[a,b]$.
على هذا يمكن حساب المساحة تحت المنحنى من الصيغة



شكل (٧ — ٥)

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y\, dx.$$

نحول الآن المتغير فى هذا التكامل بوضع $x = \varphi(t)$ ، $dx = \varphi'(t)\, dt$.
من (2) ينتج أن

$$y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t).$$

ونأخذ المساحة A الصورة

$$A = \int_\alpha^\beta \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt$$

مثـال

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالقطع الناقص $x = a \cos t$ ، $y = b \sin t$

الحـل : نحسب مساحة النصف العلوى من القطع الناقص ثم نضاعفها . هنا يتغير x من $-a$ إلى $+a$ وبالتالى يتغير t من π إلى 0 .

$$A = 2 \int_{\pi}^{0} (b \sin t)(-a \sin t \, dt) = -2 a b \int_{\pi}^{0} \sin^2 t \, dt$$

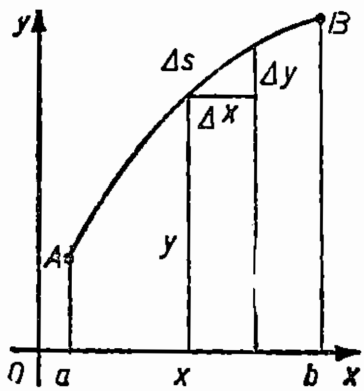
$$= 2 a b \int_{0}^{\pi} \sin^2 t \, dt = 2 a b \int_{0}^{\pi} \tfrac{1}{2} (1 - \cos 2t) \, dt$$

$$= a b \left[t - \tfrac{1}{2} \sin 2t\right]_0^{\pi} = \pi a b .$$

٧ ـ ٢ طول قوس من منحنى

The Arc Length of a Curve

نفرض أن لدينا منحنى معطى بمعادلته الكارتيزيه $y = f(x)$ وأن المطلوب إيجـــاد طول القوس $A B$ من هـذا المنحنى المحصور بين المستقيمين الرأسيين $x = a$ ، $x = b$ ، شكل (٧ - ٦) .



شكل (٧ ـ ٦)

نقسم القوس AB إلى عناصر صغيرة ΔS . فواضح من الشكل أن

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\ \Delta x$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

وبأخذ النهاية عندما Δx تؤول إلى الصفر ينتج أن

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

وعلى هـــذا فإن عنصر القوس يصبح

$$ds = \frac{ds}{dx}\ dx$$

or

$$ds = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ dx$$

وبالتكامل على طول القوس من A إلى B نحصل على

$$s = \int_A^B ds = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ dx \qquad \cdots\ \cdot\cdot \quad (1)$$

مثال

احسب طول محيط الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$.

الحل : نحسب أولا طـــول ربع المحيط الواقع فى الربع الأول فتكون معـــادلته

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \; , \; \frac{dy}{dx} = - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\therefore \; \tfrac{1}{4} s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} \, dx = \int_0^a \frac{a \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= a \left[\sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a = \tfrac{1}{2} \pi a.$$

ويكون طول محيط الدائرة هو $2\pi a$

طول قوس من منحنى ممثل بـ"بارامتريا" :

نفرض أن المنحنى ممثل بمعادلتيه البارامتريتين

$$x = \varphi(t) \; , \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

حيث $\varphi(t)$ ، $\psi(t)$ متصلة ولها مشتقات متصلة كما أن $\varphi'(t)$ لاتنعدم فى الفترة المعطاه . فى هذه الحالة تعرف المعادلتان (2) دالة $y = f(x)$ تكون متصلة هى ومشتقتها

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \, .$$

نفرض $a = \varphi(\alpha)$ ، $b = \varphi(\beta)$. فإذا عوضنا فى التكامل بالعلاقة $x = \varphi(t)$ ، $dx = \varphi'(t)\, dt$ ينتج أن

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\, \varphi'(t)\, dt$$

or $$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

مثال

احسب طول الاسترويد $x = a\cos^3 t$ ، $y = a\sin^3 t$.

