الباب الخامس

طرق التكامل

METHODS OF INTEGRATION

سنستعرض فى هذا الباب بعض طرق التكامل ، التى نلجأ إليها أحيانا لتحويل تكامل ما إلى إحدى الصور القياسية لنتمكن من حساب قيمة التكامل الأصلى .

٥ - ١ التكامل بتحويل المتغير (التعويض)

Integration by Change of Variable (Substitution)

نفرض أن المطلوب إيجاد التكامل $\int f(x)\,dx$ وقد تعذر تعيين الدالة المقابلة للدالة $f(x)$ مع علمنا أنها تتواجد . نحول الآن المتغير فى التعبير تحت علامة التكامل بوضع

$$x = \varphi(u) \qquad \cdots\ \cdots \quad (1)$$

حيث $\varphi(u)$ دالة متصلة لها مشتقة متصلة ودالة عكسية . فيكون $dx = \varphi'(u)\,du$. وسنثبت الآن العلاقة

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du \qquad \cdots \quad (2)$$

والمقصود هنا أننا بعد إجراء التكامل فى الطرف الأيمن نعبر عند u فى الناتج بدلالة (x) من العلاقة (1) .

لاثبات العلاقة (2) نفاضل كل من الطرفين بالنسبة إلى x فيكون تفاضل الطرف الأيسر هو

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right) = f(x)$$

نفاضل الطرف الأيمن فى (2) بالنسبة إلى x على إعتبار أنه دالة دالة ، حيث u هو المتغير الوسيط . نجد من (1) أن $\frac{dx}{du} = \varphi'(u)$ ومن قاعدة تفاضل الدالة العكسية ينتج أن

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\varphi'(u)} \cdot$$

لذلك يكون

$$\frac{d}{dx}\left(\int f[\varphi(u)]\, \varphi'(u)\, du\right) = \frac{d}{du}\left(\int f[\varphi(u)]\, \varphi'(u)\, du\right) . \frac{du}{dx}$$

$$= f[\varphi(u)]\, \varphi'(u) . \frac{1}{\varphi'(u)} = f[\varphi(u)] = f(x).$$

وبذلك تتساوى مشتقتا الطرفين فى (2) .

ملاحظات :

١) المفروض فى تطبيق القاعدة السابقة أن نختار الدالة $x = \varphi(u)$ بحيث يمكن تقييم التكامل غير المحدد فى الطرف الأيمن من (2) . إلا أنه من الناحية العملية يكون من الأوفق أحيانا أن تجرى عملية تحويل المتغير فى الصوره $u = \psi(x)$ بدلا من $x = \varphi(u)$ وتطبيق العلاقة (2) فى الاتجاه العكسى أى

$$\int f[\psi(x)]\,\psi'(x)\,dx = \int f(u)\,du \qquad \dots (3)$$

٢) كتطبيق للملاحظة الأولى نعتبر التكاملات التى على الصورة

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx.$$

بوضع $u = \psi(x)$ نجد أن $\psi'(x)\,dx = du$

$$\therefore \int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln[\psi(x)] + C\ .$$

من هذا نستخلص القاعدة التالية : إذا كان موضوع التكامل كسرا بسطه هو مشتقة المقام فإن التكامل يكون لوغاريتم المقام مضافا اليه ثابت اختيارى .

٣) لنعتبر التكاملات التى على الصورة

$$\int \frac{\psi'(x)}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx.$$

بوضع $u = \psi(x)$ ، $\psi'(x)\,dx = du$ نجد أن

$$\int \frac{\psi'(x)}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2\sqrt{u} + C$$

$$= 2\sqrt{\psi(x)} + C.$$

بذلك نحصل على القاعدة الآتية : إذا كان موضوع التكامل كسرا بسطه مشتقة المقدار تحت الجذر الموجود فى المقام فإن التكامل يصبح ضعف الجذر الموجود فى المقام مضافا اليه ثابت .

مثال (١)

أوجد قيمة $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$

الحل : Put $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx.$

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \int \sqrt{u} \, du = \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \tfrac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \tfrac{2}{3} (\sin x)^{3/2} + C$$

مثال (٢)

أوجد قيمة $\int \frac{x \, dx}{1 + x^2}$

الحل : فى هذا المثال يمكن جعل البسط تفاضل المقام بضرب الأول فى 2 وقسمة التكامل على 2 ، فينتج

$$\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{1 + x^2} = \tfrac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.$$

مثال (٣)

أوجد قيمة $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

الحل : $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$

Put $u = \frac{x}{a}$, $x = a u$, $dx = a \, du$.

