# الباب السادس

## تطبيقات التفاضل

## APPLICATIONS OF DIFFERENTIATION

### I . المعدلات المرتبطة Related Rates

فى هذا النوع من المسائل يعطى عدد من المتغيرات (التى يعتمد كل منها على الزمن $t$ ) يكون بينها إرتباط معين على صورة معادلات . ويعطى كذلك بعض (أو كل) هذه المتغيرات ومعدلات تغير بعضها عند لحظه معينه $t$ ويطلب إيجاد معدل تغير أحد (أو بعض) المتغيرات عند هذه اللحظه . تسمى مثل هذه المسائل بمسائل المعدلات المرتبطة .

نعتبر جميع متغيرات المسألة كدوال للزمن $t$ . فإذا فاضلنا العلاقات التى تربط هذه المتغيرات بعضها ببعض بالنسبة للزمن فإن المعادلات الناتجة تبين كيفية إرتباط معدلات تغيرها .

**مثال (١)**

إذا كانت العلاقات التى تربط المتغيرات $x$ ، $y$ ، $z$ ، $h$ بعضها ببعض عند أية لحظة زمنية $t$ هى

$$y + z = 45$$

$$h + y = 20$$

$$400 + x^2 = z^2$$

وكان $x = 15$ ، $\frac{dx}{dt} = 6$ عندما $t = 0$ ، فأوجد $\frac{dh}{dt}$ عند $t = 0$ .

**الحل :** بتفاضل العلاقات الثلاث بالنسبة إلى t ينتج أن

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 2z\frac{dz}{dt} = 2z\frac{dh}{dt}$$

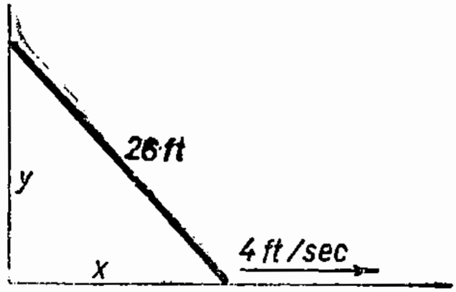
$$\therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{400+x^2}}\frac{dx}{dt}.$$

وعندما $t = 0$ يكون

$$\frac{dh}{dt} = \frac{15}{\sqrt{400+15^2}} \times 6 = \frac{90}{25} = 3.6$$

**مثال (٢)**

يرتكز سلم طوله 26 ft على حائط رأسى عندما كان طرفه الأسفل يبعد عن الحائط 10 ft . سحب هـــذا الطرف فجـأة بعيداً عن الحائط بسرعة 4 ft / sec ، أوجد السرعة التى ينزلق بهـــا الطرف العلوى على الحائط فى هذه اللحظة .




شكل ( ٦ ـ ١ )

**الحل** : يبين شكل ( ٦ - ١ ) وضع السلم عندما يبعد الطرف الأسفل عن الحائط مسافة x باعتبارها تتغير مع الزمن وقد رمزنا لبعد الطرف العلوى عن الأرض بارمز y لأنه يتغير أيضاً مع الزمن . والعلاقة التى تربط x , y عند أية لحظة : هى

$$x^2 + y^2 = 26^2.$$

والمطلوب إيجـاد $\frac{dy}{dt}$ عند اللحظة التى فيها يكون

$$x = 10 \text{ ft and } \frac{dx}{dt} = 4 \text{ ft/sec.}$$

نفاضل العلاقة الأولى ضمنيا بالنسبة إلى الزمن t :

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

وعنـدما $x = 10$ يـكون $y = 24$ من العـلاقة الأولى . فبالتعويض ينتج أن

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{10}{24} \times 4 = -\frac{5}{3} \text{ ft / sec.}$$

والاشارة السالبة تعنى أن y تتناقص (لأن الطرف العلوى يتحرك إلى أسفل ) بمعدل $\frac{5}{3}$ ft / sec .

أما إذا تحرك الطرف السفلى جهة الحائط بنفس السرعة فإننا نعوض $\frac{dx}{dt} = -4$ وتكون سرعة الطرف العلوى موجبة أى أنه يصعد إلى أعلى .

**مثال (٣)**

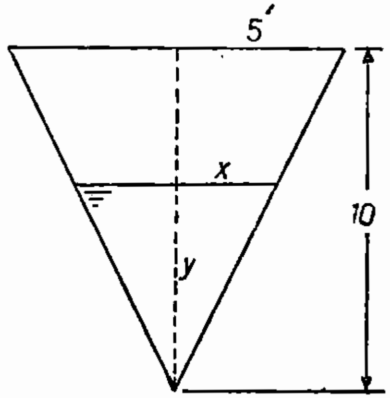
إناء على شكل مخروط دائرى قائم رأسه إلى أسفل كما فى شكل (٦ - ٢) ، يسكب فيه الماء بمعدل ثابت $2 \text{ ft}^3 / \text{min}$ ، أوجد السرعة التى يرتفع بها سطح الماء عندما يكون إرتفاع الأخير 6 ft .

**الحل :** نفرض أن :

v = حجم الماء ($\text{ft}^3$) فى الخزان عند t (min) ،

x = نصف قطر (ft) مقطع المخروط عند سطح الماء ،

y = إرتفاع (ft) الماء فى الخزان عند اللحظة t .




شكل (٦ ـ ٢)

معنى أن الماء ينسكب فى الخزان بمعدل $2\ ft^3 / min$ هو أن

$$\frac{dv}{dt} = 2$$

والمطلوب الآن تعيين $\frac{dy}{dt}$ عنـدما $y = 6$ .

العلاقة التى تربط حجم المـاء $v$ بالعمق $y$ هى

$$v = \frac{1}{3} \pi x^2 y$$

وهى تحتوى على المتغير الإضافى $x$ بجانب $v$ , $y$ . إلا أنه يمكننا حـذف $x$ من تشابه المثلثات :

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \text{or} \quad x = \tfrac{1}{2} y.$$

من هذا ينتج أن

$$v = \frac{1}{12} \pi y^3$$

وبالتفاضل بالنسبة للزمن $t$ نحصل على العلاقة بين المعدلين ، أى

$$\frac{dv}{dt} = \tfrac{1}{4} \pi y^2 \frac{dy}{dt}$$

ومنها نجـــد أن

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi\ y^2}\ \frac{dv}{dt}$$

وعندما يكون $y = 6$ ، $\frac{dv}{dt} = 2$ تصبح

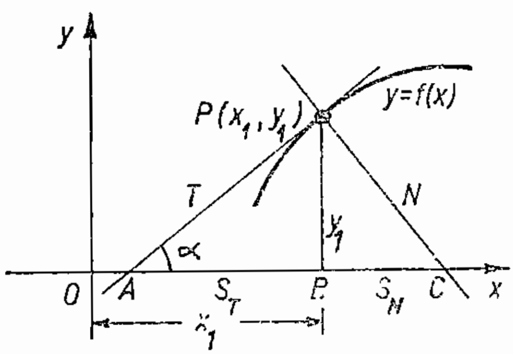
$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{9\pi} = 0.071 \quad ft\ /\ min \quad (approx.)$$

## II. تطبيقات هندسية Geometrical Applications

### ٦ - ١ معادلة الماس ومعادلة العمودى

Equations of a Tangent and of a Normal

نفرض أن لدينا منحنى معطى بالمعادلة $y = f\ (x)$ . نأخذ نقطة مثل $P\ (x_1,y_1)$ على هذا المنحنى كما فى شكل ( ٦ - ٣ ) ونوجد معادلة المستقيم المماس للمنحنى عند النقطة P ، بفرض أن هذا المماس لا يوازى محور الصادات.




شكل (٦ - ٣)

معادلة خط مستقيم ميله $m_t$ ويمر بالنقطة $P(x_1 , y_1)$ هى

$$y - y_1 = m_t \ (x - x_1).$$

وفى بند ( ٢-٢ ) وجدنا أن ميل المماس عند نقطة ما على منحنى تساوى مشتقة دالة المنحنى عند هذه النقطة ، أى أن $m_t = f' (x_1) = y'_1$ وعلى هذا تصبح **معادلة المماس** على الصورة

$$y - y_1 = y'_1 \ (x - x_1).$$

بالإضافة إلى المماس نحتاج فى بعض الأحيان أن نعتبر العمودى على المنحنى عند نقطة عليه .

**تعريف** : العمودى على منحنى ما عند نقطة عليه هو المستقيم المار بهذه النقطة وعمودى على المماس للمنحنى عند هذه النقطة .

من تعريف العمودى نجد أن ميله $m_n$ يرتبط بميل المماس $m_t$ بالعلاقة

$$m_n = -\frac{1}{m_t} \qquad \text{or} \qquad m_n = -\frac{1}{y'_1}$$

لذلك تأخذ **معادلة العمودى** على المنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $P(x_1 , y_1)$ الصورة :

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'_1} \ (x - x_1).$$

## مثـال

أكتب معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $y = x^3$ عند النقطة $(1, 1)$ .

**الحل** : حيث أن $y' = 3x^2$ ، فان ميل المماس عند النقطة المفروضة يساوى $(y')_{x=1} = 3$ . لذلك تكون معادلة المماس المطلوبة هى

$$y - 1 = 3 (x - 1) \quad \text{or} \quad y = 3x - 2.$$

أما معادلة العمودى فتكون

$$y - 1 = - \frac{1}{3} (x - 1) \quad \text{or} \quad y = - \frac{1}{3} x + \frac{4}{3}$$

### ٦ — ٢ اطوال المماس والعمودى وتحت المماس وتحت العمودى

Lenghts of Tangent, Normal, Subtangent and Subnormal

تسمى المسافة $T = AP$ **طول المماس** شكل ( ٦ — ٣ ) ، وهى جزء المماس المحصور بين نقطة التماس ومحور $x$ . ومسقط هذه المسافه على محور $x$ ، أى $AB$ تعرف باسم **تحت المماس** ويرمز له بالرمز $S_T$ وتسمى المسافة $N = CP$ **طول العمودى** ، بينما يسمى مسقط هذه المسافة على محور $x$ ، أى $BC$ ، **تحت العمودى** ويرمز له بالرمز $S_N$ .

لنحسب الآن الكميات $T$ ، $S_T$ ، $N$ ، $S_N$ للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $P(x_1, y_1)$ . من شكل (٦ - ٣) نجد أن

$$AB = y_1 \cot \alpha = \frac{y_1}{\tan\alpha} = \frac{y_1}{y_1'}$$

$$\therefore \; S_T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right| ,$$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \left(\frac{y_1}{y_1'}\right)^2} = \left|\frac{y_1}{y_1'} \sqrt{1 + (y_1')^2}\right| .$$

كذلك نستنتج من نفس الشكل أن

$$BC = y_1 \tan \alpha = y_1 \; y_1' ,$$

$$\therefore \; S_N = | \, y_1 \; y_1' \, | ,$$

$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 \, y_1')^2} = | \, y_1 \sqrt{1 + (y_1')^2} \, | .$$

فى استنتاجنا للعلاقات السابقة فرضنا أن $y_1 > 0 \; , \; y_1' > 0$ ، إلا أنها تصلح أيضا فى الحالة العامة .

**مثال**

أوجـــد معادلتى المماس والعمودى وكذلك أطوال المماس وتحت المماس والعمودى وتحت العمودى للقطـــع الناقص $x = a \cos t \; , \; y = b \sin t$ عنـد النقطة $P \, (x_1 \; , \; y_1)$ التى يـكون عندها $t = \frac{\pi}{4}$ .

**الحل** : من المعادلتين البارامتريتين للقطع الناقص ينتج :

$$\frac{dx}{dt} = - \; a \sin t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t \; ;$$

$$y' = -\frac{b}{a}\cot t \quad , \quad y_1' = -\frac{b}{a} \cdot$$

نوجد الآن إحداثي نقطة التماس P $\left(t = \frac{\pi}{4}\right)$ :

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad , \quad y_1 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

معادلة المماس هى

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

or $$bx + ay - ab\sqrt{2} = 0$$

وتكون معادلة العمودى هى

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

of $$(ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0$$

طولا تحت المماس وتحت العمودى هما على الترتيب :

$$S_T = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right| = \frac{a}{\sqrt{2}} ,$$

$$S_N = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}$$

كما أن طولى المماس والعمودى يكونان على الترتيب :

$$T = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2} \, ,$$

$$N = \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2} \right| = \frac{b}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}$$

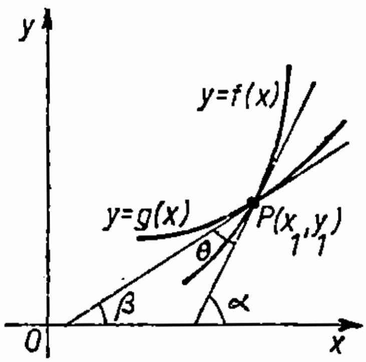
### ٦ — ٣ زاوية تقاطع منحنيين

Angle of Intersection of Two Curves

نفرض أن لدينا منحنيين متقاطعين وأن معادلتيهما هما

$$y = f(x) \quad , \quad y = g(x)$$

والمطلوب تعيين زاوية تقاطع هذين المنحنيين. والمقصود بزاوية التقاطع الزاوية المحصورة بين المماسين للمنحنيين عند نقطة التقاطع .




شكل (٦ ــ ٤)

من شكل (٦-٤) نجد أن زاوية التقاطع θ تعطى من

$$\theta = \alpha - \beta$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

ولكن $\tan\alpha$ هو ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$ ، كما أن $\tan\beta$ هو ميل المماس للمنحنى $y = g(x)$ عند نقطة التقاطع $P(x_1, y_1)$ ، وعلى ذلك يكون

$$\tan\alpha = [f'(x)]_P = f'(x_1)$$

$$\tan\beta = [g'(x)]_P = g'(x_1)$$

بالتعويض فى معادلة $\tan\theta$ السابقة ينتج أن

$$\tan\theta = \frac{f'(x_1) - g'(x_1)}{1 + f'(x_1)\, g'(x_1)} \cdot$$

**ملاحظات :**

١) زاوية التقاطع $\theta$ تحقق المتباينة $\pi \geqslant \theta \geqslant 0$ . وهناك ثلاث حالات خاصة :

ا - $\theta = 0$ ، المنحنيان يتماسان من الداخل .

ب - $\theta = \pi$ ، المنحنيان يتماسان من الخارج .

حـ - $\theta = \frac{\pi}{2}$ المنحنيان يتقاطعان على التعامد .

٢) حيث أن زاوية التقاطع $\theta$ تقع فى الفترة $[0, \pi]$ فإن ظل الزاوية $\theta$ الذى نحصل عليه من العلاقة الأخيرة يمكن أن يكون موجبا أو سالبا . فإذا كان

$\tan\theta$ موجبا فهذا يعنى أننا أخذنا الزاوية الحادة بين المنحنيين ، أما إذا كان $\tan\theta$ سالبا فنكون قد أخذنا الزاوية المنفرجة بين المنحنيين وعلى هذا فإن تسمية المنحنيين $f$ , $g$ فى علاقة $\tan\theta$ يكون إختياريا .