الحل : حيث أن المنحنى متماثل بالنسبة للمحورين (شكل ٤ - ٢٢) فإنه يكفى حساب طول ربع المنحنى الواقع فى الربع الأول ، حيث يتغير البارامتر t من 0 إلى $\frac{1}{2}\pi$:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$\frac{1}{4} s = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt$$

$$= 3a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\, dt = 3a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin t\cos t\, dt$$

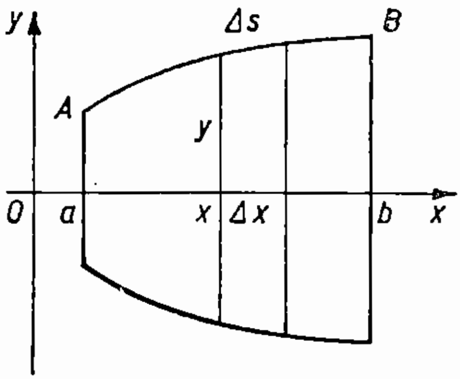
$$= 3a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin t \; d(\sin t) = \frac{3}{2} a \left| \sin^2 t \right|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{3}{2} a$$

فيكون طول الاسترويد مساويا 6a

٧ ـ ٣ حجم الجسم الدورانى

The Volume of a Solid of Revolution

إذا دارت المساحة a A B b (شكل ٧ ـ ٧) حول محور x دورة كاملة ينشأ جسم دورانى محوره هو محور x .



شكل (٧ ـ ٧)

فإذا قطعنا الجسم بمستوى عمودى على محور x نحصل على دائرة نصف قطرها y وبالتالى تعتمد مساحتها على موقع هذا المستوى ؛ أى أن هذه المساحة A تكون دالة x :

$$A(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2,$$

حيث $y = f(x)$ هى معادلة المنحنى AB.

نقطع الجسم بمستويات متماثلة إلى شرائح ، فيكون عنصر الحجم على شكل قرص دائرى قائم محوره هو محور x ، قاعدته الدائرية نصف قطرها y وارتفاعه Δx، ويكون حجمه هو

$$\Delta V = \pi y^2 \, \Delta x$$

$$\therefore \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi y^2$$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ نحصل على

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2$$

ومن هـذا المعدل نوجد عنصر الحجم

$$dV = \frac{dV}{dx} dx = \pi y^2 \, dx$$

وبجمع هذه العناصر باستخدام التكامل المحدد نحصل على الحجم الكلى

$$V = \int dV = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

ملحوظة : إذا دارت المساحة حول محـور y ، فإن حجـم الجسم الناشيء يصبح

$$V = \pi \int_{c}^{d} x^2 \, dy$$

مثال (١)

أوجد حجم الجسم الذى يتولد من دوران المساحـــة المحصورة بين المنحنى $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ومحور x والمستقيمين $x = o$ ، $x = b$.

الحل :

$$V = \pi \int_{o}^{b} y^2 \, dx = \pi \, a^2 \int_{o}^{b} \cosh^2 \frac{x}{a} \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \pi \, a^2 \int_{o}^{b} \left(1 + \cosh \frac{2x}{a} \right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \pi \, a^2 \left| x + \frac{a}{2} \sinh \frac{2x}{a} \right|_{o}^{b}$$

$$= \tfrac{1}{2} \pi \, a^2 \left[b + \frac{a}{2} \sinh \frac{2b}{a} \right]$$

مثـال (٢)

أوجد حجم الكرة التى نصف قطرها a

الحل : نختـــار مركز الكرة كنقطة أصل وبذلك يمكن القول بأن الكرة هى جسم دورانى ينشأ من دوران نصف الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ الواقع فوق محور السينات دورة كاملة حول هذا المحور . وعلى هذا يكون حجم الكرة هو

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2 \, dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \, dx = 2\pi \int_{0}^{a} (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= 2\pi \left[a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3 \right]_0^a = 2\pi \times \tfrac{2}{3} a^3 = {}^4/_3 \, \pi \, a^3$$

كما هو معروف .