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\ du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\ \tan^{-1} u + C$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

مثال (٤)

أوجد قيمة $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

الحل : $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$

Put $u = \frac{x}{a}$, $x = a\ u$, $dx = a\ du.$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\ du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$$

$$= \sin^{-1}\frac{x}{\varepsilon} + C$$

مثال (٥)

أوجد قيمة $\int \frac{(\ln x)^3\ dx}{x}$

الحل : Put $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$.

$$\therefore \int \frac{(\ln x)^3\ dx}{x} = \int u^3\ du = \tfrac{1}{4}\ u^4 + C = \tfrac{1}{4}\ (\ln x)^4 + C$$

مثال (٦)

أوجد قيمة $\int \frac{x\ dx}{1+x^4}$

الحل : Put $u = x^2$, $du = 2\,x\,dx$,

$$\int \frac{x\ dx}{1+x^4} = \tfrac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \tfrac{1}{2} \tan^{-1} u + C$$

$$= \tfrac{1}{2} \tan^{-1} x^2 + C$$

مثال (٧)

أوجد قيمة $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{2x^2+5}}$

الحل : بجعل البسط مشتقة المقدار تحت الجذر فى المقام ينتج

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{2x^2+5}} = \tfrac{1}{4} \int \frac{4\ x\ dx}{\sqrt{2x^2+5}} = \tfrac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2\,x^2+5} + C$$

$$= \tfrac{1}{2} \sqrt{2x^2+5} + G\ .$$

من ذلك نجد أن طريقة التعويض تعتبر من الطرق الأساسية فى حساب التكامل غير المحدد . وحتى إذا كنا نستعمل طريقة أخرى للتكامل نحتاج غالبا فى سياق الحل إلى إجراء تعويض مناسب . ويعتمد النجاح فى إجراء التكامل على الاختيار الموفق للتعويض الذى يبسط التكامل المعطى . وفى بعض الحالات البسيطة يمكن الاستغناء عن كتابة علاقة التعويض

$x = \varphi(u)$ بأن نكتب مباشرة التكامل المعطى على الصورة $\int f(u)\, du$ في
الطرف الأيمن من (3) ، كما يتضح ذلك من الامثلة الآتية :

مثال(٨)

أحسب قيمة $\int x^3 e^{x^4} dx$

الحل : $\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} \int e^{x^4} d(x^4)$

أى أننا كاملنا x^3 ووضعنا الناتج بعد d . نكامل فى الطرف الايمن بالنسبة
إلى x^4 باعتبارها وحدة واحدة فينتج

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} e^{x^4} + C.$$

وبذلك نوفر كتابة $u = x^4$ ، $du = 4x^3 dx$ ثم إجراء التكامل بالنسبة
إلى u وفى النهاية التعويض عن u بدلالة x .

مثال (٩)

أوجد قيمة $\int x \sqrt{x+1}\, dx$

الحل : للتخلص من الجذر التربيعى فى موضوع التكامل نضع

$$u^2 = x + 1 \quad , \quad x = u^2 - 1 \quad , \quad dx = 2\, u\, du,$$

$$\int x \sqrt{x+1}\, dx = \int (u^2 - 1)\, u \,.\, 2u\, du = 2 \int (u^4 - u^2)\, du$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3\right) + C$$

$$= \tfrac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \tfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$$

مثال(١٠)

احسب التكامل غير المحدد : $\int x \sin(5x^2)\, dx$.

الحل :
$$\int x \sin(5x^2)\, dx = \frac{1}{10}\int \sin(5x^2)\, d(5x^2)$$

$$= -\frac{1}{10}\cos(5x^2) + C.$$

مثال(١١)

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x\, d(\sin x)$$
$$= \tfrac{1}{4}\sin^4 x + C,$$

مثال (١٢)

$$\int \frac{dx}{x(4+\ln^2 x)} = \int \frac{1}{(4+\ln^2 x)}\,\frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{d(\ln x)}{(2^2+\ln^2 x)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left|\frac{\ln x}{2}\right| + C,$$

$$= \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left|\ln\sqrt{x}\right| + C,$$

٥ ـ ٢ التكامل بالتجزيء Integration by Parts

وجدنا فى بند (٢ ـ ١١) أن

$$d(u\,v) = u\,dv + v\,du$$

وتكامل الطرفين ينتج

$$u\,v = \int u\,dv + \int v\,du$$

or

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

وهذه العلاقة تسمى علاقة التكامل بالجزيء وهى تعتبر من أهم طرق التكامل وتستعمل هـــذه الطريقة بكثرة فى التكاملات التى يمكن كتابة عناصرها على صورة حاصل ضرب عاملين u ، dv بشرط أن تكون عملية إيجاد v من dv وحساب التكامل $\int v\,d$ أبسط من الحساب المباشر للتكامل الأصلى $\int u\,dv$.

وعلى سبيل المثال تطبق قاعدة التكامل بالتجزيء فى حساب تكاملات على الصورة

$$\int x^k \sin a\,x\,dx\,, \quad \int x^k \cos a\,x\,dx,$$

$$\int x^k e^{ax}dx\,, \quad \int x^k \ln x\,dx$$

وكذلك فى تقييم بعض التكاملات التى تحتوى على دوال مثلثية عكسية . وسنوضح فى الأمثلة التالية طريقة تطبيق هذه القاعدة .

مثال (١)

$$\int x \sin x \ dx = ?$$

Put $\quad u = x$, $dv = \sin x \ dx = -d(\cos x)$;

then $\quad du = dx$, $v = -\cos x$.

$$\therefore \int x \sin x \ dx = -\int x d \cos x = -x \cos x + \int \cos x \ dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C .$$

مثال (٢)

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int x d (\tan^{-1} x)$$

$$= x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \tfrac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \tfrac{1}{2} \ln (1+x^2) + C$$

مثال (٣)

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x \ dx$$

والتكامل فى الطرف الأيمن له صورة مشابهة للتكامل الأصلى خفضت فيه

قوة x بالوحدة . فاذا كررنا التكامل بالتجزىء على التكامـــل الجديد نصل فى النهاية إلى التكامل $\int e^x dx$ وهو من الصور القياسية :

$$\int x^2 e^x dx = x^2e^x - 5 \int x \, d \, e^x$$

$$= x^2e^x - 2 \left(xe^x - \int e^x dx \right)$$

$$= x^2 e^x - 2x \, e^x + 2e^x + C$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

وتسمى هذه الطريقة بطريقة الاختزال المتتالى successive reduction .