## مثـــال

أوجد زاوية تقاطع الدائرتين

$$x^2 + y^2 = 5 \ , \ 2x^2 + 2y^2 - 5y = 0.$$

**الحل** : نعين أولا نقط تقاطع الدائرتين بحل معادلتيهما .

فبتعويض $x^2 + y^2 = 5$ فى معادلة الدائرة الثانية نجد أن

$$10 - 5y = 0 \text{ or } y = 2.$$

وتكون قيم $x$ المناظرة هى

$$x^2 = 5 - y^2 = 5 - 4 = 1 \quad \text{or} \quad x = \pm 1$$

فتكون نقطتا التقاطع هما $(\pm 1,2)$ . أعتبر النقطة الأولى $(1,2)$ ونوجد ميل المماس لكل من الدائرتين عند هذه النقطة :

i) $x^2 + y^2 = 5.$

$$\therefore \ 2x + 2y\,y' = 0 \quad \text{or} \quad y' = -\frac{x}{y} .$$

At $(1,2)$ ; $y' = -\frac{1}{2}$ .

ii) $2x^2 + 2y^2 - 5y = 0,$

$$\therefore \quad 4x + 4yy' - 5y' = 0 \quad \text{or} \quad y' = \frac{4x}{5-4y} .$$

$$\text{At} \quad (1, 2) \; ; \; y' = \frac{4}{5-8} = -\frac{4}{3} .$$

ـتكون زاوية التقاطع الأولى هى

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \tan^{-1} \tfrac{1}{2} .$$

وبالمثل للنقطة الثانية $(-1,2)$ :

$$y_1' = \tfrac{1}{2} \quad , \quad y_2' = \frac{4}{3} ;$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \tan^{-1} (-\tfrac{1}{2}) .$$

## III . النهايات العظمى والصغرى

### Maxima and Minima

الهدف من هذا القسم هو استنتاج طرق عامة للتعرف على سلوك الدوال من حيث نهاياتها العظمى والصغرى باستخدام مشتقات هذه الدوال وبدون اللجوء إلى رسم منحنياتها المناظرة .

### ٦ ـ ٤ الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة

Increasing and Decreasing Functions

سبق لنا فى بند ( ١ ـ ٤ ) وقلنا إن الدالة المتزايدة هى الدالة التى تزداد بزيادة $x$ ، كما أن الدالة المتناقصة هى التى تنقص كلما إزدادت $x$ . وسنستنتج فى هذا البند الشرط الرياضى الذى يجب توافره فى كل حالة وذلك عن طريق مشتقات هـذه الدوال .

**نظرية :**

إذا كانت الدالة $f(x)$ ، التى لهـا مشتقة فى الفترة $[a,b]$ ، متزايدة فى هذه الفترة فإن مشتقتها تـكون فى هذه الفترة موجبة ، أى أن $f'(x) > 0$ .

**الاثبـات :**

نفرض أن $f(x)$ تتزايد فى الفترة $[a, b]$ ولنعط $x$ زيادة قدرها $\Delta x$ ونعتبر المقـدار

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \dots (1)$$

وحيث أن $f(x)$ دالة متزايدة لذلك يكون

$$f(x+\Delta x) > f(x) \quad \text{for} \quad \Delta x > 0$$

$$\text{and} \qquad f(x + \Delta x) < f(x) \quad \text{for} \quad \Delta x < 0$$

وفى كلتا الحالتين يتحقق

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \qquad \ldots \ldots \qquad (2)$$

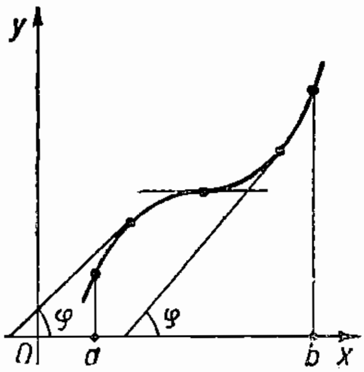
$$\therefore \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

وهذا يعنى أن $f'(x) > 0$ وهو المطلوب .

هناك نظرية مشابهه للدوال المتناقصة ( القابله للتفاضل) ألا وهى :

إذا كانت الدالة $f(x)$ تتناقص فى الفترة $[a , b]$ فإن $f'(x) < 0$ فى هذه الفترة ، ذلك على فرض أن الدالة مستمرة عند جميع نقط الفترة $[a , b]$ وقابلة للتفاضل فى الفترة $(a , b)$ .

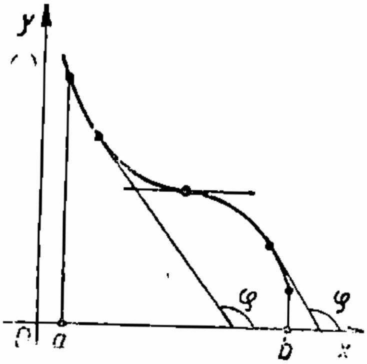
ملاحظة: النظرية السابقة تعبر عن الحقيقة الهندسية التالية . إذا كانت الدالة $f(x)$ تتزايد فى الفترة $[a , b]$ ، فان المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند كل نقطة فى هذه الفترة يصنع زاوية حادة $\varphi$ مع محور $x$ ، شكل (٦-٥).




شكل (٦ ــ ٥)

أما إذا كانت الدالة $f(x)$ متناقصة فى الفترة $]a, b[$ فان الزاوية التى يميل بها المماس على محور $x$ تكون منفرجة كما فى شكل (٦ - ٦) .

وهذه الطريقة تمكننا من الحكم على الدالة إن كانت متزايده أو متناقصة تبعاً لاشارة مشتقتها .




شكل (٦ ــ ٦)

**مثـال**

عين الفترات التى تتزايد أو تتناقص فيها الدالة

$$y = x^3 - x^2 - 8x + 2$$

**الحـل** : نوجد مشتقة الدالة المعطاة ونعين قيم $x$ التى تكون عندهـا المشتقة موجبة أو سالبة :

$$y' = 3x^3 - 2x - 8$$

$$= 3\left(x + {}^4/_3\right)(x - 2).$$

العـامل $(x + {}^4/_3)$ يكون سالبا عندما $x < -{}^4/_3$ وموجبا عندما $x > -{}^4/_3$ ، والعـامل $(x - 2)$ يكون سالبا عندما $x < 2$ وموجبا

عندما $2 > x$ . وبذلك تعتمد إشارة حاصل الضرب على موقع x على محور x بالنسبة للنقطتين $-{}^4/_3$ , 2 . وهاتان النقطتان تقسمان محور x إلى ثلاث فترات :

$$-\infty < x < -{}^4/_3 \ , \ -{}^4/_3 < x < 2 \ , \ 2 < x < +\infty \ .$$

ولتعيين إشارة المشتقة فى كل فترة ، نكتب النتائج فى الجدول الآتى :

| الفترة | إشارة $(x + {}^4/_3)$ | إشارة $(x - 2)$ | إشارة $y'$ | الدالة |
|---|---|---|---|---|
| $-\infty < x < -{}^4/_3$ | $-$ | $-$ | $+$ | متزايدة |
| $-{}^4/_3 < x < 2$ | $+$ | $-$ | $-$ | متناقصة |
| $2 < x \quad +\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ | متزايدة |

وعلى هذا تكون الدالة متزايدة فى الفترتين $-\infty < x < -{}^4/_3$ ، $2 < x < +\infty$ ومتناقصة فى الفترة $-{}^4/_3 < x < 2$ .

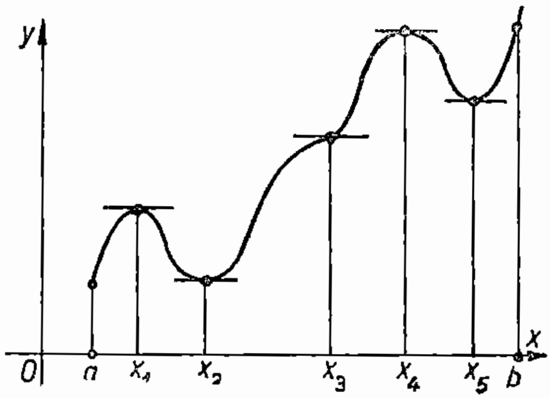
### ٦ ـ ٥ النهاية العظمى والنهاية الصغرى لدالة

Maximum and Minimum of a Function

**تعريف النهاية العظمى :** يقال للدالة $f(x)$ أن لها نهاية عظمى عند النقطة x إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة $x_1$ أكبر من قيمتها عند جميع نقط جوار معين للنقطة $x_1$ . بمعنى آخر ، يكون للدالة $f(x)$ نهاية عظمى عندما $x = x_1$ إذا كان $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ لجميع قيم $\Delta x$ (الموجبة والسالبة) الصغيرة صغراً كافيا فى القيمة المطلقة .

فمثلا الدالة $y = f(x)$ المبين منحنيها فى شكل ( ٦ - ٧ ) لها نهـــاية عظمى عند $x = x_1$ .

**تعريف النهاية الصغرى :** الدالة $f(x)$ لها نهاية صغرى عند $x = x_2$ إذا كان $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ لجميـع قيم $\Delta x$ ( موجبة و سالبة ) الصغيرة صغرا كافيا فى القيمة المطلقة ، شكل ( ٦ - ٧ ) .




شكل ( ٦ — ٧ )

وفيما يتعلق بالنهايات العظمى والصغرى يجب ملاحظة الآتى :

ا ) الدالة المعرفـة فى منطقة ما تأخذ نهـاياتها العظمى والصغرى فقط عند قيم $x$ التى تقـع فى مجالها .

ب ) لا يجب أن يتطرق إلى الأذهان أن النهاية العظمى والصغرى لدالة ما هى على التوالى أكبر وأصغر قيم للدالة فى الفـترة المعطـاه . فعند نقطة النهاية العظمى تأخذ الدالة أكبر قيمة بالنسبة لقيمتها عند جميـــع النقط القريبة قربا كافيا من نقطة النهاية العظمى ، أى نهاية عظمى نسبية : كذلك عند نقطة النهاية

الصغرى تأخذ الدالة أصغر قيمة بالنسبة لقيمتها عند النقط القريبة من النهاية الصغـــرى .

فمثلا ، شكل (٦ – ٧) يبين منحنى دالة معرفة فى الفترة $[a , b]$ . وهذه الدالة لها نهاية عظمى عند كل من $x = x_1$ ، $x = x_4$ ونهاية صغرى عند كل من $x = x_2$ ، $x = x_5$ ولكن النهاية الصغرى عند $x = x_5$ أكبر من النهاية العظمى عند $x = x_1$ كما أن قيمة الدالة عند $x = b$ أكبر من أية نهاية عظمى للدالة فى الفترة المعنية .

**الشرط اللازم لوجود نهاية**

إذا كان للدالة القابلة للتفاضل $y = f(x)$ نهاية عظمى أو صغـــرى عند النقطة $x = x_1$ ، لزم أن تنعدم مشتقتها عنـد هذه النقطة :

$$f'(x_1) = 0.$$

ذلك لأنه بفرض أن الدالة المعطاه لها نهاية عظمى عنـــد النقطة $x = x_1$ فعندما تكون $\Delta x$ صغيرة صغراً كافيـا فى القيمة المطلقة $(\Delta x \neq 0)$ نجـــد أن

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \quad \text{or} \quad f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

وفى هذه الحالة تعتمد اشارة النسبه

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

على إشارة $\Delta x$ ، أى أن

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \text{ when } \Delta x < 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \text{ when } \Delta x > 0 \quad \dots \quad (2)$$

ولكن من تعريف المشتقة يكون

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} .$$

فإذا كان للدالة $f(x)$ مشتقة عند $x = x_1$ فإن النهاية فى الطرف الأيمن لا تعتمد على الطريقة التى تقترب بها الزيادة $\Delta x$ من الصفر ( سواء ظلت موجبة أو سالبة) . ولكن من (1) إذا $\Delta x \to 0$ وظلت سالبة فإن $f'(x_1) \geqslant 0$ كذلك من (2) إذا $\Delta x \to 0$ وظلت موجبة فإن. $f'(x_1) \leqslant 0$ . وحيث أن $f'(x_1)$ هو عدد محدد لا يعتمد على طريقة أقتراب $\Delta x$ من الصفر فإن المتباينتين الأخيرتين لا تتفقان إلا إذا كان $f'(x_1) = 0$ وهو المطلوب .

وبطريقة مشابهة يمكن إثبات حالة النهاية الصغرى .

والتعليق البيانى على هذه النظرية هو أنه إذا كان للدالة $f(x)$ مشتقة عند النهاية العظمى والصغرى ، فان المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند هذه النقط يكون موازيا لمحور $x$ كما فى شكل (٦ - ٧) .

مما سبق ينتج مباشرة أنه بالنسبة للدالة $f(x)$ التى لها مشتقة عند جميع قيم $x$ المفروضة ، يمكن أن تأخذ نهاياتها ( العظمى أو الصغرى ) فقط عند تلك النقط التى تنعدم عندها المشتقة . ولكن العكس غير صحيح ، بمعنى أنه لا يمكن الجزم بوجود نهاية عظمى أو صغرى عند أى نقطة تنعدم عندها

المشتقة . فني شكل (٦ - ٧) تنعدم المشتقة عند $x = x_3$ (المماس أفقى) إلا أن الدالة ليس لها نهاية عظمى أو صغرى عند تلك النقطة .

وتسمى النقطة على المنحنى التى يكون عندها معدل تغير الدالة صفرا **بنقطه توقف** stationary point ، كما تسمى نقطة النهـاية العظمى أو الصغرى **بنقطة الرجوع** turning point .

درسنا حتى الآن الحالة التى تـكون فيها للدالة مشتقة عند جميـع نقط فترة مغلقة معينة . والسؤال الان عن النقط التى لا تتواجد عندها مشتقة للدالة . وتبين الأمثلة الآتية أنه عند مثل هذه النقط يمكن أن توجد نهاية عظمى أو نهاية صغرى أولا هذه أو تلك .

**مثـال (١)**

الدالة $y = |x|$ ليس لها مشتقة عند النقطة $x = 0$ نظرا لأن منحنى الدالة ليس له مماس محدد عند تلك النقطة ( شكل ١ - ٣ ) ، إلا أن هـذه الدالة لها نهاية صغرى هناك $y = 0$ عندما $x = 0$ فى حين أنه عند أية نقطة أخرى غير الصفر نجـد أن $y > 0$ .

**مثـال (٢)**

الدالة $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{3/2}$ ليس لها مشتقة عند $x = 0$ نظرا لأن

$$y' = - \frac{(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{x^{1/3}}$$

تصبح لانهائية عند $x = 0$ . إلا أن الدالة لها نهاية عظمى عند هذه النقطة : $f(0) = 1$ ، كما أن $f(x) < 1$ لقيم $x$ التي تختلف عن الصفر .

**مثـال (٣)**

الدالة $y = \sqrt[3]{x}$ ليس لها مشتقة عند $x = 0$ نظراً لأن $y' \longrightarrow \infty$ عندما $x \to 0$ . وعند هذه النقطة لا تأخذ الدالة نهاية عظمى أو صغرى :

$$f(0) = 0 \ ; \ f(x) < 0 \ \text{for} \ x < 0 \, , \ f(x) > 0 \ \text{for} \ x > 0,$$

مما سبق نجد أن الدالة يمكن أن تأخذ نهاية ما في حالتين فقط : اما عند النقط التي تتواجد عندها المشتقة وتكون مساوية للصفر أو عند النقط التي لا تتواجـد عندها المشتقة .

والجدير بالملاحظه أنه إذا لم تتواجد المشتقة عند نقطة ما في حين أنها تتواجد عند النقط القريبة منها ، فإن المشتقة تـكون غير متصلة عند هذه النقطة .

تسمى قيم $x$ التي تنعدم عندها المشتقة أو تكون غير متصلة **بالنقط الحرجة** critical points أو **القيم الحرجة** critical values .