٧ ـ ٤ مساحة سطح المجسم الدورانى

The Surface of a Solid of Revolution

نفرض أن لدينا سطحاً تولد من دوران المنحنى $y = f(x)$ حول محور x ، والمطلوب ايجاد مساحة سطحه فى الفترة $[a , b]$. نفرض أن الدالة $f(x)$ متصلة هى ومشتقتها عند جميع نقط الفترة $[a , b]$. نقسم مساحة السطح إلى حلقات دائرية بمستويات متوازية عموديه على محور x كما فى الحالة السابقة ، شكل (٧ ـ ٧) . نعتبر الحلقة المحصورة بين المستويين عند x ، $x + \Delta x$. بافراد هذه الحلقة نحصل على شريط طوله يساوى طول محيط القاعدة الدائرية $2\pi y$ وعرضه يساوى Δs . وعلى ذلك تكون مساحة هذا الشريط هى

$$\Delta S = 2\pi y \, \Delta s$$

وقــد وجدنا فى بند (٧ - ٢) أن

$$\Delta s = \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2} \quad \Delta x$$

بالتعويض فى مساحة الشريط نجد أن

$$\Delta S = 2\pi y \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2} \quad \Delta x$$

or

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = 2\pi y \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}$$

بأخذ النهاية عندما Δx تؤول إلى الصفر ينتج أن

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi y \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

But

$$dS = \frac{dS}{dx} dx$$

لذلك يأخذ عنصر مساحة السطح الصورة

$$dS = 2\pi y \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \quad dx$$

نجمع أمثال هــذه العناصر التى يتكون منها السطح المطلوب باستخدام التكامل المحــدد

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ dx$$

مثال (١)

أوجد مساحة السطح المكافىء الذى يتولد من الدوران حول محور x لقوس

القطع المكافىء $y^2 = 8x$ المحصور بين $x = 0$ ، $x = 6$.

الحل :

$$y = \sqrt{8x}\ ,\ y' = \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ .$$

$$\therefore \quad S = 2\pi \int_0^6 \sqrt{8x}\ \sqrt{\frac{x+2}{x}}\ dx$$

$$= 4\pi \sqrt{2} \int_0^6 \sqrt{x+2}\ dx$$

$$= 4\pi \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \left| (x+2)^{3/2} \right|_0^6$$

$$= \frac{8}{3} \pi \sqrt{2}\ [\ 16\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\ ] = \frac{224}{3}\ \pi$$

مثال (٢)

أوجد مساحة سطح كرة نصف قطرها a

الحـل : ينشأ سطح الـكرة بإداره نصف محيط الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$
حول قطره الذى سنفترض أنه محور x . نوجد أولا y' من معادلة الدائرة :

$$2x + 2yy' = 0$$

$$\therefore \quad y' = -\frac{x}{y}$$

وبالتعويض فى علاقة مساحة السطح نجد أن

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} y \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$$

$$= 2\pi a \int_{-a}^{a} dx = 4\pi a^2$$

كما هو معروف .

٧ ـ ٥ المركز المتوسط لمساحة مستوية

Centroid of a Plane Area

تخضع عملية إيجاد المركز المتوسط لمساحة مستوية للقاعدتين الآتيتين :

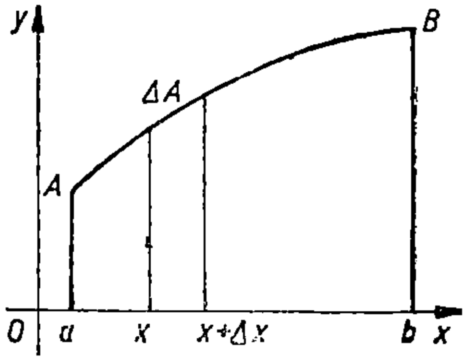
القاعدة الاولى : إذا كان للمساحة المستوية محور تماثل فإن مركزها المتوسط يقع على المحور .

القاعدة الثانيه : إذا أمكن تقسيم منطقة مستوية R مركزها المتوسط $(\bar{x}, \bar{y})$ إلى مناطق R_1 ، R_2 ، … R_n مساحاتها A_1 ، A_2 ، … ، A_n ومراكزها المتوسطة هى $(\bar{x}_1 ، \bar{y}_1)$ ، $(\bar{x}_2 ، \bar{y}_2)$ ، … ، $(\bar{x}_n ، \bar{y}_n)$ ، فباستخدام العزوم نجد أن

$$\bar{x} = \frac{A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + \cdots + A_n \bar{x}_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n},$$

$$\bar{y} = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 + \cdots + A_n \bar{y}_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}.$$

نفرض الآن أن لدينا مساحة محددة بالمنحنى AB للدالة $y = f(x)$ ومحور x والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ كما فى شكل (٧ ـ ٨) .