مثال (٤)

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x \, dx = \tfrac{1}{2} \int (x^2 + 7x - 5) \, d \sin 2x$$

$$= \tfrac{1}{2} (x^2 + 7x - 5) \sin 2x - \tfrac{1}{2} \int \sin 2x \, d \, (x^2 + 7x - 5)$$

$$= \tfrac{1}{2} (x^2 + 7x - 5) \sin 2x - \tfrac{1}{2} \int (2x + 7) \sin 2x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} (x^2 + 7x - 5) \sin 2x + \tfrac{1}{4} \int (2x + 7) \, d \cos 2x$$

$$= \tfrac{1}{2} (x^2 + 7x - 5) \sin 2x + \tfrac{1}{4} (2x + 7) \cos 2x$$

$$- \tfrac{1}{4} \int \cos 2x \, d \, (2x+7)$$

$$= \tfrac{1}{2}(x^2+7x-5)\sin 2x + \tfrac{1}{4}(2x+7)\cos 2x - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(x^2+7x-5)\sin 2x + \tfrac{1}{4}(2x+7)\cos 2x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + C$$

مثال (٥)

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} - \int x \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} + \int x\,d\sqrt{a^2-x^2}$$

$$= a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ونلاحظ هنا أن التكامل المطلوب ظهر مرة أخرى فى الطرف الأيمن . وبنقل هذا التكامل إلى الطرف الأيسر والقسمة على 2 نحصل على النتيجة المطلوبة :

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right] + C$$

مثـال (٦)

إحسب قيمة التكاملين . $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

الحـل : نستعمل قاعدة التكامل بالتجزىء فى تقييم التكامل الأيسر :

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}\int e^{ax}\,d\sin bx$$

$$= \frac{1}{b}\left| e^{ax}\sin bx - \int \sin bx\,d\,e^{ax}\right|$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

أى أن التكامل بالتجزىء لأحد التكاملين يعطى التكامل الآخر . بتكرار التكامل بالتجزىء ينتج

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\int e^{ax}\,d\cos bx$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^3}e^{ax}\cos bx - \frac{a}{b^2}\int \cos bx\,de^{ax}$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^3}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

وبذلك يظهر التكامل الأصلى مرة أخرى . بنقل هذا التكامل إلى الطرف الأيسر نجد أن

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx+\frac{a}{b}\cos bx\right)$$

وبالضرب فى مقلوب معامل التكامل أى $\frac{b^2}{a^2+b^2}$ نحصـــل على النتيجة

$$\therefore \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C.$$

بنفس الطريقة يمكن حساب التكامل الآخر :

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

مثال (٧)

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \, d \ln x$$

$$= x \ln x - \int x . \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$= x (\ln x - 1) + C.$$

مثال (٨)

$$\int x^m \ln x \, dx = ? \quad m \neq -1$$

$$\int x^m \ln x \, dx = \frac{1}{m+1} \int \ln x \, dx^{m+1}$$

$$= \frac{1}{m+1} \left[x^{m+1} \ln x - \int x^{m+1} \, d \ln x \right]$$

$$= \frac{1}{m+1} \left[x^{m+1} \ln x - \int x^{m+1} \frac{1}{x} \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{m+1} \left[x^{m+1} \ln x - \frac{x^{m+1}}{m+1} \right] + C$$

$$= \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} \left[(m+1) \ln x - 1 \right] + C.$$

٥ ـ ٣ تكامل الدوال الثلاثية

Integration of Trigonometric Functions

أولا : الدوال الثلثية الاساسية

1) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

2) $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

3) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$ (البسط تفاضل المقام)

$$= -\ln(\cos x) + C$$

$$= \ln(\sec x) + C$$

4) $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$ (البسط تفاضل المقام)

$$= \ln(\sin x) + C$$

5) $\int \sec x \, dx = \int \sec x \frac{\tan x + \sec x}{\sec x + \tan x} \, dx$

$$= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \, dx$$ (البسط تفاضل المقام)

$$= \ln(\sec x + \tan x) + C$$

6) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \int \operatorname{cosec} x \frac{-\cot x + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} \, dx$

$$= \int \frac{-\operatorname{cosec} x \cot x + \operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} \, dx$$

(البسط تفاضل المقام)

$$= \ln (\operatorname{cosec} x - \cot x) + C$$

ثانيا : مربعات الدوال المثلثية الاساسية

1) $\int \sin^2 x d x = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x)\, dx$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

2) $\int \cos^2 x d x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

3) $\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^3 x - 1)\, dx = \tan x - x + C$

4) $\int \cot^2 x \, dx = \int (\operatorname{cosec}^9 x - 1)\, dx = - \cot x - x + C$

5) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

6) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = - \cot x + C$

ثالثا : القوى الاعلى للدوال المثلثية الاساسية

1) $\int \sin^n x \, dx$ and $\int \cos^n x \, dx$, n positive odd intger.