وعلى هذا ليس من الضروري أن توجد نهايه عظمى أو صغرى لدالة ما عند كل نقطة حرجة . أما إذا أخذت الدالة نهاية عظمى أو صغرى عند نقطة ما فإن هذه النقطة تـكون بالتأكيد نقطة حرجة . لذلك في تعيين نهايات دالة ما نوجـد أولا جميـع النقط الحرجة ثم نختبر كل منها على حـدة ونقرر ما إذا كانت للدالة عندها نهاية عظمى أو نهاية صغرى أو لا هذه أو تلك .

**الشروط الكافية لوجود نهاية**

نفرض أن الدالة $f(x)$ مستمرة فى فترة ما تحتوى نقطة حرجة $x_1$ وأنها قابلة للتفاضل عند جميع نقط هذه الفترة (مع احتمال استثناء النقطة $x_1$ بالذات). إذا تغيرت إشارة المشتقة من موجب إلى سالب أثناء المرور بالنقطة $x_1$ من اليسار إلى اليمين ، فإنه توجد للدالة نهاية عظمى عند $x = x_1$ . أما إذا تغيرت اشارة المشتقة من سالب إلى موجب عند عبور النقطة $x_1$ فى الاتجاه المذكور فإن الدالة تأخذ نهاية صغرى عند هذه النقطة .

أى أنه إذا كان

$$\text{a)} \quad \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{when} \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 & \text{when} \quad x > x_1 \end{cases}$$

فإن الدالة تأخذ نهاية عظمى عند $x_1$ .

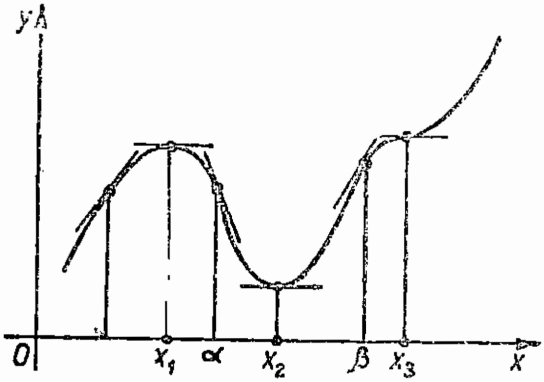
$$\text{b)} \quad \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{when} \quad x < x_1 \\ f'(x) > 0 & \text{when} \quad x > x_1 \end{cases}$$

فإنه توجد نهاية صغرى للدالة عند $x_1$ .

لاحظ أن الشروط (a) أو (b) يجب أن تتحقق لجميع قيم $x$ القريبة من $x_1$ قرباً كافياً أى لجميع النقط التى تقع فى جوار ما للنقطة الحرجة $x_1$ يكون صغيراً صغراً كافياً .

يوضح شكل (٦ - ٨) معنى الشروط السابقة . نفرض عند $x = x_1$ أن المشتقة $f'(x_1) = 0$ وأن المتباينات الآتية تتحقق لجميع قيم $x$ القريبة من $x_1$ قرباً كافيا :

$$f'(x) > 0 \quad \text{when} \quad x < x_1 \;,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{when} \quad x > x_1 \;,$$




شكل (٦ – ٨)

فعندما $x < x_1$ يصنع المماس للمنحنى زاوية حادة مع محور $x$ وتكون الدالة متزايدة . أما عندما $x > x_1$ فإن الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى مع محور $x$ تكون منفرجة وبالتالى تتناقص الدالة . وعند $x = x_1$ تعبر الدالة من حالة التزايد إلى التناقص ، أى أنها تصل هناك إلى نهايتها العظمى .

نفرض أن عند $x_2$ تكون $f'(x_2) = 0$ وأن المتباينات الآتية تتحقق لجميع قيم $x$ القريبة من $x_2$ قربا كافياً :

$$f'(x) < 0 \text{ when } x < x_2,$$
$$f'(x) > 0 \text{ when } x > x_2,$$

فعند ما $x < x_2$ يصنع المماس للمنحنى زاوية منفرجة مع محور $x$ وتكون الدالة متناقصة وعند ما $x > x_2$ فإن الزاوية التى يميل بها المماس على محور $x$ تصبح حادة وتأخذ الدالة فى التزايد . وعند $x = x_2$ تغير الدالة حالتها من التناقص إلى التزايد وهذا يعنى أنها تأخذ نهايتها الصغرى هناك .

نفرض عند $x = x_3$ أن $f'(x_3) = 0$ وأنه لجميع قيم $x$ القريبة من $x_3$ قربا كافيا تتحقق المتباينات

$$f'(x) > 0 \quad \text{when} \quad x < x_3,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{when} \quad x < x_3$$

لذلك تتزايد الدالة فى الحالتين $x < x_3$ ؟ $x > x_3$ وعلى هذا لا يكون للدالة نهاية عظمى أو صغرى عند $x = x_3$ . مثال ذلك نعتبر الدالة $y = x^3$ عند $x = 0$ . مشتقة هذه الدالة هى $y' = 3x^2$

وبالتالى

$$y' = 0 \qquad \text{for} \qquad x = 0$$

$$y' > 0 \qquad \text{for} \qquad x < 0$$

$$y' > 0 \qquad \text{for} \qquad x > 0$$

وهذا يعنى أنه عند $x = 0$ لا يكون للدالة نهاية عظمى أو صغرى .

## ٦ ـ ٦ اختبار الدوال من حيث النهايات باستخدام المشتقة الاولى

**Testing Functions for Extrema Using the First Derivative**

من البند السابق يمكننا أن نضع القواعد المتبعة فى اختبار دالة قابلة للتفاضل من حيث نهاياتها العظمى والصغرى :

١ ) أوجد المشتقة الأولى للدالة ، أى $f'(x)$ .

٢) عين القيم الحرجة للمتغير x وذلك بإيجاد جميع الجذور الحقيقية للمعادلة $f'(x) = 0$ وكذلك جميع قيم x التى تكون عندها المشتقة $f'(x)$ غير متصلة .

٣) اختبر إشارة المشتقة عن يسار وعن يمين كل نقطة حرجة . وحيث أن إشارة المشتقة تظل كما هى فى الفترة الواقعة بين نقطتين حرجتين متتاليتين ، لذلك يكفى لإختبار اشارة المشتقه عن يسار وعن يمين النقطه الحرجه $x_3$ مثلا (شكل ٦ - ٨) أن نعين اشارة المشتقه عند النقطتين α ، β حيث $x_1 < \alpha < x_2$ ، $x_2 < \beta < x_3$ ، ذلك لأن $x_1$ ، $x_3$ هما أقرب نقطتين حرجتين بالنسبه للنقطه $x_2$ .

٤) أوجد قيمة الداله $f(x)$ عند كل نقطه حرجه .

الجدول الآتى يبين جميع الحالات الممكنه :

| نوع النقطة الحرجة | اشارة $f'(x)$ عند عبور النقطـه الحرجه a | | |
|---|---|---|---|
| | $x > a$ | $x = a$ | $x < a$ |
| نهاية عظمى | $-$ | $f'(a)=0$ أو غير متصلة | $+$ |
| نهاية صغرى | $+$ | $f'(a)=0$ أو غير متصلة | $-$ |
| لاتوجد نهاية (الدالة متزايدة) | $+$ | $f'(a)=0$ أو غير متصلة | $+$ |
| لاتوجد نهاية (الدالة متناقصة) | $-$ | $f'(a)=0$ أو غير متصلة | $-$ |

**مثال (١)**

إختبر الدالة الآتيه من حيث النهايات العظمى والصغرى

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

**الحل :**

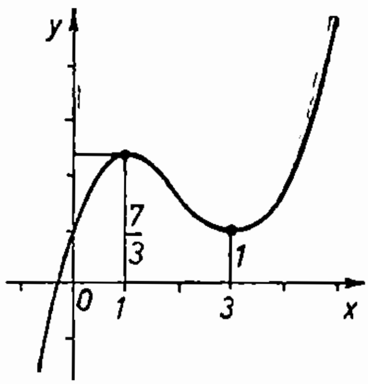
١) أوجد المشتقه الأولى : $y' = x^2 - 4x + 3$

٢) أوجد جميع الجذور الحقيقيه للمعادلة $y' = 0$ :

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{then} \quad x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 3$$

المشتقة دالة متصلة عند جميع قيم $x$ وعلى هذا لا توجد نقط حرجة أخرى .

٣) اختبر النقط الحرجة وسجل النتائج كما فى شكل (٦ - ٩) :




شكل ( ٦ — ٩)

اختبر النقطة الحرجة الأولى $x_1 = 1$ حيث أن

$$y' = (x - 1)\ (x - 3).$$

لذلك يكون

$$\text{for}\quad x < 1: \qquad y' = (-)\,.\,(-) > 0.$$

$$\text{for}\quad x > 1: \qquad y' = (+)\,.\,(-) < 0.$$

وعلى هذا عند المرور ( من اليسار إلى اليمين ) بالقيمة $x_1 = 1$ تتغير اشارة المشتقة من موجب إلى سالب ، وهذا يعنى أن الداله لها عند $x_1 = 1$ النهاية العظمى

$$y_1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}\,.$$

كذلك باختبار النقطة الحرجة الأخرى $x_2 = 3$ نجد أن

$$\text{when}\quad x < 3: \qquad y' = (+)\,.\,(-) < 0,$$

$$\text{when}\quad x > 3: \qquad y' = (+)\,.\,(+) > 0.$$

أى أنه بالمرور بالنقطة $x_2 = 3$ تتغير اشارة المشتقة من سالب إلى موجب وعلى ذلك يكون للدالة عند هذه النقطة النهاية الصغرى

$$y_2 = \frac{1}{3}(3)^3 - 2\,(3)^2 + 3\,(3) + 1 = 1$$

**مثال (٢)**

اختبر من حيث النهايات العظمى والصغرى الدالة $y = (x - 1)\ \sqrt[3]{x^2}$

الحل :

١) أوجد المشتقة الأولى

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2\,(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} \,.$$

٢) أوجد قيم x الحرجة :      ا - النقط التي تنعدم عندها المشتقة :

$$y' = 0 \text{ gives } x_1 = \frac{2}{5},$$

ب - النقط التي تصبح عندها المشتقة غير متصلة ( في حالتنا هذه تكون لا نهائية ) هي النقطة $x_2 = 0$ .

(من الملاحظ أن الدالة معرفة ومتصلة عند $x_2 = 0$ . )

٣) أختبر نوع النقط الحرجة : بالنسبة للنقطة الأولى $x_1 = \frac{2}{5}$ يكون

$$y' < 0 \qquad \text{for} \qquad x < \frac{2}{5},$$

$$y' > 0 \qquad \text{for} \qquad x > \frac{2}{5}$$

لذلك توجد عند $x_1 = \frac{2}{5}$ نهاية صغرى للدالة وقيمتها

$$y = \left(\frac{2}{5} - 1\right) \sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}} \,.$$

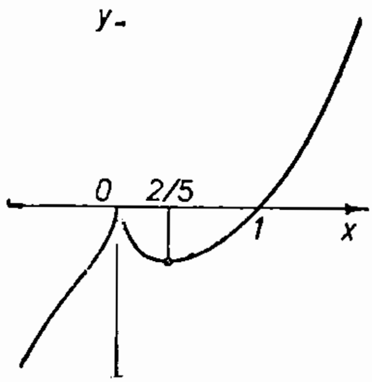
أما بالنسبة للنقطة الحرجة الأخرى $x_2 = 0$ فاننا نجد أن

$$y' > 0 \quad \text{for} \quad x < 0,$$

$$y' < 0 \quad \text{for} \quad y > 0$$

وهذا يعنى أنه عند $x_2 = 0$ يكون للدالة نهاية عظمى قيمتها $y_2 = 0$ .

ويوضح شكل (٦ – ١٠) منحنى هذه الدالة مبينا عليه نقط النهايات .




شكل (٦ ــ ١٠)

## ٦ – ٧ اختبار الدوال من حيث النهايات باستخدام المشتقه الثانية

Testing Functions for Extrema Using the Second Derivative

نفرض أن مشتقـة الدالة $y = f(x)$ تنعـــدم عند $x = a$ ، أى $f'(a) = 0$ . نفرض أيضا أن المشتقة الثانية $f''(x)$ تتواجـــد وتـكون متصلة فى جوار معين للنقطة $a$ ، فى هذه الحالة تسرى النظرية التالية .

**نظريــة :**

بفرض أن $f'(a) = 0$ تـكون للدالة نهاية عظمى عند $x = a$ إذا كان $f''(a) < 0$ ونهاية صغرى إذا كان $f''(a) > 0$ .

**الاثبــات :** نثبت أولا الجزء الأول من النظرية ونفرض أن

$$f'(a) = 0 \text{ and } f''(a) < 0.$$

حيث أن $f''(x)$ متصلة فى فـترة صغيرة ما حول النقطة $x = a$ فمن الواضح أنه توجد فترة صغيرة . . . بة حول النقطة $x = a$ تـكون المشتقة الثانية $f''(x)$ عند جميع نقطها سالبه . وحيث أن $f''(x)$ هى المشتقة الأولى للمشتقة الأولى ، أى $f''(x) = (f'(x))'$ ، فإنه ينتج من الشرط $(f'(x))' < 0$ أن $f'(x)$ دالة متناقصه فى الفترة المغلقه التى تحتوى $x = a$ . ولـكن $f'(a) = 0$ وعلى هذا فى هذه الفترة تـكون $f'(x) > 0$ عندما $x < a$ أما عندما $x > a$ فإن $f'(x) < 0$ . وبمعنى آخر تغير المشتقة $f'(x)$ اشارتها من موجب إلى سالب عند عبور النقطه $x = a$ . وهذا يعنى أن الدالة $f(z)$ لهـا نهاية عظمى عند هذه النقطه .

لإثبات الجزء الثانى من النظرية نتبع طريقـــه مشابهـة : إذا كان $f''(a) > 0$ فإن $f''(x) > 0$ عند جميع نقط فترة صغيرة مغلقـة حول النقطة $a$ . وعلى هذا تـكون فى هذه الفترة $0 < (f'(x))' = f''(x)$ وبالتالى $f'(x)$ داله متزايدة . وحيث أن $f'(a) = 0$ لذلك تغير المشتقة $f'(x)$ إشارتها من سالب إلى موجب عند المرور بالنقطة $a$ .وعلى ذلك يـكون للدالة $f(x)$ نهاية صغرى عند $x = a$ .

**ملاحظـة :**

إذا أنعدمت المشتقة الثانية أيضا عند $x = a$ ، أى $f''(a) = 0$ ، فمن الجائز أن يكون عند هذه النقطة إما نهايه عظمى أو نهاية صغرى أو لا هذه ولاتلك . فى هذه الحالةنعود إلى الإختبار بواسطة الطريقة الأولى الموضحةفى البند السابق .