شكل (٧ ــ ٨)

بتقسيم المساحة a A B b إلى عناصر صغيرة نجـــد أن المركز المتوسط لعنصر المساحة dA هو $(x , \frac{1}{2} y)$ تقريباً . بتطبيق قاعدة العزوم حول محور y نجـــد أن

$$A \cdot \bar{x} = \int x \, dA$$

أى أن عزم المساحة الكلية حول محـور y يساوى مجموع عزوم العناصر حول نفس المحور .

بالتعويض عن $dA = y \, dx$ ، $A = \int y \, dx$ نحصل على

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy \, dx}{\int_a^b y \, dx}$$

وبالمثل إذا أخذنا العزوم حول محور x مع مراعاة أن الاحداثى الرأسى للمركز المتوسط للعنصر dA هو $\frac{1}{2}$ y ، نجد أن

$$A.\,\bar{y} = \int \tfrac{1}{2}\, y\, dA$$

or

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y^2\, dx}{2\int_a^b y\, dx}$$

مثال (٦)

أوجد المركز المتوسط لمساحة نصف دائرة نصف قطرها a .

الحل : نأخذ مركز نصف الدائرة كنقطة أصل بحيث ينطبق القطر على محور السينات . من الواضح أن محور الصادات هو محور تماثل ، وبالتالى يقع المركز المتوسط عليه تبعاً للقاعدة الأولى . ويكفى فى هذه الحالة تعيين الاحداثى الرأسى $\bar{y}$ فقط . ونظراً لأن $y^2 = a^2 - x^2$ من معادلة الدائرة ، وأن $A = \frac{1}{2}\pi a^2$ فبالتعويض فى $\bar{y}$ نحصل على

$$\bar{y} = \frac{\int_{-a}^{a} y^2\, dA}{2\,A} = \frac{2\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx}{\pi\, a^2}$$

$$= \frac{2}{\pi a^2}\Big[a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3\Big]_0^a = \frac{4a}{3\pi}$$

مثال (٢)

أوجد المركز المتوسط للمنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ ومحور x والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 3$.

الحل : مساحة المنطقة المعطاه تساوى

$$A = \int_1^3 x^2\, dx = \frac{1}{3} \Big| x^3 \Big|_1^3 = \frac{1}{3}(27 - 1) = \frac{26}{3}.$$

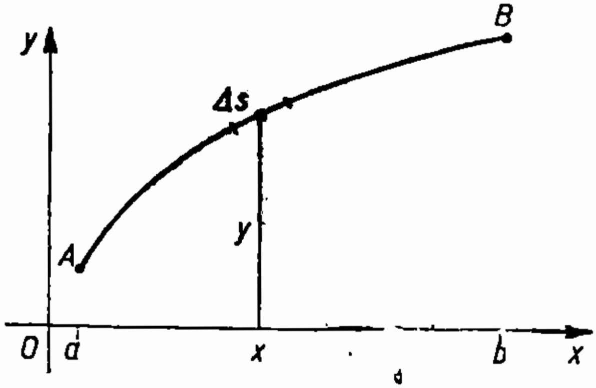
$$\overline{x} = \frac{3}{26} \int_1^3 x^3\, dx = \frac{3}{26} \times \frac{1}{4} \Big[x^4 \Big]_1^3 = \frac{3}{26} \times \frac{1}{4} \times 80 = \frac{30}{13},$$

$$\overline{y} = \frac{3}{26} \cdot \frac{1}{2} \int_1^3 x^4\, dx = \frac{3}{26} \times \frac{1}{10} \Big| x^5 \Big|_1^3 = \frac{3}{26} \times \frac{1}{10} \times 242 = \frac{363}{130}.$$

٧ ـ ٦ المركز المتوسط لقوس من منحنى

Centroid of an Arc of a Curve

نفرض أن القوس معطى بالمعادلة $y = f(x)$ بين النقطتين $A(a, f(a))$ ، $B(b, f(b))$.