Ex. $\int \sin^8 x \, dx = \int \sin^3 x \, . \sin x \, dx$

$$= - \int (1 - \cos^2 x)\, d (\cos x) = \int (\cos^{\circ} - 1\, x) d (\cos x)$$

$$= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

2) $\int \sin^n x d x$ and $\int \cos^n x \, dx$, n positive even integer :

لتخفيض قوى الدوال تستعمل المتطابقتان :

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} (1 - \cos 2x) \ , \ \cos^2 x = \tfrac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

Ex. $\int \cos^4 x \, dx$.

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = [\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)]^2 = \tfrac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \tfrac{1}{4} [1 + 2 \cos 2x + \tfrac{1}{2} (1 + \cos 4x)]$$

$$= \frac{3}{8} + \tfrac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4 x$$

$$\therefore \int \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{3}{8} + \tfrac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4 x \right) dx$$

$$= \frac{3}{3} x + \tfrac{1}{4} \sin 2 x + \frac{1}{32} \sin 4 x + C$$

3) $\int \tan^n x \, dx$ and $\int \cot^n x \, dx$, n any positive integer :

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \quad , \quad \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$ تستعمل المتطابقتان

$$\text{Ex. } \int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x . \tan^2 x \, dx$$

$$= \int \tan x^2 (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \ dx - \int \tan^2 x \ dx$$

$$= \int \tan^2 x \ d(\tan x) - \int (\sec^2 x - 1) \ dx$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$$

والطريقة العامة لهذا التكامل هو استنتاج صيغة اختزال متتالى انخفيض القوة n بمقدار 2 فى كل مرة كما يلى :

$$\int \tan^n x \ dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \ dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x \ dx - \int \tan^{n-2} x \ dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - \int \tan^{n-2} x \ dx$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \ dx$$

وقوة التكامل فى الطرف الأيمن تنقص 2 عن تلك فى الطرف الايسر . وبتكرار تطبيق هذه العلاقة نصل فى النهاية إلى أحد التكاملين :

$$\int \tan^0 x \ bx = \int dx = x + C \quad , \quad n \text{ even;}$$

$$\int \tan^1 x \ dx = \int \tan x \ dx = \ln(\sec x) + C, n \text{ odd}$$

وبالمثل بالنسبة للتكامل $\int \cot^n x \ dx$.

4) $\int \sec^n x dx$ and $\int \operatorname{cosec}^n x dx$, n positive even integer :

Put $n = 2m$:

$$\int \sec^{2m} x\, dx = \int \sec^{2m-2} x \sec^2 x\, dx = \int (\sec^2 x)^{m-1} \sec x dx$$

$$= \int (1+\tan^2 x)^{m-1} d \tan x$$

$$= \int (1+u^2)^{m-1} du \quad (u=\tan x)$$

ثم نفك موضوع التكامل بنظرية ذات الحدين ونكامل كثيرة الحدود الناتجة حداً حداً ونعوض $u = \tan x$ فى الناتج .

رابعاً : حواصل ضرب الدوال المثلثية

1) $\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \sin mx \cos nx\, dx$,

$$\int \cos m x \cos n x\, dx :$$

لتقييم هذه التكاملات ($m \neq n$) نحول حاصل الضرب إلى مجموع باستخدام إحدى المتطابقات الآتية :

$$\sin mx \sin nx = \tfrac{1}{2} [\cos (m-n) x - \cos (m+n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \tfrac{1}{2} [\sin (m-n) x + \sin (m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2} [\cos (m-n) x + \cos (m+n)x],$$

Ex. $\int \sin 3x \cos 5x\, dx = \tfrac{1}{2} \int [\sin (-2x) + \sin 8x]\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

(2) $\int \sin^m x \cos^n x \, dx;$

هناك حالتان :

١) أحد العددين m أو n أو كلاهما صحيح فردى موجب :

نفرض أن m فردى . فى هذه الحالة نفصل $\sin x \, dx$ ونحـــول القوة الزوجية للجيب المتبقية إلى قوى جيوب تمام باستخدام المتطابقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ أما إذا كان n فردى نفصل $\cos x \, dx$ ونحول القوة الزوجية لجيب التمام المتبقية إلى قوى جيوب باستخدام نفس المتطابقة السابقة .

Ex. 1. $\int \sin^3 x \cos^{-5} x \, dx = \int \sin^2 x \cos^{-5} x \sin x \, dx$

$$= -\int (1 - \cos^2 x) \cos^{-5} x \, d(\cos x)$$

$$= -\int (\cos^{-5} x - \cos^{-3} x)\, d(\cos x)$$

$$= \frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{2 \cos^2 x} + C$$

$$= \frac{1}{4} \sec^4 x - \frac{1}{2} \sec^2 x + C$$

Ex. 2 $\int \sin^{\frac{2}{3}} x \cos^3 x \, dx = \int \sin^{\frac{2}{3}} x \cos^2 x \cdot \cos x \, dx$

$$= \int \sin^{\frac{2}{3}} x \ (1 - \sin^2 x) \ d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^{\frac{2}{3}} x - \sin^{8/3} x) \ d(\sin x)$$

$$= \frac{3}{5} \sin^{5/3} x - \frac{3}{11} \sin^{11/3} x + C$$

ب) كل من العددين m ، n صحيح زوجى موجب :

نستخدم فى هذه الحالة متطـابقات التحويل إلى ضعف الزاوية بهـــدف تخفيض القوة .

$$\text{Ex. } \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \tfrac{1}{4} \int \sin^2 2x \ dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \ dx$$

$$= \frac{1}{8} \left(x - \tfrac{1}{4} \sin 4x\right) + C$$

٥ – ٤ تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

Integration of Rational Functions Using Partial Fractions.