ويبين الجدول الآتى ملخص الإختبار باستخدام المشتقه الثانيـه :

| $f'(a)$ | $f''(a)$ | نوع النقطة الحرجه |
|---|---|---|
| 0 | — | نهـاية عظمى |
| 0 | + | نهاية صغرى |
| 0 | 0 | غـير معروف |

**مثـال ( ١ )**

أختبر من حيث النهـايات العظمى والصغرى الدالة

$$y = 2 \sin x + \cos 2x$$

**الحـل** : حيث أن الداله دورية ودورتها $2\pi$ فإنه يـكفى اختبار الداله فى الفترة $[0, 2\pi]$ .

١) إيجـاد المشتقه :

$$y' = 2 \cos x - 2 \sin 2x = 2 (\cos x - 2 \sin x \cos x)$$

$$= 2 \cos x (1 - 2 \sin x)$$

٢) إيجاد النقط الحرجه :

$$2\cos x\,(1-2\sin x) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}\ ,\ x_2 = \frac{\pi}{2}\ ,\ x_3 = \frac{5\pi}{6}\ ,\ x_4 = \frac{3\pi}{2}$$

٣) إيجاد المشتقه الثانيه :

$$y'' = -\ 2\sin x\ -\ 4\cos 2x$$

٤) اختبار نوع كل نقطة حرجه :

i) at $x_1 = \frac{\pi}{6}$ : $y'' = -\ 2.\ \frac{1}{2} - 4.\ \frac{1}{2} = -\ 3 < 0$

إذن توجد نهايه عظمى عند هذه النقطة وتساوى $y_1 = \frac{3}{2}$ .

ii) at $x_2 = \frac{\pi}{2}$ : $y'' = -\ 2.1 + 4.1 = 2 > 0$

إذن توجد نهايه صغرى عند $\frac{\pi}{2}$ وتساوى $y_2 = 1$ .

iii) at $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ : $y'' = -\ 2.\ \frac{1}{2} - 4.\ \frac{1}{2} = -\ 3 < 0$

إذن توجد نهايه عظمى عند هذه النقطه وتساوى $y_3 = \frac{3}{2}$ .

iv) at $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ : $y'' = -\ 2\ (-1) - 4\ (-1) = 6 > 0$

وبذلك يكون للدالة نهاية صغرى عند هذه النقطه قيمتها $y_4 = -\ 3$ .

**مثال (٢)**

اختبر من حيث النهايات العظمى والصغرى الدالة $y = 1 - x^4$.

**الحل :**

(١) إيجاد النقط الحرجة :

$$y' = -4x^3 , \quad -4x^3 = 0 , \quad x = 0$$

٢) تعيين اشارة المشتقة الثانية عند $x = 0$ :

$$y'' = -12x^2 , \quad y''(0) = 0$$

وعلى ذلك يتعذر تعيين نوع النقطة الحرجة عن طريق اشارة المشتقة الثانية.

٣) اختبار نوع النقطة الحرجة بالطريقة الأولى ( بند ٦ - ٦) :

$$y' > 0 \quad \text{for} \quad x < 0,$$
$$y' < 0 \quad \text{for} \quad x > 0.$$

بالتالى يكون للدالة نهاية عظمى عند $x = 0$ وقيمتها

$$y(0) = 1.$$

**مثال (٣)**

اختبر من حيث النهايات العظمى والصغرى الدالة $y = x^6$ .

**الحل :** بالطريقة الثانية نجد أن :

1) $y' = 6x^5 , \quad y' = 0 \;\text{at}\; x = 0 ;$

2) $y'' = 30x^4 , \quad y''(0) = 0.$

وبذلك تفشل الطريقة الثانية . فاذا عدنا إلى الطريقة الأولى نجد أن

$$y' < 0 \quad \text{for} \quad x < 0,$$
$$y' > 0 \quad \text{for} \quad x > 0.$$

وهذا يعنى أن للدالة نهاية صغرى عند $x = 0$ تساوى صفراً .

**مثال (٤)**

اختبر من حيث النهايات العظمى والصغرى الدالة $y = (x - 1)^3$ .

**الحل** : باتباع الطريقة الثانية نحصل على

$$y' = 3 (x - 1)^2 \quad , \quad 3 (x - 1)^2 = 0 \quad \text{at} \quad x = 1 \; ;$$
$$y'' = 6 (x - 1) \quad , \quad y'' (1) = 0.$$

وهكذا لا تعطى هذه الطريقة جوابا .

باستخدام الطريقة الأولى نجد أن

$$y' > 0 \quad \text{for} \quad x < 1,$$
$$y' > 0 \quad \text{for} \quad x > 1.$$

وعلى ذلك ليس لهذه الدالة نهاية عظمى أو صغرى عند $x = 1$ .

### ٦ ـ ٨ النهايات العظمى والصغرى لدالة فى فترة ما

Maxima and Minima of a Function on an Interval

نفرض أن الدالة $y = f(x)$ متصلة فى الفترة $[a , b]$ . تأخذ هذه الدالة قيمتها العظمى فى هذه الفترة ( أنظر بند ١-٢٢ ) . ولنفرض أن الدالة $f(x)$ لها عدد محدود من النقط الحرجة فى الفترة المعلومة. فاذا وقعت القيمة العظمى داخل

الفترة $[a , b]$ فمن الواضح أن هـذه القيمة تـكون إحدى النهايات العظمى للدالة ( إذا وجدت أكثر من واحدة ) أى أكبر نهاية عظمى . ولـكن يحدث أحيانا أن تصل الدالة إلى قيمتها العظمى عند إحدى نقطتى نهاية الفترة .

مؤدى هذا هو أن الدالة تصل إلى قيمتها العظمى فى الفترة $[a , b]$ إما عند إحدى نقطتى نهاية الفترة أو عند نقطه داخليه هى نقطة نهاية عظمى .

بالمثل فى حالة القيمه الصغرى للدالة فإنها تصل إليها إما عند إحدى نقطتى نهاية الفترة أو عند نقطه داخليه هى نقطة نهايه صغرى .

مما سبق يمكننا أن نستخلص الطريقه التاليه لتعيين القيمه العظمى لدالة متصلة فى الفترة $[a , b]$ :

١) أوجد جميع النهايات العظمى للدالة فى الفترة المعلومه .

٢) عين قيمة الدالة عند كل من نقطتى نهاية الفترة ، أى $f(a)$ ، $f(b)$ .

٣) اختر أكبر قيمه من بين جميع القيم التى حصلت عليها فتـكون القيمة العظمى للدالة فى الفترة المعطاة .

وبالمثل للقيمة الصغرى لدالة فى فترة معلومة .

## مثـال

أوجد القيمـه العظمى والصغرى للدالة $y = x^3 - 3x + 3$ فى الفترة $\left[ - 3, \frac{3}{2} \right]$ .

الحل :

١) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة فى الفترة المعطاه :

$$y' = 3x^2 - 3 \ , \quad 3x^2 - 3 = 0 \ , \quad x_1 = 1 \ , \quad x_2 = -1$$

$$y'' = 6x \ , \quad y''(1) = 6 > 0$$

ويكون للدالة نهاية صغرى، عند $x = 1$ وتساوى $y(1) = 1$ .

بالاضافه إلى ذلك نجد أن $y''(-1) = -6 < 0$

وتكون للدالة نهاية عظمى عند $x = -1$ وهى $y(-1) = 5$ .

٢) تعين قيمة الدالة عندكل من نهايتى الفترة :

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8} \ , \quad y(-3) = -15$$

من هذا نستنتج أن القيمه الكبرى للدالة فى الفترة $\left[-3 , \frac{3}{2}\right]$ هى

$y(-1) = 5$ وأن أصغر قيمه لها هى $y(-3) = -15$ .

### ٦ ـ ٩ تطبيقات النهايات العظمى والصغرى

Applications of Maxima and Minima

فيما يلى سنبين طرق تعيين النهـايات العظمى والصغرى فى بعض التطبيـقات العمليـــه .

**مثال (١)**

أطلق مقذوف بسرعه ابتدائيه $v_0$ تميل على الأرض الأفقيه زاوية $\varphi$ ، فإذا كان المدى على الأرض الأفقيه مقاسا من نقطة القذف يعطى بالعلاقة

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

حيث $g$ هى عجلة الجاذبيه الارضيه ، فأوجد زاوية القذف $\varphi$ التى تجعل المدى $R$ أكبر ما يمكن وذلك مع ثبوت السرعه الابتدائيه $v_0$ .

**الحـل** : تعتبر الـكمية $R$ دالة الزاوية المتغيرة $\varphi$ . ولنختبر هذه الداله من حيث النهايه العظمى فى الفترة $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}$$

$$\frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0 , \quad \text{critical value at } \varphi = \frac{\pi}{4} ,$$

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = - \frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g} ,$$

$$\text{at } \varphi = \frac{\pi}{4} : \frac{d^2R}{d\varphi^2} = - \frac{4v_0^2}{g} < 0$$

لذلك تأخذ الدالة $R$ عند $\varphi = \frac{\pi}{4}$ نهايتها العظمى $\frac{v_0^2}{g}$

أما عند طرفى الفترة $\left|0, \frac{\pi}{2}\right|$ فتأخذ الدالة R القيمتين

$$R(0) = 0 \quad , \quad R\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

وعلى ذلك تعطى النهاية العظمى $\frac{v_0^2}{g}$ (عندما $\phi = \frac{\pi}{4}$) أقصى مدى على المستوى الأفقى .

مثال (٢)

أوجد أبعاد اسطوانة دائرية قائمة تسع حجما معلوما V بحيث تكون مساحة سطحها أقل ما يمكن .

**الحل :** نفرض أن نصف قطر قاعدة الاسطوانة هو r وأن h هو ارتفاعها. فتكون مساحة السطح هى :

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

ولكن حجم الاسطوانه يعطى بالعلاقة

$$V = \pi r^2 h$$

ومنه ينتج

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \cdot$$

وبالتعويض عن h فى مساحة السطح نحصل على

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\left(\pi r^2 + \frac{V}{r}\right)$$

وبذلك تكون مساحة السطح S دالة نصف القطر r .

نوجد الان القيمة الصغرى لهذه الدالة فى الفترة $0 < r < \infty$.

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right),$$

$$2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0 \quad , \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \, ,$$

$$\left.\frac{d^2S}{dr^2}\right|_{r=r_1} = 2\left|2\pi + \frac{2V}{r^3}\right|_{r=r_1} > 0.$$

أى أنه عند النقطة $r = r_1$ يكون للدالة S نهـاية صغرى . فإذا لاحظنا أن

$$\lim_{r\to 0} S = \infty \quad , \quad \lim_{r\to\infty} S = \infty$$

أى أن مساحة السطح S تزداد بلا حدود عندما تقترب r من الصفر أو من ما لا نهاية ، فإننا نستنتج أن القيمة الصغرى للدالة S هى نهايتهـا الصغرى عند $r = r_1$ . ولـكن إذا كان

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

فإن

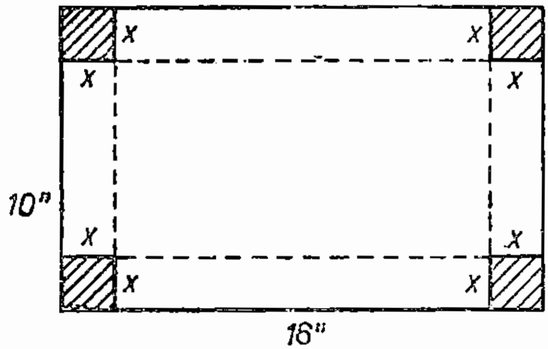
$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r\,.$$

وعلى هذا تصبح مساحة سطح الاسطوانة (التى تسع حجما معينا) أقل مايمكن عندما يكون ارتفاعها مساويا قطر قاعدتها .

## مثـال (٣)

يراد صنع صندوق على شكل متوازى مستطيلات مفتوح من أعلى، من قطعة صفيح مستطيلة طولها ١٦ بوصة وعرضها ١٠ بوصات ، وذلك بقص مربع من

كل ركن فى الصفيحـه (مربعات متساوية) ثم ثنى الأطراف النـاتئة عند الخطوط المتقطعة إلى أعلى ( شكل ٦ - ١١ ) . أوجد طول ضلع المربع المزال من كل ركن بحيث يسع الصندوق أكبر حجم ممكن .




شـكل (٦ - ١١)

**الحـل :**

نلاحظ هنا أنه إذا كانت المربعات المزالة صغيرة فإن ارتفاع الصندوق يكون صغيراً وبالتالى يصغر حجم الصندوق . أما إذا كانت المربعات المزالة كبيرة فإن قاعدة الصندوق تصبح صغيرة وبالتالى يصغر الحجم .

نفرض أن $x$ هو طول ضلع المربع المـزال . لذلك تصبح أبعـاد الصندوق الناتج هى :

الطول $= 16 - 2x$ ، العرض $= 10 - 2x$ ، الارتفاع $= x$

ويصبح الحجم هو

$$V = (16 - 2x)(10 - 2x)x = 4(40x - 13x^2 + x^3)$$

وهو دالة $x$ .

ومما يجب ملاحظته أنه توجد قيود على المتغير x . أولا، يجب أن يكون x موجبا حتى يصبح للمسأله معنى. ثانيا ، يجب أن لا تقل x عن 5 ، لأنه عند $x=5$ يختفي عرض قاعدة الصندوق . لذلك يجب أن تحقق x الشرط $5 > x > 0$.

نحسب الان المشتقة ونعين النقط الحرجه :

$$V' = 4\ (40 - 26x + 3x^2).$$

$$V' = 0 \text{ at } x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 6\tfrac{2}{3} .$$

ولكن النقطة $x_2 = 6\frac{2}{3}$ مرفوضه لأنهما تقع خارج الفترة المطلوبة . فإذا لاحظنا أن

$$V'' = (-26 + 6x) \quad \text{and} \quad V''\ (2) < 0$$

لذلك توجد نهاية عظمى للحجم عند $x = 2$ . كذلك نلاحظ أن الحجم ينعدم عند كل من طرفي الفترة [0,5] . وعلى هذا نحصل على أكبر حجم عندما $x = 2''$ وهو ١٤٤ بوصه مكعبه .

**مثال (٤)**

مجموع عدد ما وثلاثة أمثال عدد آخر هو 60 ، أوجد من بين جميع الأعداد التى تحقق هذا الشرط ذلك الزوج الذى يكون حاصل ضربه أكبر ما يمكن .

**الحل** : نفرض أن العددين المطلوب تعيينهما هما x ، y بحيث يتحقق الشرط $x + 3y = 60$ وبحيث يكون حاصل ضربهما $P = x\ y$ أكبر ما يمكن . لذلك نحذف y ( مثلا ) من العلاقتين السابقتين فينتج

$$P = \tfrac{1}{3}\ x\ (60 - x) = 20x - \tfrac{1}{3}\ x^2.$$

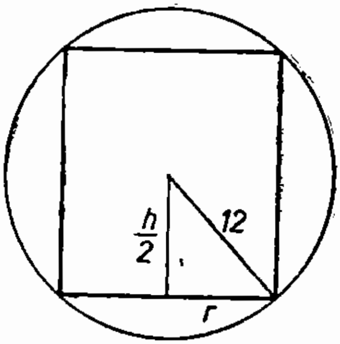
بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$p' = 20 - \frac{2}{3} x$$

وبوضع $P' = 0$ نحصل على $x = 30$ ؟ $y = 10$ . ومن السهل إثبات أن قيمة x هذه تجعل P أكبر ما يمكن .

**مثال (٥)**

أوجد أبعاد أسطوانة دائرية قائمة مرسومة داخل كرة نصف قطرها 12 بحيث يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن .




شكل (٦ - ١٢)

الحل : نفرض أن r هو نصف قطر قاعدة الأسطوانة وأن ارتفاعها هو h . فيكون حجم الأسطوانة

$$V = \pi r^2 h .$$

ولكن من شكل (٦ - ١٢) نجد أن

$$r^2 + \frac{h^2}{4} = 144 \quad \text{or} \quad r^2 = 144 - \frac{h^2}{4}$$

ويأخذ الحجم الصورة

$$V = \pi h \left(144 - \frac{h^2}{4}\right) = \pi \left(144\, h - \frac{h^3}{4}\right),$$

$$0 < h < 12.$$

بالتفاضل بالنسبة إلى $h$ ومساواة الناتج بالصفر ينتج

$$V' = \pi \left(144 - \tfrac{3}{4}\, h^2\right),$$

$$V' = 0 \text{ when } h^2 = 192 \quad \text{or} \quad h = \pm 8\sqrt{3}$$

والإشارة السالبة مرفوضة نظراً لأن $0 < h < 12$ .

$$V'' = -\tfrac{3}{2}\, \pi\, h,$$

$$V''(8\sqrt{3}) = -12\sqrt{3}\, \pi < 0$$

ويكون الحجم أكبر ما يمكن عندما يكون

$$h = 8\sqrt{3} \quad \text{and} \quad r = 4\sqrt{6}.$$

ويلاحظ أن الحجم ينعدم عند نهايتى الفترة $[0,12]$ .

## IV . رسم المنحنيات

## Tracing of Curves

### ٦ ـ ١٠ تحدب وتقعر منحنى

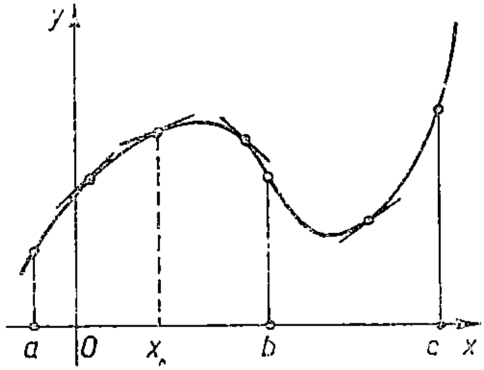
### Convexity and Concavity of a Curve

لنعتبر فى المستوى المنحنى $y = f(x)$ للداله الأحادية القيمة والقابلة للتفاضل $f(x)$ .

**تعريف :** يقال لمنحنى ما إنه **محدب الى اعلى** convex upwards فى الفترة $(a, b)$ إذا وقعت جميع نقط المنحنى تحت كل مماس له فى هذه الفترة . ويقال

للمنحنى إنه مقعر إلى أعلى concave upwards فى الفـترة $(a , b)$ إذا وقعت جميع نقط المنحنى فوق كل مماس له فى هذه الفترة .

يسمى المنحنى المحدب إلى أعلى منحـنى محـدب convex curve كما يسمى المنحنى المقعر إلى أعلى منحنى مقعر concave curve .




شكل (٦ — ١٣)

المنحنى فى شكل (٦ - ١٣) يكون محدبا فى الفـترة $(a , b)$ ومقعراً فى الفـترة $(b , c)$ .

من الخواص الهامة لشكل منحنى ما هو تقعره وتحدبه . لذلك أفردنا هذا البند لوضع القواعد التى يمكن بواسطتها الحكم على التحدب أو التقعر فى الفترات المختلفة عند دراسة خواص منحنى دالة ما $y = f (x)$ .

**نظرية (١) :**

إذا كان المنحنى $y = f (x)$ محدباً عند جميع نقط فترة ما $(a , b)$ ، كانت المشتقة الثانية للدالة $f (x)$ سالبة ، أى $f'' (x) < 0$ ، فى هذه الفـــترة .

**الاثبـات :** نأخذ نقطة اختيارية $x = x_0$ فى الفترة $(a , b)$ كما فى شكل

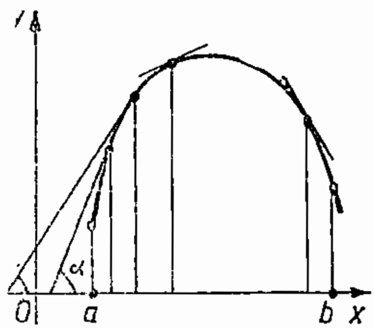
(٦-١٤) ونرسم المماس للمنحنى عند النقطة التي احداثيها السيني $x = x_0$.
وحيث أن المنحنى محدب عند $x_0$ فأن جميع نقط المنحنى في جوار هذه النقطة تقع تحت هذا المماس .

واضح من الشكل أن زاوية ميل المماس مع الأفقي تتناقص أثناء عبور النقطة $x_0$ من اليسار إلى اليمين . وهذا يعني أن $y'$ دالة متناقصة وبالتالي يكون معدل تغيرها سالباً ، أي $y'' < 0$ . وهذا صحيح لجميع نقط الفترة $(a , b)$ .

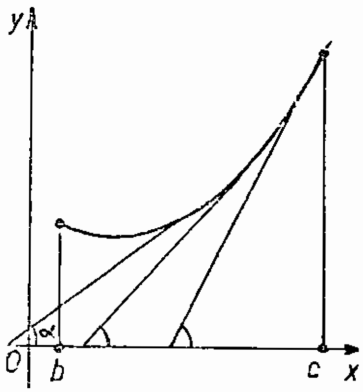
**نظرية (٢) :**

إذا كان المنحنى $y = f(x)$ مقعراً عند جميع نقط فترة ما $(b , c)$ ، كانت المشتقه الثانية للدالة $f(x)$ موجبة ، أي $f''(x) > 0$ ، في هذه الفترة .

ويمكن إثبات هذه النظرية بطريقة مماثلة بالاستعانة بشكل (٦ - ١٥) .




شكل (٦ — ١٤)




شكل (٦ — ١٥)

**مثـال (١)**

عين فترات تحدب وتقعر المنحنى الممثل بالمعادلة $y = 2 - x^2$

**الحـل** : حيث أن المشتقة الثانية $y'' = -2$ سالبة دائمـــا فإن المنحنى يـكون محدبا فى كل مكان .

**مثـال (٢)**

أختبر المنحنى $y = e^x$ من حيث التحدب والتقعر .

**الحـل** : حيث أن $y'' = ex > 0$ لجميع قيم $x$ فإن المنحنى يكون مقعراً دائمـا ( شكل ٤ - ٥ ) .

**مثـال (٣)**

نفس المثـال السابق ولـكن للمنحنى $y = x^3$ .

**الحـل** : حيث أن المشتقة الثانية هى $y'' = 6x$ ، لذلك يـكون

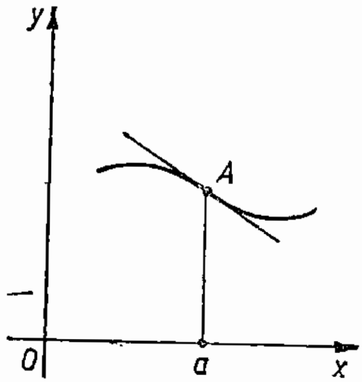
$$y'' < 0 \text{ for } x < 0 \quad \text{and} \quad y'' > 0 \text{ for } x > 0 :$$

وعلى هذا يـكون المنحنى محدبا عندما $0 > x$ ومقعراً عندما $0 < x$ .

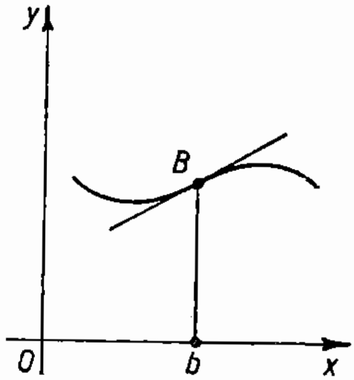
**٦ – ١١ نقط الانقلاب** Points of Inflection

**تعريف** : النقطة التى تفصل الجزء المحـدب من منحنى متصل عن جزئه المقعر تسمى نقطة انقلاب للمنحنى .

فى شكلى (٦ - ١٦) ؟ (٦–١٧) توجد نقطة انقلاب عند كل من A ؟ B .
من الواضح أن المماس عنـد نقطة الانقلاب يقطع المنحنى ، لأن المنحنى يقـع من جهة تحت المماس ومن الجهة الأخرى فوقه .




شكل (٦ — ١٦)




شكل (٦ — ١٧)

ولنوضح الآن الشروط الكافية لكى تكون نقطة ما على منحنى نقطة انقلاب .

**نظرية :**

نفرض أن لدينا منحنى معطى بالمعادلة $y = f(x)$ . فإذا كانت $f''(a) = 0$ أو كانت $f''(a)$ لا تتواجد وتغيرت إشارة المشتقة $f''(x)$ عند المرور بالنقطة $x = a$ ، فإن النقطة على المنحنى التى لها الاحـــداثى السينى $x = a$ تكون نقطة انقلاب .

**الاثبات :**

١) نفرض أن $f''(x) < 0$ عندما $x < a$ ، $f''(x) > 0$ عندما $x > a$ . على هذا يكون المنحنى محدبا لقيم $x < a$ ومقعراً لقيم $x > a$ . من ذلك ينتج أن النقطة A ذات الاحداثى السينى $x = a$ هى نقطة انقلاب المنحنى ، شكل (٦-١٦).

٢) إذا كانت $f''(x) > 0$ لقيم $x < b$ ، $f''(x) < 0$ لقيم $x > b$ ، فعندما $x < b$ يكون المنحنى مقعرا وعندما $x > b$ يكون محـدبا . وهذا يعنى أن النقطة B ذات الاحداثى السينى $x = b$ هى نقطة انقلاب المنحنى ، شكل (٦-١٧).

**طريقة تعيين نقط الانقلاب :**

١) نوجد المشتقة الثانية للدالة المعطاه .

٢) نساوى المشتقة الثانية بالصفر (أو نوجد قيم x التى لا تتواجد عندها المشتقة الثانية ) ونعين الجذور الحقيقية للمعادلة الناتجة ونرتبها تصاعديا .

٣) نعين اشارة المشتقة الثانية فى جميع الفترات المحددة بالجذور التى حصلنا عليها .

٤) إذا كانت للمشتقة الثانية إشارات مختلفة فى الفترتين اللتين تفصلهما النقطة تحت الاختبار تكون هذه النقطه نقطة انقلاب ، أما إذا كانت الاشارات متماثله فلا تتواجد نقطة انقلاب عند هذه النقطة .

**مثال (١)**

أوجد نقط الانقلاب للمنحنى $y=e^{-x^2}$ وعين فترات تحدبه وتقعره .

**الحل :**

١) نوجد المشتقه الاولى والثانية :

$$y' = -2x\, e^{-x^2}$$

$$y'' = 2e^{-x^2}\,(2x^2-1).$$

٢) المشتقه الثانية تتواجد فى كل مكان . لذلك نوجد قيم x التى تنعدم عندها $y''$ :

$$2e^{-x^2}(2x^2-1) = 0\ ,$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

٣) اختبار القيم التى حصلنا عليها :

$$\text{a)}\quad \text{for } x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ we have } y'' > 0,$$

$$\text{for } x > -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ we have } y'' < 0,$$

أى أن اشارة المشتقة الثانية تغيرت عند المرور بالنقطة $x_1$ .

لذلك توجد نقطة انقلاب احداثياها هما $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ .

$$\text{b)}\quad \text{for } x < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ we have } y'' < 0,$$

$$\text{for } x > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ we have } y'' > 0$$

إذا توجد أيضا نقطة انقلاب عند $x_2$ احداثياها هما $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

وهذه النقطة نتيجة طبيعية نظراً لتماثل المنحنى بالنسبة لمحور الصادات .

٤) مما سبق ينتج مباشرة أن :

عندما $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ يكون المنحنى مقعراً ،

وعندما $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ يكون المنحنى محدباً ،

وعندما $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty$ يكون المنحنى مقعراً .

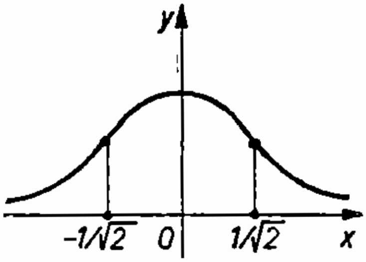
٥) من المشتقة الأولى $y' = -2x\, e^{-x^2}$ ينتج أن :

عندما $x < 0$ تصبح $y' > 0$ وتكون الداله متزايدة ،

وعندما $x > 0$ تصبح $y' < 0$ وتكون الداله متناقصة ،

وعند $x = 0$ تصبح $y' = 0$ .

وعند هذه النقطة يكون للدالة نهاية عظمى تساوى الوحدة . ويبين شكل (٦ - ١٨) منحنى هذه الدالة ، المسمى بمنحنى جاوس .




شكل (٦ - ١٨)

**مثال (٢)**

أختبر المنحنى $y = x^4$ من حيث نقط الانقلاب .

**الحل :**

١) أوجد المشتقة الثانيه : $y'' = 12\,x^2$

٢) عين النقط التى يكون عندها $y'' = 0$ : $x = 0$

٣) أختبر القيمة $x = 0$ :

عندما $x < 0$ تكون $y'' > 0$ ويكون المنحنى مقعراً .

عندما $x > 0$ تكون $y'' > 0$ ويكون المنحنى مقعراً أيضاً .

وعلى ذلك ليس لهذا المنحنى نقطة انقلاب .

**مثال (٣)**

اختبر من حيث الانقلاب المنحنى $y = (x - 1)^{1/3}$ .

**الحـل :**

١) أوجـد المشتقه الأولى والثانية :

$$y' = \tfrac{1}{3}\,(x-1)^{-\frac{2}{3}} \;,\; y'' = -\,{}^{2}/_{9}\,(x-1)^{-\,{}^{5}/_{3}}$$

٢) لاتنعدم المشتقة الثانية لأية قيمة $x$ ولـكنها لا تتواجد عند $x = 1$
. $(y'' = \pm\ \infty)$

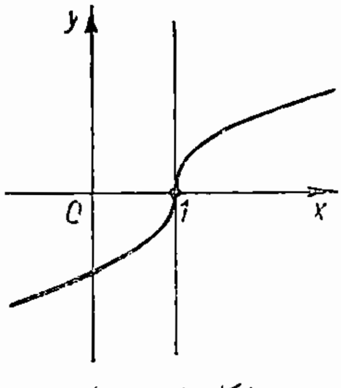
٣) أختبر القيمة $x = 1$ :

عندما $x < 1$ ، $y'' > 0$ ويكون المنحنى مقعراً

وعندما $x > 1$ ، $y'' < 0$ ويكون المنحنى محدباً .

وعلى ذلك توجد نقطة انقلاب عند $x = 1$ وهى $(1,0)$ .

والجدير بالملاحظة أنه عند $x = 1$ يـكون $y' = \infty$ ويصبـح للمنحنى مماس رأسى عند تلك النقطة كما فى شكل (٦ - ١٩) .




شكل (٦ - ١٩)

### ٦ - ١٢ الخطة المتبعة فى رسم المنحنيات

Plan for Tracing of Curves

يستلزم رسم منحنى دالة إيجاد خواصها العامة مما يساعد على رسم كروكى لمنحنيها . والخطة المتبعة فى ذلك تتلخص فى إيجاد ما يلى :

١) مقاطع المنحنى أى نقط تقاطعه مع المحورين بوضع $x = 0$ ثم $y = 0$ فى معادلة المنحنى على التوالى .

٢) مجـال الدالة .

٣) نقط عـدم اتصال الدالة .

٤) تماثل الدالة ، فإذا وجد نكتفى باختبار نصف المنحنى ثم نرسم النصف الآخر من التماثل .

٥) النهايات العظمى والصغرى للداله ومواقعهـا .

٦) فترات تزايد وتناقص الداله .

٧) مناطق تحدب وتقعر المنحنى ونقط انقلابه .

٨) الخطوط التقاربية للمنحنى وسلوكه فى ما لا نهاية .