شكل (٧ ـ ٩)

نقسم هـــذا القوس إلى عناصر صغيرة Δs كما فى شكل (٧ - ٩) ، ونعتبر عنصر طول القوس Δs الذى مركزه المتوسط هو (x , y) . بأخذ العزوم حول كل من المحورين نجـد أن

$$\bar{x} \cdot s = \int_a^b x \, ds \quad , \quad \bar{y} \cdot s = \int_a^b y \, ds$$

or

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \, ds}{\int_a^b dx} \, , \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b y \, ds}{\int_a^b dx}$$

حيث $ds = \sqrt{1 + (y')^2} \, dx$ ، والتكامل الظاهر فى المقـامات يساوى s طول القوس $A B$.

مثـال

أوجد المركـز المتوسط للقوس من الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ الواقـع فى الربـع الأول .

الحـل : نلاحظ أن المستقيم $y = x$ هو محور تماثل للقوس وعلى ذلك فان $\bar{x} = \bar{y}$.

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} \, dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx \, ,$$

$$\int_0^a ds = \tfrac{1}{4} \times 2 \pi a = \tfrac{1}{2} \pi a \, ,$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2}{\pi a} \int_0^a \frac{a\,x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2a}{\pi} = \bar{y}\ .$$

٧ - ٧ المركز المتوسط لجسم دورانى

Centroid of a Solid of Revolution

فى حساب المركز المتوسط لجسم دورانى يجب مراعاة القاعدتين الآتيتين :

القاعدة الاولى : المركز المتوسط لجسم دورانى يقع على محور الدوران فاذا كان الأخير هو محور x فإنه يكفى حساب $\bar{x}$.

القاعدة الثانية : إذا قسم الجسم إلى أقسام صغيرة حجومها V_1 ، V_2 ، .. V_n والاحداثيات السينية لمراكزها المتوسطة هى $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ ، ... ، $\bar{x}_n$ فإن :

$$\bar{x} = \frac{V_1 \bar{x}_1 + V_2 \bar{x}_2 + \cdots + V_n \bar{x}_n}{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}\ .$$

نفرض أن لدينا منطقة محددة بالمنحنى $y = f(x)$ ، حيث $f(x) \geqslant 0$ ، ومحور x والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ ، ثم أدرنا هذه المساحة حول محور x فتولد المجسم الدورانى المبين فى شكل (٧ - ٧) . حسب القاعدة الأولى يقع المركز المتوسط لهـــذا المجسم على محور الدوران ، أى محور x . نقسم المجسم بمستويات عمودية على محور x إلى عناصر ΔV تقع مراكزها على محور السينات. ونفرض أن المركز المتوسط لعنصر الحجم ΔV هو (x, o) . بأخذ العزوم حول محور y نجد أن

$$V \cdot \bar{x} = \int_a^b x\ dV$$

or

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \pi\, x\, y^2\, dx}{\int_a^b \pi\, y^2\, dx}$$

ويلاحظ هنا أن المقام هو حجم الجسم الدورانى .

مثال

أوجد المركز المتوسط لنصف كرة مصمته نصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل ومحورها فى الاتجاه الموجب لمحور **x** .

الحل : تتولد نصف الكرة من دوران ربع الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ حول محور x :

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x\,(a^2 - x^2)\, dx}{\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx} = \frac{3}{8}\, a$$

٧ – ٨ المركز المتوسط لسطح دورانى

Centroid of Surface of Revolution

إذا دار قوس من منحنى حـــول محور x تنشأ قشرة دورانية محورها هو محور الدوران ، شكل (٧ – ٧) ، وبالتالى يقع مركزها المتوسط على هذا

المحور . باتباع نفس طريقة التقسيم السابقة نجد أن مساحة سطح الشريحة المتولدة من دوران القوس Δs هى $2\pi\ y\ \Delta s$ وباستخدام قاعدة مشابهة للقاعدة الثانية فى البند السابق نحصل على

$$S \cdot \bar{x} = \int_a^b x\, dS$$

or

$$\bar{x} = \frac{2\pi \int_a^b x\, y\, ds}{2\pi \int_a^b y\, ds} = \frac{\int_a^b x\, y\, ds}{\int_a^b y\, ds}$$

مثـال

أوجد المركز المتوسط لسطح نصف كرة نصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل ومحورها هو محور x .

الحـل : ينشأ السطح من دوران ربع الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ الواقع فى الربع الأول حول محور x .