وجدنا فيما سبق (بند ١ - ١١) أن كل دالة نسبية يمكن تمثيلها على صورة كسر جبرى ، أى على صورة نسبة بين كثيرتى حدود :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} \cdots + a_m}{p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n}$$

وسنفترض (بدون تقييد الحالة العامة للطريقة) أن كثيرتى الحدود ليس لها جذور مشتركة . فإذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام سمى الكسر صحيحاً proper ، وفيما عدا ذلك يكون الكسر غير صحيح improper .

وإذا كان الكسر غير صحيح أمكن بواسطة قسمة البسط على المقام أن تمثل الكسر على صورة مجموع كثيرة حدود وكسر صحيح :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

حيث $M(x)$ هى كثيرة حدود تمثل خارج القسمة ، $R(x)$ كثيرة حدود من درجة أقل من درجة المقام $Q(x)$ وتمثل الباقى . وعلى ذلك يكون الكسر $\frac{R(x)}{Q(x)}$ صحيحاً . فمثلا

$$\frac{x^4 - 3}{x^2+2x+1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x+6}{x^2+2x+1}$$

حيث أن تكامل كثيرات الحدود لا يمثل أية صعوبة فان العقبة الاساسية فى تكامل الدوال النسبة تتركز فى تكامل الكسور الجبرية الصحيحة .

تعريف تسمى الكسور الجبرية الصحيحة الآتية كسوراً جزئية من الانواع I , II , III , IV على الترتيب .

1. $\dfrac{A}{x - a}$

11. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ (k is a positive integer $\leqslant 2$),

$$\text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad (p^2 < 4q)$$

$$\text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \quad (k \text{ is a positive integer} \geqslant 2 : p^2 < 4q)$$

تكامل الكسور الجزئية من الأنواع I , II , III لا يمثل فى الحقيقة أية صعوبة .

لذلك سنحسب تكاملاتها بدون إبداء أية ملاحظات :

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a}\, dx = A \ln(x-a)+C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A\int (x-a)^{-k}\, dx$$

$$= A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

$$= \frac{A}{(-k+1)(x-o)^{k-1}} + C.$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+p) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{A}{2} \ln (x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \tan^{-1} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

أما تكامل الكسور الجزئية من النوع IV فيحتاج إلى عمليات حسابية أكثر نبينها فيما يلى :

$$\text{IV.} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^k} dx$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} \cdot$$

لحساب التكامل الأيسر نجرى التعويض $x^2 + px + q = u$ ، $(2x + p)\, dx = du$:

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{du}{u^k} = \int u^{-k} du = \frac{u^{-k+1}}{1 - k} + C$$

$$= \frac{1}{(1 - k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + C.$$

أما التكامل الأيمن ، الذى نرمز له بالرمز I_k ، فنكتبه على الصورة :

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k}$$

$$= \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k}$$

ذلك على فرض أن

$$x + \frac{p}{2} = t \ , \ dx = dt \ , \ q - \frac{p^2}{4} = m^2 ,$$

ونكمل كالآتى :

$$\therefore \quad I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt$$

$$= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2 \, dt}{(t^2+m^2)^k} \cdot \qquad (1)$$

ثم نحول التكامل الأيمن بالطريقة الآتية :

$$\int \frac{t^2 \, dt}{(t^2 + m^2)^k} = \int \frac{t \cdot t \, dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k}$$

$$= - \frac{1}{2(k-1)} \int t \, d\left(\frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}}\right)$$

ويعطى التكامل بالتجزىء

$$\int \frac{t^2 \, dt}{(t^2+ m^2)^k} = - \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right.$$

$$\left. - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right] \cdot$$

بتعويض هذا التعبير فى (1) ينتج

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 +m^2)^{k-1}} \quad +$$

$$+\frac{1}{2m^2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]$$

$$=\frac{t}{2m^2(k-1)\,(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2\,(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\,.$$

وفى الطرف الأيمن نجد تكاملا له نفس صورة I_k إلا أن قوة المقام فى موضوعه أقل بالوحدة أى $(k-1)$. وعلى هذا فقد عبرنا عن I_k بدلالة I_{k-1} ، أى أن العلاقة الأخيرة هى صيغة اختزال متتالى للتكامل I_k . فإذا استمرت عملية الاختزال نصل فى النهاية إلى التكامل المألوف

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\tan^{-1}\frac{t}{m}+C\,.$$

وبالتعويض عن t ، m بقيمهما المناظرة نحصل على تعبير يعطى التكامل IV بدلالة x والأعداد A ، B ، p ، q