**مثـال (١)**

ارسم منحنى الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 4$

**الحـل :**

١) مقاطع المنحنى : بوضع $x = 0$ فى معـــادلة المنحنى نحصل على المقطع الصادى $y = 4$ وبوضع $y = 0$ نجد أن

$$0 = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2,$$

$$x = -1, 2.$$

أى أن المقاطع السينية هى $1 -$ ، $2$ وقد يتعذر فى بعض الأحوال ايجاد المقاطع السينية إذا كانت المعادلة التى نحصل عليها بوضع $y = 0$ معـادلة معقدة لا يسهل حلهـا .

٢) مجـــال الداله : قيم $y$ هى أعداد حقيقية لجميع قيم $x$ ، أى أن المجال هو $-\infty < x < +\infty$ ، وهذه خاصية عامة لـكثيرات الحدود .

٣) نقطة عدم الاتصال : لا توجد مثل هذه النقط نظراً لأن كثـيرة الحدود ذات المعـاملات الثابتة تـكون داله متصلة .

٤) التماثل : لا يوجد تماثل نظراً لأن جميع إختبارات التماثل المذكورة فى بند (١-٧) تفشل بالنسبة للداله المعطـاة .

٥) النهايات العظمى والصغرى :

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x.\ (x - 2)$$

بوضع $y' = 0$ نحصل على نقطتى توقف عنـد $x = 0$ ، $x = 2$ .

| الفـــترة | إشارة $3x$ | إشارة $(x - 2)$ | إشارة $y'$ |
|---|---|---|---|
| $-\infty < x < 0$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $0 < x < 2$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $2 < x < +\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ |

فيـكون للداله نهاية عظمى عند $x = 0$ تساوى $y_{max} = 4$ ونهـــاية صغرى عند $x = 2$ تساوى $y_{min} = 0$ . ويمكن الاستعانة بالمشتقة الثانية لاختبار نقط النهايات كالآتى :

$$y'' = 6x - 6 = 6\ (x - 1),$$

$$\text{at } x = 0\ ,\ y'' = -6 < 0\ ,\quad y_{max} = 4.$$

$$\text{at } x = 2 \;,\; y'' = +6 > 0 \;,\; y_{min} = 0 .$$

٦) تزايد وتناقص الداله : تتزايد الداله فى الفترتين $-\infty < x < 0$ ، $2 < x < +\infty$ وتتناقص فى الفترة $0 < x < 2$ .

٧) نقط الانقلاب : المشتقه الثانية $y'' = 6(x-1)$ تساوى صفراً عند $x = 1$ :

$$\text{for } x < 1 \;,\; y'' < 0 \;\text{ and for }\; x > 1 \;,\; y'' > 0 .$$

وعلى ذلك تـكون اشارة المشتقة الثانية مختلفـة عن يسار وعن يمـين النقطة $x = 1$ ، لذلك توجد نقطة انقلاب عند النقطة $(2 \,,\, 1)$ . ويكون المنحنى محدباً فى الفـــترة $-\infty < x < 1$ (لأن $y'' < 0$ ) ومقعراً فى الفـــترة $1 < x < +\infty$ (لأن $y'' > 0$) .

٨) الخطوط التقاربيه والسلوك فى مالا نهاية : لا توجد لمنحنيـات كثيرات الحدود خطوطتقاربية . وحيث أن الحد الذى يحتوى على أعلى قوة فى $x$ يكون غالباً عندما تؤول $x$ فى قيمتها المطلقة إلى مالا نهاية ، لذلك يكون

$$y \simeq x^3 \;\text{ as }\; |x| \to \infty$$

وعلى ذلك يـكون سلوك المنحنى فى مالا نهايه كالآتى :

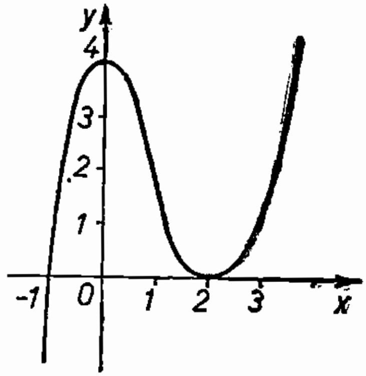
$$\text{when } x \to +\infty \;,\; y \to +\infty .$$

$$\text{when } x \to -\infty \;,\; y \to -\infty .$$

وفى النهاية تفرغ جميـع البيانات التى حصلنا عليها فى جدول كالآتى .

| | x | y | الدالة | المنحنى |
|---|---|---|---|---|
| السلوك فى ∞ | $-\infty$ | $-\infty$ | | |
| مقطع سينى | $-1$ | $0$ | متزايدة | |
| مقطع صادى ونهاية عظمى | $0$ | $4$ | | محدب |
| نقطة إنقلاب | $1$ | $2$ | متناقصة | |
| مقطع سينى ونهاية صغرى | $2$ | $0$ | | |
| السلوك فى ∞ | $+\infty$ | $+\infty$ | متزايدة | مقعر |

ثم نرسلا المنحنى كما فى شكل (٦ - ٢٠) .




شكل (٦ ـ ٢٠)

**مثـال (٢)**

ارسم منـحنى الدالة $y = \frac{x}{1 + x^2}$

**الحـــل :**

١) مقاطع المنحنى : بوضع $x = 0$ ينتج $y = 0$ ويمر المنحنى بنقطة الأصل .

٢) المجال : كل محور x أى الفترة $\infty < x < \infty -$ . ويلاحظ أنه عندما $x < 0$ يكون $y < 0$ وعندما يكون $x > 0$ يكون $y > 0$ .

٣) الاتصال : الداله متصلة لجميع قيم x الحقيقية .

٤) التماثل : المنحنى متماثل بالنسبة لنقطة الأصل لأن

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x) .$$

٥) النهايات العظمى والصغرى : من المعادله

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

نجد أن جذورها هى $x_1 = -1 \quad , \quad x_2 = 1$ .

ولنختبر نوع النقط الحرجة :

for $x < -1$ we have $y' < 0$ ,

for $x > -1$ we have $y' > 0$ ,

وبذلك يوجد للداله نهاية صغرى عند $x_1 = -1$ وتساوى

$$y_{min} = f(-1) = -0.5$$

وكذلك

for $x < 1$ we have $y' > 0$,

for $x > 1$ we have $y' < 0$,

ويكون للداله نهاية عظمى عند $x_2 = 1$ وتساوى

$$y_{max} = f(1) = 0.5$$

ويمكن إستخدام المشتقة الثانية لتمييز النهايات العظمى والصغرى :

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3},$$

for $x_1 = -1$ we have $y'' > 0$ ; minimum at $x_1$.

for $x_2 = 1$ we have $y'' < 0$ ; maximum at $x_2$.

٦) تزايد وتناقص الداله :

تتناقص الداله فى الفترة $(-\infty < x < -1)$ نظرا لأن $y' < 0$ ،

ثم تتزايد الداله فى الفترة $(-1 < x < 1)$ نظرا لأن $y' > 0$ ،

وتتناقص ثانية فى الفترة $(1 < x < \infty)$ نظرا لأن $y' < 0$ ،

٧) التحدب والتقعر ونقط الانقلاب : بوضع $y'' = 0$ نجد أن

$$x_3 = -\sqrt{3} \quad , \quad x_4 = 0 \; , \; x_5 = \sqrt{3}$$

وباختبار $y''$ كداله $x$ ينتج أن :

عندما $-\infty < x < -\sqrt{3}$ نجد أن $y'' < 0$ ويكون المنحنى محدبا ،

وعندما $-\sqrt{3} < x < 0$ نجد أن $y'' > 0$ ويكون المنحنى مقعرا ،

وعندما $0 < x < \sqrt{3}$ نجد أن $y'' < 0$ ويكون المنحنى محدبا ،

وعندما $\infty > x > \sqrt{3}$ نجد أن $y'' > 0$ ويكون المنحنى مقعرا .
وعلى ذلك فنقط الانقلاب هى

$$\left(-\sqrt{3}\,,\,-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\ ,\ (0\,,\,0)\,,\left(\sqrt{3}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

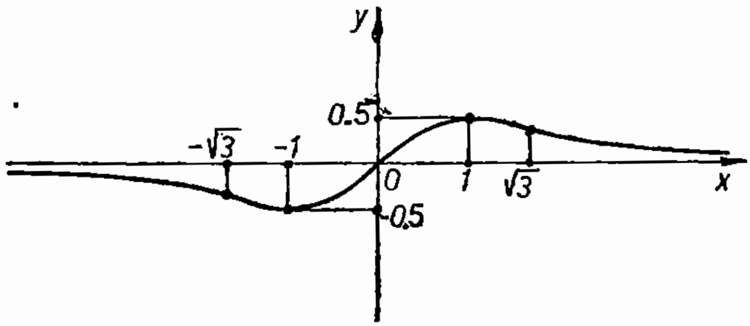
٨) الخطوط التقاربية والسلوك فى مالا نهاية :

عندما $x \longrightarrow +\infty$ نجد أن $y \longrightarrow 0$ وكذلك عندما $x \longrightarrow -\infty$ نجد أن $y \longrightarrow 0$ وهذا يعنى أن المستقيم $y = 0$ ، أى محور x من جهتيه ، يكون خطاً تقاربياً للمنحنى. ونلاحظ أنه الخط التقاربى الوحيد للمنحنى، فلا يوجد خط تقاربى رأسى لأن الدالة لا تؤول إلى مالا نهاية لقيمة محدوده للمتغير x .

ويبين الجدول الآتى جميع البيانات التى حصلنا عليها :

| | x | y | الدالة | المنحنى |
|---|---|---|---|---|
| محور x خط تقاربى | $\longrightarrow -\infty$ | $\longrightarrow 0$ | متناقصة | محدب |
| نقطة انقلاب | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ | | |
| نهاية صغرى | $-1$ | $-0{,}5$ | | مقعر |
| تقاطع مع المحاور ونقطة انقلاب | $0$ | $0$ | متزايدة | |
| نهاية عظمى | $1$ | $0{,}5$ | | محدب |
| نقطة انقلاب | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | متناقصة | |
| محور x خط تقاربى | $\longrightarrow +\infty$ | $y \longrightarrow 0$ | | مقعر |

ويبين شكل (٦-٢١) المنحنى المطلوب .




شكل (٦-٢١)

**مثال (٣)**

ارسم المنحنى $y = \sqrt[3]{2a\,x^2 - x^3}$ ، حيث $a > 0$ .

**الحل :**

١) المقاطع مع المحورين :

بوضع $x = 0$ نجد أن $y = 0$ وبوضع $y = 0$ ينتج أن

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2a$$

أى بالإضافة إلى مرور المنحنى بنقطة الأصل ، هناك مقطع سينى آخر يساوى $2a$

٢) مجال الداله : الداله معرفة لجميع قيم $x$ .

٣) اتصال الداله : متصلة فى كل مكان .

٤) التماثل : تفشل جميع اختبارات التماثل لهذه الداله .

٥) النهايات العظمى والصغرى :

$$y' = \frac{4a\,x - 3x^2}{3\,\sqrt[3]{(2a\,x^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\,\sqrt[3]{x\,(2a - x)^2}}\ .$$

وعلى هذا تتواجد المشتقة فى كل مكان ما عدا عند النقط

$$x_1 = 0 \quad \text{and} \quad x_2 = 2a.$$

نختبر الآن المشتقة عند النقطة الحرجه الأولى أى نعـــين نهايتيها عندما
$x \longrightarrow 0 -$ ، $x \longrightarrow 0 +$ :

$$\lim_{x \longrightarrow 0 -} \frac{4a - 3x}{3\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{(2a - x)^2}} = -\,\infty\,,$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0 +} \frac{4a - 3x}{3\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{(2a - x)^2}} = +\,\infty\,.$$

عندما $0 > x$ يـكون $0 > y'$ وعندما $0 < x$ يكون $0 < y'$ وذالك فى جوار النقطة $x = 0$ . إذن يكون للدالة نهـــاية صغرى عنـد هذه النقطة تساوى صفرا ويكون المماس عندها رأسياً .

باختبار النقطة الحـــرجة الأخرى $x_2 = 2a$ نجد أن المشتقة تؤول مرة أخرى إلى ما نهـاية عندما $x \longrightarrow 2a$ . إلا أنه لجميـع قيم $x$ القريبة من $2a$ ( سواء عن يمينا أو يسارها ) تـكون المشتقة سالبـة . لذلك لا توجـــد نهاية عظمى أو صغرى للدالة عند هذه النقطة وهناك يكون المماس للمنحنى رأسيا .

بوضـع $y' = 0$ ينتـج أن $x = \frac{4a}{3}$ وباختبـار هذه النقطة نجـد أن

$$\text{for} \quad x < \frac{4a}{3} \quad , \quad y' > 0\,.$$

$$\text{for} \quad x > \frac{4a}{3} \quad , \quad y' < 0$$

وعلى هذا يوجد للدالة نهاية عظمى عند $x = \frac{4a}{3}$ قيمتها

$$y_{max} = \tfrac{2}{3} a \sqrt[3]{4}$$

٦) تزايد وتناقص الدالة :

for $-\infty < x < 0$ the function decreases,

for $0 < x < \frac{4a}{3}$ the function increases,

for $\frac{4a}{3} < x < \infty$ the function decreases.

٧) تحدب وتقعر المنحنى ونقط انقلابه :

$$y'' = - \frac{8\ a^2}{9\ x^{4/3}\ (2a - x)^{5/3}}$$

لا تنعدم المشتقة الثانية عند أية نقطة . إلا أنه توجد نقطتان تكون عندهما المشتقة الثانية غير متصلة وهما

$$x_1 = 0 \qquad \text{and} \qquad x_2 = 2a$$

لنبحث الآن فى اشارة المشتقة الثانية بالقرب من هاتين النقطتين :

عندما $0 < x$ نجد أن $0 > y''$ ويكون المنحنى محدباً ،

وعندما $x > 0$ نجد أن $0 > y''$ ويكون المنحنى محدباً أيضاً .

لذلك لا توجد نقطة انقلاب عند النقطة ذات الاحداثى السينى $x = 0$ ،

عندما $x < 2a$ نجد أن $0 > y''$ ويكون المنحنى محدباً .

وعندما $x > 2a$ نجد أن $y'' > 0$ ويكون المنحنى مقعراً .

لذلك تكون النقطة $(2a, 0)$ نقطـــة انقلاب للمنحنى ويكون المماس عندها رأسيا .

٨) الخطوط التقاربية والسلوك فى ما نهاية :

ليس للمنحنى خطوط تقاربية أفقية أو رأسية نظراً لأن $y$ لا تقترب من قيمة محدودة عندما $x \to \pm \infty$ كما أن $x$ لا تؤول إلى قيمة محـدودة عندما $y \to \pm \infty$ . إلا أن هذا المنحنى له خط تقاربى مائل .

ومن الممكن إثبات أنه إذا كان للمنحنى $y = f(x)$ خط تقـاربى مائل $y = mx + c$ فان الميل $m$ والمقطع الصادى $c$ يعطيان بالعلاقتين :

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

and

$$c = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

بشرط تواجد النهايتين معـا وذلك إذا كان الاقتراب من المنحنى عن يمـين محـور $y$ . أما فى حالة الاقـتراب عن يسار هـــذا المحور فتؤخذ النهـايتان عندما $x \to -\infty$ .