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}\,,\ ds = \sqrt{1 + (y')^2}\ dx = \frac{a\ dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,,$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x\, y\, ds}{\int_0^a y\, ds} = \frac{a \int_0^a x\, dx}{a \int_0^a dx} = \frac{\frac{1}{2}\, a^2}{a} = \frac{1}{2}\, a$$

٧ ـ ٩ نظريات باباس

Theorems of Pappus

النظرية الاولى : إذا دارت منطقة R حول محور لا يقطعها فإن حجم المجسم المتولد من الدوران يساوى مساحة المنطقة R مضروباً فى طول مسار مركزها المتوسط .

النظريه الثانيه : إذا دار قوس مستوى C حول محور لا يقطعه فإن مساحة السطح المتولد من الدوران يساوى طول القوس C مضروبا فى طول مسار مركزه المتوسط .

مثال (١)

أوجد حجم المجسم الناتج من الدوران حول محور y للمنطقة المحددة بالقطع المكافىء $y = 4x - x^2$ ومحور x فى الفترة $0 \leqslant x \leqslant 4$.

الحل : حيث أن القطع محدب ومحوره رأسى لذا يكون $\bar{x} = 2$. كذلك تكون مساحة المنطقة هى

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx = \frac{32}{3}$$

ويكون حجم المجسم الناتج من الدوران هو

$$V = \frac{32}{3} \times 2\pi \times 2 = \frac{128\pi}{3} .$$

مثـال (٢)

أوجد مساحة السطح الناشىء من الدوران حول محور y لقوس القطع المكافىء $y = 4x - x^2$ فى الفترة $0 \leqslant x \leqslant 4$.

الحـل : كما فى المثال السابق يكون $\bar{x} = 2$. أما طول القوس فهو

$$\int ds = \int_0^4 \sqrt{1 + (4 - 2x)^2}\, dx = 2\sqrt{17} + \tfrac{1}{2} \ln (4 + \sqrt{17})$$

وتصبح مساحة السطح الدورانى هى

$$2\pi \times 2 \times [2\sqrt{17} + \tfrac{1}{2} \ln (4 + \sqrt{17})]$$

$$= 2\pi [4\sqrt{17} + \ln (4 + \sqrt{17})] .$$

مثال (٣)

أوجد المركز المتوسط لمساحة نصف دائرة نصف قطرها a .

الحل : إذا أردنا نصف الدائرة حول قطرها الأفقى تنشأ كرة .

وحسب نظرية باباس الأولى يكون الحجم هو

$$V = A \cdot 2\pi \bar{y}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{4a}{3\pi}$$

كما سبق إيجاده فى مثال (١) بند (٧ - ٥) .

مثال (٤)

أوجد المركز المتوسط لقوس على شكل نصف دائرة نصف قطرها a .

الحـل : من نظرية بابس الثانية تكون مساحة سطح الكرة

$$S = s \cdot 2\pi \, \bar{y}$$

$$\therefore \; \bar{y} = \frac{S}{2\pi s} = \frac{4\pi a^2}{2\pi \cdot \pi a} = \frac{2a}{\pi}$$

كما سبق إيجاده فى مثال بند (٧ - ٦) .

تمــارين

١) أوجد باستخدام التكامل المحدد المساحة المحصورة بين المنحنيات الآتية :

$$y = 2x - x^2 \text{ and } x - \text{axis.}$$

$$x = y^2 - y^3 \text{ and } y - \text{axis.}$$

$$y^2 = x \text{ and } x = 4$$

$$y = 2x - x^2 \text{ and } y = -3,$$

$$y = x^2 \text{ and } y = x.$$

$$x = 3y - y^3 \text{ and } x + y = 3.$$

$$y = x^4 - 2x^2 \text{ and } y = 2x^2.$$

$$y = x^2,\ y = -x,\ x = 2,\ x = 4.$$

$$y = x^2,\ y = 16 - x^2,\ x = 2,\ x = -2$$

٢) أحسب طول القوس من المنحنى المعطى فى الفترة المبينة :

$$y = x^2 \ ,\ [0,1]\ ;\ y = \ln x\ ,\ [1,2]\ ;$$

$$y = \ln \sec x,\ \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\ ;\ x = \ln \sin y,\ \left(\frac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$x = u \cos u\ ,\ y = u \sin u,\ (0 \leqslant u \leqslant \pi)\ ;$$