مثال

$$\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+3)}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

ثم نجرى التعويض $t = x+1$ فى التكامل الأخير

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2}=\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{(t^2+2) - t^2}{(t^2+2)^2}\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \tfrac{1}{2}\int \frac{t^2\, dt}{(t^2+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}\int \frac{t^2\, dt}{(t^2+2)^2} \cdot$$

اعتبر التكامل الأخير

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{t\, d\,(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\tfrac{1}{2}\int t\, d\left(\frac{1}{t^2+2}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,\frac{t}{t^2+2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+2}\, dt$$

$$= -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot$$

وعلى ذلك يكون

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \cdot$$

وبالتعويض فى التكامل الأصلى نحصل على النتيجة المطلوبة :

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} \tan^{-1} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

وسنربط الآن بين النتائج السابقة وإيجاد تكامل دوال نسبية على الصورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث كل من البسط والمقام كثير حدود فى x .

نبدأ أولا بتحليل الكسر موضوع التكامل إلى كسورة الجزئية ، ثم نكامل كل كسر جزئى نحصل عليه فى التحليل حسب نوعه تبعاً للقواعد السابقة ، وفى النهاية نجمع تكاملات الكسور الجزئية فنحصل على التكامل المطلوب .

مثال (١)

أوجد قيمة :

$$I = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$$

الحل : نحلل الكسر موضوع التكامل إلى كسوره الجزئية ،

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} ,$$

$$x = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1).$$

$$x = 1 : 1 = 2C \ , \ C = \tfrac{1}{2} ,$$

$$x = 0 : 0 = - B + C \ , \ B = C = \tfrac{1}{2} ,$$

$$\text{coefficient of } \ x^2 : 0 = A + C, \ A = - C = - \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = - \tfrac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{x-1}$$

$$I = - \tfrac{1}{2}\int \frac{x - 1}{x^2 + 1}\, dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= - \tfrac{1}{4}\int \frac{2x\, dx}{x^2 + 1} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= - \tfrac{1}{4} \ln (x^2 + 1) + \tfrac{1}{2} \tan^{-1} x + \tfrac{1}{2} \ln (x - 1) + C,$$

مثال (٢)

المطلوب إيجاد قيمة التكامل

$$I = \int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2 (x + 1)}\, dx$$

الحل :

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x+3)^2 (x + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

$$+ \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1}$$

$$x^4+4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 = (Ax+B)(x + 1) +$$

$$+ (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1)$$
$$+ E(x^2 + 2x + 3)^2.$$

ومن هذه المتكافئة نجد أن

$$A = 1 \;,\; B = -1 \;,\; C = 0 \;,\; D = 0 \;,\; E = 1,$$

وعلى ذلك يكون التحليل المطلوب هو

$$\frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{1}{x + 1} .$$

$$\therefore \; I = \underset{(IV)}{\int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2}\, dx} + \underset{(1)}{\int \frac{dx}{x + 1}}$$

$$= -\frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \tan^{-1} \frac{x + 1}{\sqrt{2}}$$
$$+ \ln (x + 1) + C.$$

والتكامل (IV) سبق لنا حسابه كمثال فى هذا البند .

٥ ـ ٥ التكامل بالتعويض المثلثى

Integration by Trigonometric Substitution

نتناول فى هذا البند التكاملات

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \;,\; \int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx, \; \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$$

ونظيراتها

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} .$$

تحسب هذه التكاملات باستخدام تعويض مثلثى مناسب بهدف التخلص من الجذر التربيعى . وسنبين فيما يلى التعويض المناسب لكل نوع من انواع الجذور الثلاثة السابقة.

$$1)\ \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} .$$

$$\text{Put} \quad x = a \sin\theta \quad , \quad dx = a\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta .$$

$$\therefore \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a\cos\theta \,.\, a\cos\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \int \cos^2\theta\, d\theta$$

والتكامل الأخير من التكاملات القياسية التى تناولناها فى بند (٥ — ٣) تحت ثانياً وهو يعطى

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \sin\theta\cos\theta\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\,\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

أما التكامل الآخر فيعطى

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C$$

$$= \sin^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

II) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$:

Put $x = a \tan\theta$, $dx = a \sec^2\theta\, d\theta$.

$$\sqrt{a^2+x^2} = a \sec\theta$$

$$\therefore \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int a \sec a\,\theta .\ \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \int \sec^3\theta\, d\theta$$

والتكامل فى الطرف الإيمن يحسب كالآتى

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \int \sec\theta .\ \sec^2\theta\, d\theta = \int \sec\theta\, d(\tan\theta)$$

$$= \sec\theta \tan\theta - \int \tan\theta\, d(\sec\theta)$$

$$= \sec\theta \tan\theta - \int \sec\theta \tan^2\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta \tan\theta - \int \sec\theta (\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= \sec\theta \tan\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta \tan\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta + \ln(\sec\theta + \tan\theta) + A$$

بنقل $\int \sec^3\theta\, d\theta$ من الطرف الايمن إلى الطرف الأيسر وقسمة الناتج

على 2 ينتج

$$\int \sec^3\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \sec\theta \tan\theta + \frac{1}{2} \ln(\sec\theta + \tan\theta) + B$$

وبالتعويض فى التكامل الاصلى ينتج :