وبالنسبة للمنحنى المعطى نجد أن :

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1,$$

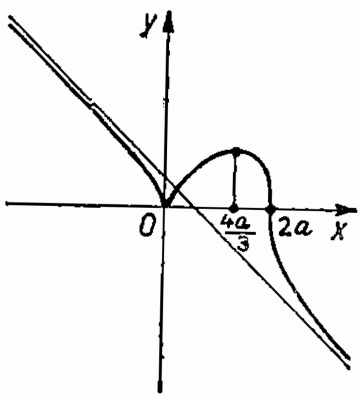
$$c = \lim_{x \to \pm\infty} \left[ \sqrt[3]{2a\,x^2 - x^3} + x \right]$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2a\,x^2 - x^3) + x^3}{\sqrt[3]{(2a\,x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{2a\,x^2 - x^3} + x^2}$$

$$= \frac{2a}{3}$$

فيكون المستقيم $y = \quad x + \frac{2a}{3}$ هو خط تقاربى مائل للمنحنى .

يبين شكل ( ٦ - ٢٢ ) منحنى الدالة المطلوب .




شكل (٦ - ٢٢)

والجدول الآتى يبين خواص المنحنى المعطى .

| | x | y | الدالة | المنحنى |
|---|---|---|---|---|
| اقتراب المنحنى من الخط التقاربى | $x \to -\infty$ | $y \to \infty$ | متناقصة | محدب |
| المرور بنقطة الأصل | $0$ | $0$ | | |
| نهاية صغرى ومماس رأسى | $0$ | $0$ | متزايدة | محدب |
| نهاية عظمى ومماس أفقى | $\frac{4a}{3}$ | $\frac{2}{3} a \sqrt[3]{4}$ | | |
| نقطة انقلاب ومماس رأسى | $2a$ | $0$ | متناقصة | مقعر |
| اقتراب المنحنى من الخط التقاربى | $x \to +\infty$ | $y \to -\infty$ | | |

## V. بعض النظريات الخاصة بالدوال القابله للتفاضل

## Some Theorems on Differentiable Functions

### ٦ - ١٣ نظرية رول Rolle's Theorem

**منطوق النظرية :** إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة $[a, b]$ وقابلة التفاضل عند جميع النقط الداخلية لهذه الفترة ، وكانت هذه الدالة تساوى صفراً عند طرفى الفترة $[f(a) = f(b) = 0]$ ، فانه توجد نقطة واحده على الأقل $x=c$ فى هذه الفترة $(a < c < b)$ تنعدم عنـــدها المشتقة $f(x)$ ، أى $f'(c) = 0$ .

**الاثبات :** حيث أن الدالة $f(x)$ متصلة فى الفترة $[a, b]$ ، لذلك تأخذ نهايتها العظمى $M$ والصغرى $m$ فى هذه الفترة .

١ ) إذا كان $m = M$ فان الدالة $f(x)$ تكون ثابته ، وهـذا يعنى أنه لجميع قيم $x$ تـكون قيمة الدالة ثابتة $f(x) = m$ . عندئذ يكون $f'(x) = 0$ عند أية نقطة فى الفترة وبذلك تثبت النظرية .

٢ ) نفرض أن $M \neq m$ ، وأن أحد العددين $M$ أو $m$ على الأقل لايساوى صفراً . ولنفرض على وجه التحديد أن $M > 0$ وأن الدالة تأخذنهايتها العظمى عند $x = c$ بحيث أن $f(c) = M$ . والجدير بالملاحظة أن $c$ لا تساوى $a$ أو $b$ ، نظراً لأن $f(a) = 0$ , $f(b) = 0$ .

حيث أن $f(c)$ هى النهاية العظمى للدالة وحيث أن المشتقة تتواجد عند

$x = c$ حسب الفرض ، لذلك ينتج أن $f'(c) = 0$ . وبالتالى توجد نقطة c فى الفترة $[a, b]$ تنعدم عندها المشتقة $f'(x)$ .

ولهذه النظرية ( المتعلقة بالقيم الصفرية للمشتقة ) المعنى الهندسى الاتى : إذا كان لدينا منحنى متصل ، له مماس عند كل نقطة عليه ، وكان هذا المنحنى يقطع محور x فى النقطتين $x = a$ ، $x = b$ ، فإنه توجد على الأقل نقطة واحدة على المنحنى احداثيها السينى يقع بين a , b يكون عندها المماس موازياً للمحور الأفقى .

**ملاحظات :**

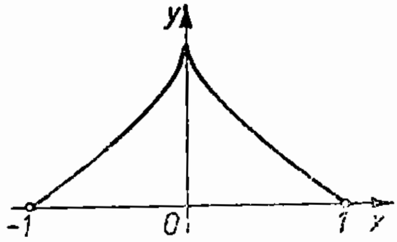
١ ) تظل نظرية رول صحيحة للدوال القابلة للتفاضل والتى لا تنعدم قيمتها عند نهايتى الفترة $[a, b]$ وإنما تأخذ نفس القيمة عند هاتين النهايتين ، أى $f(a) = f(b)$ .

٢ ) إذا لم تتواجد مشتقة الدالة $f(x)$ عند جميع النقط التى تقع فى الفترة $[a, b]$ فإن النظرية قد تفشل ، لأنه فى هذه الحالة ربما لا تتواجد نقطة c فى الفترة $[a, b]$ تنعدم عندها المشتقة $f'(x)$ . مثالا لذلك نأخذ الدالة

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

المبين منحنيها فى شكل (٦ ـ ٢٣) هذه الدالة متصلة فى الفترة $[-1, 1]$ وتنعدم عند طرفيها ، إلا أن مشتقتها

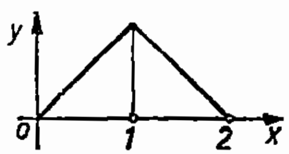
$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$




شكل (٦ ــ ٢٣)

لا تنعدم داخل هذه الفترة . ذلك لأنه توجد نقطة $x = 0$ فى هذه الفترة لا تتواجد عندها المشتقة ( تصبح لا نهائية ) .

يبين شكل ( ٦ ــ ٢٤ ) مثالا آخر لدالة لا تنعدم مشتقتها فى الفترة $[0\ 2]$. هـذه الدالة لا تحقق شروط نظرية رول ، ذلك لأن الدالة ليس لهـا مشتقة عند النقطة $x = 1$ .



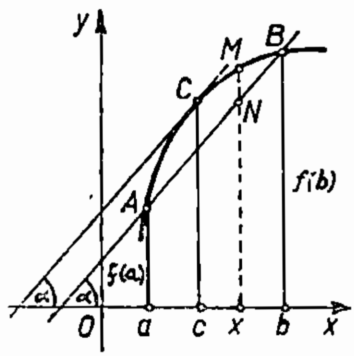

شكل (٦ ــ ٢٤)

## ٦ ــ ١٤ نظرية لاجرانج او نظرية القيمة المتوسطة

Lagrange's Theorem or Mean-Value Theorem

**منطوق النظرية :** إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة فى الفترة $[a, b]$ وكانت قابلة للتفاضل عندجميع النقط الداخلية لهذه الفترة فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل $c$ فى هذه الفترة ( $a < c < b$ ) بحيث يكون

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) . \quad \cdots \cdots \quad (1)$$




شكل (٦ — ٢٥)

**الاثبات :** نفرض أن

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ونعتبر الدالة المساعدة $F(x)$ التى تعرف بالمعادلة

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q(x - a) .$$

ولنبين الان المعنى الهندسى للدالة $F(x)$ . نكتب معادلة الوتر A B فى شكل (٦ - ٢٥ ) الذى ميله $Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ والذى يمر بالنقطة $A(a, f(a))$:

$$y - f(a) = Q(x - a)$$

ومنها ينتج أن

$$y = f(a) + Q(x - a) \quad \cdots \cdots \quad (2)$$

ولكن من التعريف

$$F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x-a)] = MX - NX$$

لذلك نجد أن لكل قيمة $x$ تكون $F(x)$ مساوية للفرق بين الاحداثيين الرأسيين للمنحنى $y = f(x)$ والوتر (2) . ومن الواضح أن الدالة $F(x)$ متصلة فى الفترة $[a, b]$ وقابلة للتفاضل داخل هذه الفترة ، كما أنها تنعدم عند طرفيها ، $F(a) = 0$ ، $F(b) = 0$ . وعلى ذلك يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة $F(x)$ . من هذا نستنتج أنه توجد فى هذه الفترة نقطة $x = c$ بحيث $F'(c) = 0$ .

$$\because \quad F'(x) = f'(x) - Q .$$

$$\therefore \quad F'(c) = f'(c) - Q = 0.$$

وبالتالى $Q = f'(c)$ . بتعويض قيمة $Q$ من التعريف نجد أن

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

ومنها ينتج المطلوب مباشرة .

بالقاء نظرة على شكل (٦ - ٢٥) يمكننا أن نستخلص المعنى الهندسى لنظرية لاجرانج . من الرسم يتضح أن الكمية $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ هى ظل الزاوية $\alpha$ التى يميل بها الوتر الواصل بين النقطتين $A$ ، $B$ ذات الاحداثيين السينيين $a$ ، $b$ . من ناحية أخرى $f'(c)$ هو ظل زاوية ميل المماس للمنحنى عند النقطة ذات

الإحداثى السينى c . على هذا يكون المعنى الهندسى للنظرية هو : إذا تواجد المماس عند جميع نقط القوس A B فإنه توجد نقطة C على هذا القوس تقع بين B,A يكون عندها المماس موازياً للوتر الواصل بين النقطتين B,A .

**ملاحظة** : حيث أن القيمه c تحقق الشرط $a < c < b$ فأنه ينتج أن

$$c - a < b - a$$

or

$$c - a = \theta\,(b - a).$$

حيث $\theta$ هو عدد معين يقع بين 0 , 1 , أى أن $0 < \theta < 1$ .

ولكن حينئذ يكون

$$c = a + \theta\,(b - a)$$

وبالتالى يمكن كتابة العلاقــة (1) فى منطوق النظرية على الصورة المكافئة

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'\,[a + \theta\,(b - a)],$$
$$0 < \theta < 1 .$$

### ٦ ـ ١٥ نظرية كوشى (تعميم نظرية القيمة المتوسطة)

Cauchy's Theorem (Generalization of the Mean - Value Theorem)

**منطوق النظرية** : إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين متصلتين فى الفترة $[a,b]$ وقابلتين للتفاضل عند النقط الداخلية لهذه الفترة ، وكانت المشتقة $g'(x)$

لا تنعدم عند أية نقطة داخلية ، فإنه توجد نقطة ما $x = c$ فى هذه الفترة $(a < c < b)$ بحيث يتحقق

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad . \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

**الاثبات** : نعرف العدد $Q$ بالعلاقة

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

والجدير بالملاحظة أن $g(b) - g(a) \neq 0$ نظرا لأنه إذا كان $g(b)$ تساوى $g(a)$ فتبعاً لنظرية رول تنعدم المشتقة $g'(x)$ فى الفترة المعنية مما يتعارض مع فرض النظرية .

نكون الآن الدالة المساعدة

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q\,[g(x) - g(a)].$$

من الواضح أن $F(a) = 0$ وكذلك $F(b) = 0$ ( هذا يلى مباشرة من تعريف الدالة $F(x)$ وتعريف العدد $Q$ ) . فإذا لاحظنا أن الدالة $F(x)$ تستوفى شروط نظرية رول فى الفترة $[a, b]$ ، لذلك توجد نقطة $x = c$ بين $a$ , $b$ $(a < c < b)$ بحيث يتحقق $F'(c) = 0$ ولكن

$$F'(x) = f'(x) - Q\,g'(x)$$

ومنه ينتج أن

$$F'(c) = f'(c) - Q\,g'(c) = 0.$$

$$\therefore \quad Q = \frac{f'(c)}{g'(c)} \;.$$

بتعويض قيمة $Q$ الناتجة فى العلاقة (2) نحصل على العلاقة (1) .

**ملاحظة :** لا يمكن إثبات نظرية كوشى (كما يتبادر للاذهان من الوهلة الأولى) بتطبيق نظرية لاجرانج على كل من بسط ومقام الكسر

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} ,$$

لاننا نحصل فى هذه الحالة (بعد اختصار $b - a$) على العلاقة

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} \qquad \dots \dots \dots \quad (3)$$

وفيها تكون $a < c_1 < b$ ، $a < c_2 < b$ . وحيث أن $c_1 \neq c_2$ على وجه العموم ، لذلك فإن النتيجة (3) لا تعطى نظرية كوشى .

## ٦ – ١٦ تعيين الكمية غير المعينة $\frac{0}{0}$

Evaluation of the Indeterminate Form $\frac{0}{0}$

نفرض أن الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ تحققان فى فترة معينه $[a , b]$ نظرية كوشى وتنعدمان عند النقطة $x = a$ من هذه الفترة ، أى $g(a) = 0$ ، $f(a) = 0$. النسبة $\frac{f(x)}{g(x)}$ غير معرفة عند $x = a$ ولكن لها معنى محدد لقيم $x$ التى لا تساوى $a$ . وهنا يأتى السؤال عن وجود نهاية لهذه النسبة عندما $x \longrightarrow a$ وتسمى هذه العملية بعملية إيجاد قيمة الكمية غير المعينة التى على الصورة $\frac{0}{0}$ .

سبق لنا فى بند (١-١٨) وأوجدنا مثل هذه النهاية كما فى حالة $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

وكذلك فى إيجاد مشتقات الدوال الأولية . فعندما $x=0$ يكون التعبير $\frac{\sin x}{x}$ غير ذى معنى وتكون الدالة $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ غير معرفة عند $x = 0$ ولكن وجدنا أن نهايتها عند $x \longrightarrow 0$ تتواجد وتساوى الوحدة .

**نظرية لوبيتال : L'Hospital's Theorem**

نفرض أن الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ تحققان نظرية كوشى فى فترة ما وأنهما تنعدمان عند النقطة $x = a$ : $f(a) = g(a) = 0$ فإذا تواجدت نهاية النسبة $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ عندما $x \longrightarrow a$ ، فإن النهاية $\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ تتواجد أيضاً وتكون

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot$$

**الاثبات :** فى الفترة $[\alpha , \beta]$ نأخذ نقطة ما $x$ لا تساوى $a$ وتطبق قاعدة كوشى فينتج أن

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$$

حيث تقع $\zeta$ بين $x$ ، $a$ . ولكن حسب الفرض $f(a) = g(a) = 0$ لذلك

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$$

فإذا آلت $x \longrightarrow a$ تؤول $\zeta \longrightarrow a$ أيضاً،نظرا لوقوع $\zeta$ بين $x , a$ .

وإذا كان

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

فإنه يكون أيضاً

$$\lim_{\zeta \to a} \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = A$$

ومن هذا يتضح أن

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\zeta \to a} \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

or

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

**ملاحظات :**

١) تطبق هذه النظرية أيضاً فى الحالة التى تكون فيها الدالة $f(x)$ أو $g(x)$ غير معرفة عند $x = a$ ولكن

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ ، } \lim_{x \to a} g(x) = 0 .$$

لكى نرجع هذه الحالة إلى سابقتها ، نعيد تعريف الدالتين $f(x)$ , $g(x)$ عند النقطة $x = a$ بحيث تصبحان متصلتين عند النقطة $a$ .لذلك يكفى وضع

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 \; ; \; g(a) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

نظراً لأن نهاية النسبة $\frac{f(x)}{g(x)}$ عندما $x \longrightarrow a$ لا تعتمد على ما إذا كانت الدالتان $f(x)$ ، $g(x)$ معرفتين عند $x = a$ .

٢) إذا كان $f'(a) = g'(a) = 0$ والمشتقتان $f'(x)$ ، $g'(x)$ تحققان الشروط التي تفرضها النظرية على الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ ، فإنه يمكن إعادة تطبيق النظرية على النسبة $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ فتعطى

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

وهكذا .