٣) أوجد حجم المجسمات التى تنشأ من الإدارة حول محور x للمناطق المبينـة بعـد :

$$x + y = 2\ ,\ x = 0\ ,\ y = 0\ ,$$

$$y = \sin x\ ,\ y = 0\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\ .$$

$$y = x - x^2\ ,\ y = 0.$$

$$y = 3x - x^2\ ,\ y = x\ .$$

٤) أوجد حجم المجسمات التى تنشأ من الإدارة حول محور y للمناطق المبينة بعد :

$y = x^3 , y = 0 , x = 1 .$

$y = \ln x , y = 0 , x = 1 , x = 2 .$

$x = 0 , y = 0 , y = 2 , x = \sqrt{y^2 + 4} .$

$x = 0 , x = \pi , y = 0 , y = \sin x .$

$y = 0 , x = 3 , y = x / \sqrt{4 - x} .$

٥) أوجد مساحة سطح المجسم الدورانى الذى ينشأ من إدارة المنحنى المعطى فى الفتره المبينة حول المحور المطلوب :

$y = x^3 , 0 \leqslant x \leqslant 1 ,$ about x — axis .

$y = x^2$, between (0,0) and (2,4), about x — axis.

$x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2} , 1 \leqslant y \leqslant 2 ,$ about x — axis .

$x = b + a \cos t , y = a \sin t , 0 \leqslant t \leqslant 2\pi , b > a > o ,$
about y — axis .

٦) أوجد المركز المتوسط للمناطق المستوية المحددة بالمنحنيات الآتية :

$y = \sqrt{4x} ,$ x — axis , $x = 6 .$

$y = x^2 , y = x .$

one arch of $y = \sin x$, x — axis .

$y = \sin x , x = 0 , x = \frac{\pi}{2} , y = 0$

$x = 0 , x = \frac{\pi}{4} , y = 0 , y = \sec^2 x .$

٧) أوجد المركز المتوسط للاقواس المعطاه فى الفترات الآتية :

$$y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^{-2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leqslant x \leqslant a.$$

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \ y \geqslant 0.$$

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

$$y = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

٨) أوجد المركز المتوسط للمجسم الناتج من إدارة المناطق التالية حول محور x :

$$y = 0, x = h, y = \frac{a}{h}x.$$

$$x = 0, x = a, y = 0, y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$x = 0, x = b, y = 0, y \sqrt{2px}.$$

$$x = 0, x = \frac{\pi}{3}, y = 0, y = \sec x.$$

$$y = 0, x = 3, y = \frac{x}{14 - x}.$$

٩) أوجد المركز المتوسط للسطح الناتج من إدارة الأقواس الآتية حول محور x :

$$0 \leqslant x \leqslant 4, \ y^2 = 4x, \ y \geqslant 0.$$

$$0 \leqslant x \leqslant h, \ y = \frac{ax}{h}, a > 0.$$

$0 \leqslant x \leqslant 3 \ , \ y^2 = 3 - x \ , \ y \geqslant 0 .$

$0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ y = \frac{1}{2} \left(e^{x} + e^{-x}\right)$

$0 \leqslant x \leqslant 3 \ , \ 4x^2 + 9y^2 = 36, \ y \geqslant 0.$

١٠) باستخدام نظرية باباس الأولى أوجـــد الحجم الناشيء من الدوران حول المحور المبين للمناطق الموضحة :

$0 \leqslant x \leqslant 2 \ , \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$, about x — axis.

$0 \leqslant x \leqslant \pi \ , \ 0 \leqslant y \leqslant \sin x$, about y axis.

$0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ x^3 \leqslant y \leqslant x$. about x — axis.

$0 \leqslant x \leqslant h \ , \ o \leqslant y \leqslant \frac{a}{h} x$, about x — axis.

$1 \leqslant x \leqslant 3 \ , \ 0 \leqslant y \leqslant x^2$, about x — axis.

١١) أوجد حجم ومساحة سطح الحلقة الناتجة من الدوران حول محور x للدائرة $a^2 = (x-b)^2 + y^2$ حيث $a < b$ وذلك باستخدام نظريات باباس .