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \sec\theta \tan\theta + \frac{a^2}{2} \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} \cdot \frac{x}{a} - \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C'.$$

أما التكامل الآخر فيعطى

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a \sec^2\theta \, d\theta}{a \sec\theta} = \int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \ln(\sec\theta + \tan\theta) + A$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + A$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

III) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$:

Put $x = a \sec\theta$, $dx = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan\theta$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \int a \tan\theta . a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

$$= \varepsilon^2 \int \sec\theta \tan^2\theta \, d\theta$$

$$a^2 = \int \sec\theta\,(\sec^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$a^2 = \int \sec^3\theta\,d\theta - a^2 \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{a^2}{2}\ln(\sec\theta + \tan\theta) - a^2\ln(\sec\theta + \tan\theta) + A$$

$$= \frac{a^2}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{a^2}{2}\ln(\sec\theta + \tan\theta) + A$$

$$= \frac{a^2}{2}\,\frac{x}{a}\,\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} - \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + A$$

$$= \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$$

والتكامل الآخر :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{a\tan\theta} = \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \ln(\sec\theta + \tan\theta) + A = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + A$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$$

ويمكن تلخيص الحالتين (II) , (III) كالآتي :

$$\therefore \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\,x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

٥ ـ ٦ التكاملات التي تحتوي على $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Integrals Involving $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

أى كثير حدود من الدرجة الثانية $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$

يمكن اختزاله إلى الصورة $a(u^2 + B)$ باكمال المربع كما يلى :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a^2}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

بوضع $B = \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}$, $u = x + \dfrac{b}{2a}$ نصل إلى الصورة

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(u^2 + B).$$

فإذا إحتوى موضوع التكامل على الجذر التربيعى للدالة $f(x)$ وجب إستثناء الحالة التى تكون فيها $f(x)$ سالبة . فى حالة $a < 0$ ، $B > 0$ يكون الجذر التربيعى للدالة $f(x)$ تخيلياً . لذلك نترك هذه الحالة ونعتبر

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(u^2 + B)}$$

فى الحالة : ا) a موجب ، ب) كل a , B سالب .

فى الحالة الأولى يكون

$$\sqrt{a(u^2 + B)} = \sqrt{a}\,\sqrt{u^2 + B}$$

وتؤول المسألة إلى إعتبار حالة

$$\sqrt{u^2+B} = \begin{cases} \sqrt{u^2+A^2} \;, & B>0 \;\ldots\;\ldots\;\ldots \quad (1) \\ \sqrt{u^2-A^2} \;, & B<0 \;\ldots\;\ldots\;\ldots \quad (2) \end{cases}$$

أما فى الحالة الثانية عندما يكون كل من a , B سالباً فإن الجـــذر التربيعى

$$\sqrt{a(u^2+B)} = \sqrt{-a}\;\sqrt{-B-u^2} \quad , -a>0 \;, -B>0$$

أى يكون على الصورة

$$\sqrt{A^2-u^2} \qquad\qquad \ldots\;.\;\ldots \quad (3)$$

وقد سبق لنا فى بند (٥ — ٥) أن أوضحنا التعويض المثلثى المناسب فى كل حالة من الحالات (1) ، (2) ، (3) للتخلص من الجذر التربيعى .

مثـال (١)

أوجد قيمة $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

الحل :

$$2x-x^2 = -(x^2-2x) = -(x^2-2x+1)+1$$
$$= 1-(x-1)^2$$

لذلك نضع $u = x-1 \;,\; du = dx$ فيؤول التكامل إلى

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}u + C$$
$$= \sin^{-1}(x-1) + C.$$

مثال (٢)

احسب قيمة $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}}$

$$2x^2 - 6x + 4 = 2\,(x^2 - 3x) + 4 = 2(x^2-3x + \frac{9}{4})$$

$$+ 4 - \frac{9}{2} = 2\left[(x - \frac{2}{3})^2 - \frac{1}{4}\right] \cdot$$

باجراء التعديل $u = x - {}^3/_2$ ، $x = u + {}^3/_2$ ، $dx = du$

يؤول التكامل إلى

$$\int \frac{(x + 1)\,dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}} = \int \frac{(u + {}^5/_2)\,du}{\sqrt{2\,(u^2 - \frac{1}{4})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2 - \frac{1}{4}}}}_{(1)} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{1}{4}}}}_{(2)}$$

والتكامل (1) يمكن إجراؤه بجعل البسط مشتقة ماتحت جذر المقام ويكون التكامل مساوياً ضعف جذر المقام . أما التكامل (2) فقد سبق حسابة فى نهاية البند السابق . إذن

$$\int \frac{(x + 1)\,dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}}$$

$$+ \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln (u + \sqrt{u^2 - \frac{1}{4}}) + C$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{2}}$$

$$+ \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln (x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}) + C$$