٣) تطبق قاعدة لوبيتال أيضا إذا كان

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{and} \lim_{x \longrightarrow \infty} g(x) = 0.$$

لأنه بوضع $x = \frac{1}{z}$ نجد أن $z \longrightarrow 0$ عندما $x \longrightarrow \infty$ وعلى هذا

$$\lim_{z \longrightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \lim_{z \longrightarrow 0} g\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

ثم بتطبيق قاعدة لوبيتال على النسبة $f\left(\frac{1}{z}\right) / g\left(\frac{1}{z}\right)$ ينتج

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

**مثال (١)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3} .$$

**مثال (٢)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1 .$$

**مثال (٣)**

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sin x} .$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

وقد طبقنا فى هذا المثال قاعدة لوبيتال ثلاث مرات نظراً لظهور الصورة $\frac{0}{0}$ فى المشتقة الأولى والثانية أيضاً .

**مثال (٤)**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} k \cos \frac{k}{x} = k$$

# تمارين

## I. المعدلات المرتبطة

١ ) إذا كانت $A$ هى مساحة دائرة نصف قطرها $r$ يتغير مع الزمن $t$ فأوجد العلاقة التى تربط المعدلين $\frac{dA}{dt}$ ، $\frac{dr}{dt}$ .

٢ ) $V$ هو حجم كرة نصف قطرها $r$ يتغير مع الزمن $t$. أوجد العلاقة بين المعدلين $\frac{dV}{dt}$ ، $\frac{dr}{dt}$ .

٣ ) يسقط الرمل على الأرض الأفقية بمعدل ثابت $10\ ft^3/min$ ليكون كوما على شكل مخروط دائرى قائم بحيث يظل نصف قطر قاعدته مساويا الارتفاع على الدوام . أوجد السرعة التى ترتفع بها قمة مكوم عندما تصبح على إرتفاع $5\ ft$ من الارض .

٤ ) نقطة مطر على شكل كرة يتكثف بخار الماء على سطحها أثناء سقوطها بمعدل يتناسب مع مساحة سطحها . أثبت أن نصف القطر يزداد بمعدل ثابت .

٥ ) تتحرك نقطة $A$ على محور $x$ بمعدل ثابت $a\ ft/sec$ بينما تتحرك النقطة $B$ على محور $y$ بمعدل ثابت $b\ ft/sec$. أوجد معدل تغير المسافة بينهما عندما تكون $A$ فى النقطة $(x\ ,\ 0)$ و $B$ فى النقطة $(0\ ,\ y)$ .

٦ ) بالون كروى يدفع فيه الغاز بمعدل $100\ ft^3/min$ . بفرض أن ضغط الغاز يظل ثابتا ، أوجد السرعة التى يزداد بها نصف القطر فى اللحظة التى يصبح فيها مساويا $3\ ft$ .

٧ ) يرتفع بالون رأسيا بمعدل ثابت 15 ft/sec وعندما يكون على ارتفاع 200 ft مرت تحته سيارة تسير فى طريق مستقيم بسرعة ثابتة 66 ft/sec ، أوجد السرعة التى تتغير بها المسافة بينهما بعد ثانية واحدة .

٨ ) يسحب الماء من خزان مخروطى قطر قاعدته 8 ft وعمقه 10 ft (رأسه إلى أسفل ) بمعدل ثابت $5\ ft^3/min$ ، أوجد السرعة التى يهبط بها سطح الماء عند يكون عمق الماء فى الخزان 6 ft .

٩ ) رجل طوله 6 ft يمشى بسرعة 5 ft/sec متجها إلى مصباح لإضاءة الشارع يرتفع 16 ft عن الأرض . أوجد المعدل الذى يتحرك به طرف ظله . ما هو المعدل الذى يتغير به طول ظله عندما يكون الرجل على بعد 10 ft من قاعدة المصباح .

١٠ ) مصباح معلق عند قمة عمود إرتفاعه 50 ft تركت كرة لتسقط من نفس الارتفاع من نقطة تبعد 30 ft عن المصباح . ماهى السرعة التى يتحرك بها ظلها على الأرض بعد $\frac{1}{2}$ sec ( إفرض أن الكرة تسقط مسافة $S = 16\ t^2$ قدماً فى $t$ ثانية ) .

١١ ) كرة من الحديد قطرها 8 in مغطاه بطبقة من الجليد منتظمة السمك . اذا كان الجليد يذوب بمعدل $10\ in^3/min$ فأوجد السرعة التى يتناقص بها سمك الجليد عندما يكون سمكه 2 in وأوجد أيضا سرعة تناقص مساحة السطح الخارجى .

١٢ ) تبحر سفينتان A ، B مبتعدتان عن نقطة 0 فى اتجاهين مستقيمين

بحيث تكون الزاوية $AOB = 120^{\circ}$ . أوجد معدل تغير المسافة بين السفينتين إذا علمت أنه فى لحظة معينة يكون $OA = 8$ miles ، $OB = 6$ miles ، سرعة المركب A 20 mi/hr وسرعة المركب B 30 mi/hr

## II . تطبيقات هندسية

١ ) أوجد معادلة المماس للقطع المكافىء $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ عند النقطة $(-2, 1)$.

٢ ) أوجد معادلة العمودى على القطع الزائد $xy + 2x - 5y - 2 = 0$ عند النقطة $(3 , 2)$ .

٣ ) أوجد معادلة المماسات للمنحنى $y = x^3 - 6x + 2$ التى توازى المستقيم $y = 6x - 2$ .

٤ ) أوجد معادلة الأعمدة على القطع الزائد $xy + 2x - y = 0$ التى توازى المستقيم $2x + y = 0$ .

٥ ) أثبت أن المماسين من النقطة $(0 , \frac{3}{2})$ للقطع المكافىء $x^2 - 4y + 4 = 0$ متعـــامدان .

٦ ) أثبت أن المستقيمين المرسومين من أية نقطة على المستقيم $x = -p$ مماسين للقطع المكافىء $y^2 = 4px$ يكونان متعامدين ( $p =$ constant ) .

٧ ) بين ما إذا كان المماس للمنحنى $y = x^3$ عند النقطة $(1,1)$ يقطع المنحنى عند أية نقطة أخرى . ولئن كان كذلك أوجد هذه النقطة .

٨ ) أوجد جميع المستقيمات التى يمكن رسمها عموديا على القطع الزائد $x^2 - y^2 = 5$ وموازية المستقيم $2x + 3y = 10$ .

٩ ) أوجد جميع المستقيمات التى يمكن رسمها من النقطة $(2 , 1 -)$ مماسة للقطع الزائد $4xy = 1$

١٠ ) فى أية نقطة يقطع العمودى على القطع المكافىء $y = x^2 + 2x - 3$ عند النقطة $(1,0)$ المنحنى مرة أخرى ؟

١١ ) لأية قيم $b$ يكون المستقيم $y = 12x + b$ مماساً للمنحنى $y = x^3$ ؟

١٢ ) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودى وطول تحت المماس وطول تحت العمودى للدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ عند النقطة $(x_1 , y_1)$ .

١٣ ) أثبت أن تحت المماس للقطع المكافىء $y^2 = 4ax$ عند أية نقطة ينصف عند رأس القطع وأن تحت العمودى ثابت الطول ويساوى $2a$

١٤ ) أثبت أن جزء المماس للقطع الزائد $xy = c$ المحصور بين محورى الاحداثيات ينصف عند نقطة التماس .

١٥ ) أثبت أن جزء المماس الاسترويد $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ المحصور بين محورى الاحداثيات ثابت الطول .

١٦ ) أوجد أطوال تحت المماس وتحت العمودى والمماس والعمودى للسيكلويد $x = a(\theta - \sin\theta)$ ، $y = a(1 - \cos\theta)$ عند النقطة $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

١٧ ) أوجد الكميات $S_T$ ، $S_N$ ، $T$ ، $N$ للمنحنى $x = 4a\cos^3 t$ ، $y = 4a\sin^3 t$ عند أية نقطة .

١٨ ) أوجد زاوية تقاطع أى زوج من المنحنيات الآتيه :

a) $y = a^x$ , $y = b^x$ , $(a \neq b , a > 0, b > 0)$ .

b) $2x^2 + 3y^2 = 5, \quad y^2 = x^3,$

c) $y = x^2 \; , \; yx = 1.$

d) $x^2 + y^2 = 16, \quad y^2 = 6x.$

e) $x^2 + xy + y^2 = 7 \; , \; y = 2x.$

f) $xy = 2 \; , \; x^2 - y^2 = 3.$

g) $y^2 = 4x + 4 \; , \; y^2 = 64 - 16x.$

h) $2x^2 + 3y^2 = a^2 \quad , \quad ky^2 = x^3$ intersect orthogonally

for all values of $a \neq 0$ and $k \neq 0$

## III . النهايات العظمى والصغرى

١) عين فترات تزايد وتناقص الدوال الآتية :

a) $y = x^2 - 4x + 6$ b) $y = 2x^2 - 4x + 5$

c) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ d) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

e) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ f) $y = x^4 - 4x^2 + 5$

٢) اختبر الدوال الآتية من حيث النهايات العظمى والصغرى :

a) $y = x^3 - 2x + 3$ b) $y = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

c) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$ d) $y = - x^4 + 2x^2$

e) $y = x^4 - 8x^2 + 2$ f) $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$

g) $y = 2 - (x - 1)^{\frac{2}{3}}$ h) $y = 3 - 2(x + 1)^{\frac{1}{3}}$

i) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ j) $y = \dfrac{(x - 2)(3 - x)}{x^2}$

k) $y = 2e^{x} + e^{-x}$

l) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

m) $y = x + \dfrac{1}{x}$

n) $y = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a - x}$

o) $y = x + \sqrt{1 - x}$

p) $y = x\sqrt{1 - x} \quad (x \leqslant 1)$

q) $y = x + \tan x$

r) $y = e^{x} \sin x$

s) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

t) $y = x \ln x$

u) $y = x \ln^2 x$

v) $y = \ln x - \tan^{-1} x$

w) $y = \sin 3x - 3 \sin x$

x) $y = 2x + \tan^{-1} x$

y) $y = \sin x \cos^2 x$

z) $y = \sin^{-1}(\sin x)$

٣) أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدوال الآتية فى الفترات المبينة قرين كل منها :

a) $y = -3x^4 + 6x^2 - 1 \quad (-2 \leqslant x \leqslant 2)$

b) $y = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 5)$

c) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1} \quad (0 \leqslant x \leqslant 4)$

d) $y = \sin 2x - x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $y = \cos x + \sin x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right]$

٤) أوجد عـــددين موجبين بحيث يكون مجموعهما 10 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

٥) أوجد أضلاع المستطيل المرسوم داخـــل دائره نصف قرها a بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

٦) الفرق بين عددين هو 20 ، أوجـــد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أقل ما يمكن .

٧) أثبت أن من بين جميع المثلثات المتساوية الساقين التى يمكن رسمها داخل دائره معلومة يكون للمثلث المتساوى الأضلاع أكبر محيط .

٨) أوجد المثلث القائم الزاوية الذى يكون وتره مساويا h وتكون مساحته أكبر ما يمكن .

٩) أوجد إرتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة التى يمكن رسمها داخل كره نصف قطرها a بحيث تكون مساحة سطحها أكبر ما يمكن .

١٠) قسم العدد 10 إلى جزئين بحيث يكون مجموع ضعف أحدهما ومربع الآخر أقل ما يمكن .

١١) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف إلى مقلوبه يعطى أقل مجموع .

١٢) أوجد عدداً موجباً بحيث يكون الفرق بينه وبين مربعه أكبر ما يمكن.

١٣) نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة . فاذا كان محيط النافذه الكلى يساوى 2a أوجد أبعادها بحيث تكون مساحتها أكبر ما يمكن .

١٤) قطاع دائرى محيطه 2a ، أوجـد نصف قطره بحيث تـكون مساحته أكبر ما يمكن .

١٥) خيمة على شكل مخروط دائرى قائم حجمها v أوجد إرتفاعها ونصف قطر قاعدتها بحيث تكون تكاليف إنشائها أقل ما يمكن .

١٦) يقف رجل A فى حقل على بعد 9 km من أقرب نقطة B على طريق مستقيم يصل إلى قـريه C على بعد 15 km من النقطة B . فاذا كانت سرعـة سير الرجل فى الحقل هى 8 km/hr وسرعته على الطريق هى 10 km/hr فاوجد النقطة D على الطريق التى يجب أن يتجه اليها الرجل بحيث يصل إلى القريه فى أقـل وقت ممـكن .

١٧) تقع السفينة A على بعد 75 miles إلى الشرق من سفينة أخرى B . فاذا كانت السفينة A تسير بسرعة 12 miles/hr فى إتجاه الغرب وكانت سرعة السفينة B 9 miles/hr فى إتجاه الشمال ، أوجد متى تـكون المسافة بينهما أقل ما يمكن .

١٨) قطـع جزء على شكل قطاع من قرص معدنى دائرى نصف قطره R ، ثم ثنى على شكل قمع . أوجد الزاوية المركزية للقطاع بحيث يـكون حجم القمـع أكبر ما يمكن .

١٩) سلك طوله L يراد قطعه إلى جزئين يشكل أحدهما على شكل مربـع والآخر على شكل دائرة . كيف يقسم هذا السلك بحيث يـكون مجموع مساحتى الشكلـين :

ا ـ أكبر ما يمكن ب ــ أقل ما يمكن

٢٠) يراد عمل خزان حجمه V على شكل أسطوانه دائريه قائمة مقفـلة من نهايتيها بنصفى كرة . فاذا كانت تكلفة وحدة المساحات من مادة نصفى الـكرة ضعف تكلفة وحدة المساحات من مادة الأسطوانة ، أوجد أبعاد الخزان .

## IV • رسم المنحنيات

ارسم المنحنيات الآتية مبيناً جميـع خواصها :

1) $y = x^4 - 2x + 10$

2) $y = x^3 \quad 6x^2 + 9x - 3$

3) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

4) $y = x^4 + 2x^3$

5) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$

6) $y = \frac{8}{x + 4}$

7) $y = \frac{6x}{x^2 + 1}$

8) $y = x^2 + \frac{1}{x}$

9) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$

10) $y = x + 2\sqrt{4 - x}$

11) $y = e^x + e^{-2x}$

12) $y = e^{1/x}$

13) $y = e^{-x^2}$

14) $y = e^{3x} \quad 3e^x + 1$

15) $y = 2 \ln x - x$

16) $y = x \quad \ln(x + 1)$

17) $y = \ln(x^2 + 1)$

18) $y = \sin 2x - 2 \sin x$

19) $y = xe^{-x}$

20) $y = x + \sin x$

21) $y = x \sin x$

22) $y = e^{-x} \sin x$

٧ . بعض النظريات الخاصة بالدوال القابلة للتفاضل :

١ ) حقق نظرية رول للدوال الآتية :

a) $y = x^2 - 3x + 2$ on the interval $[1, 2]$.

b) $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ on the interval $[1, 3]$

c) $y = \sin^2 x$ on the interval $[0, \pi]$.

d) $y = \cos^2 x$ on the interval $\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$.

٢) حقق نظرية لاجرانج للدالة $y = 2x - x^2$ فى الفترة $[0, 1]$

٣) عند أية نقطة يكون المماس للمنحنى $y = x^n$ موازيا للوتر من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(a, a^n)$ ؟

٤) عند أية نقطة يكون المماس للمنحنى $y = \ln x$ موازيا للوتر الذى يصل النقطتين $(e, 1)$ ، $(1, 0)$ ؟

٥) أوجد قيمة النهايات الآتية :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^n - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$