٥ ـ ٧ التكامل بالتعويض الزائدى

Integration by Hyperbolic Substitution

وجدنا فى البند السابق أن التكاملات التى تحتوى على جذور تربيعية لكثيرات حدود من الدرجة الثانية على الصورة $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ يمكن إرجاعها إلى تكاملات تحتوى على أحد الجذور

$$\sqrt{u^2 - A^2} \text{ ، } \sqrt{u^2 + A^2} \text{ ، } \sqrt{A^2 - u^2}$$

وذلك بإكمال المربع تحت الجذور . وفى بند (٥ — ٥) أمكن التخلص من الجذر التربيعى بإجراء تعويض مثلثى مناسب وهو على الترتيب

$$u = A \sec \theta \text{ ، } u = A \tan \theta \text{ ، } u = A \sin \theta$$

واستخدمنا فى ذلك المتطابقتين المثلثيتين

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{ ، } \cos^2 + \sin^2 \theta = 1$$

إلا أنه يمكن أيضا التخلص من الجذور السابقة باستخدام تعويض زائدى مناسب لكل حالة وهو على الترتيب

$$u = A \cosh t \text{ ، } u = A \sinh t \text{ ، } u = A \tanh t$$

ثم الاستعانة بالمتطابقات الزائدية

$$1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t \text{ ، } \operatorname{sech}^2 t + \tanh^2 t = 1.$$

لحساب الجذر التربيعى .

مثـــال

أوجد قيمة $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$ باستخدام تعويض زائـــدى مناسب .

الحــل

$$x^2 - 2x - 8 = (x^2-2x+1) - 9 = (x-1)^2-9$$

نضع أولا $u = x-1$, $dx = du$ فيؤول التكامــل إلى

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-9}}$$

ثم نجــرى التعويض $u=3 \cosh t$, $du = 3 \sinh t \, dt$,

$: \sqrt{u^2-9} = 3 \sinh t$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}} = \int \frac{3 \sinh t \, dt}{3 \sinh t} = \int dt = t+C$$

$$= \cosh^{-1} \frac{u}{3} + C = \cosh^{-1} \frac{x-1}{3} + C$$

٥ ـ ٨ تحويل المتغير فى التكامل المحدد

Change of Variable in the Definite Integral

نظرية : معطى التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ حيث $f(x)$ دالـة مستمرة فى الفترة $[a,b]$. نعرف المتغير الجديد t بالعلاقة $x = \varphi(t)$. فإذا كان :

(1 $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

(2 $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ مستمرة فى الفترة من $[a,b]$,

(3 $f[\varphi(t)]$ معرفة ومستمرة فى الفترة $[\alpha,\beta]$,

يــكون

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \quad \cdots\cdots (1)$$

الاثبات : إذا كانت $F(x)$ هى دالة مقابلة للدالة $f(x)$ ، فإن

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$$

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C. \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (3)$$

ويمكن التحقق من العلاقة الأخيرة بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى t .

من (2) ينتج

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

ومن (3) نحصل على

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F\Big[\varphi(t)\Big]_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

$$= F(b) - F(a)$$

وحيث أن الأطراف اليمنى فى العلاقتين الأخيرتين متساوية ، تكون أيضا الأطراف اليسرى متساوية وبذلك تثبت النظرية .

ملاحظة : فى حساب التكامل المحدد من الصيغة (1) لانعود إلى المتغير الأصلى وإنما نحسب التكامل المحدد فى الطرف الأيمن فنحصل على عدد معين يساوى تماما قيمة التكامل الأيسر .

مثال (١)

أحسب قيمة التكامل $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

الحل : بتحويل متغير التكامل نضع

$$x = a \sin t, \; dx = a \cos t \, dt, \; \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t,$$

$$x = 0 \text{ for } t = 0, \quad x = a \text{ for } t = \frac{\pi}{2} .$$

$$\therefore \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t . \, a \cos t \, dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2} \Big[t + \tfrac{1}{2} \sin 2t \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{4} \pi a^2$$

مثال (٢)

أحسب قيمة $I = \int_1^2 (x+1)\,(x^2 + 2x + 2)^{\frac{1}{3}} \, dx$

الحل : ضع

$$u = x^2 + 2x + 2, \quad du = 2\,(x+1)\, dx$$

$$x = 1 \text{ for } u = 5, \quad x = 2 \text{ for } u = 10.$$

$$\therefore \; I = \int_5^{10} u^{\frac{1}{3}} \tfrac{1}{2}\, du = \frac{3}{8} \Big[u^{4/3} \Big]_5^{10} = \frac{3}{8} \Big[10^{4/3} - 5^{4/3} \Big].$$

٥ ـ ٩ خواص أخرى للتكامل المحدد

Other Properties of Definite Integral

أولا : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $[0,b]$ فان

$$\int_0^b f(x)\, dx = \int_0^b f(b - x)\, dx .$$

الاثبات : نحول المتغير x إلى المتغير t بالتعريف

$$t = b - x \quad , \quad dt = - dx;$$

$$x = o \ \text{for} \ t = b \quad , \quad x = b \ \text{for} \ t = o$$

$$\therefore \int_{o}^{b} f(b-x)\,dx = \int_{b}^{o} f(t)(-dt) = -\int_{b}^{o} f(t)\,dt$$

$$= \int_{o}^{b} f(t)\,dt = \int_{o}^{b} f(x)\,dx$$

مثال

$$\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

أى أن المســـاحة تحت منحنى دالة جيب التمام فى الفـترة $\left[o , \frac{\pi}{2} \right]$ تساوى المساحة تحت منحنى دالة الجيب فى نفس الفترة . وهذا واضح من شكل هذه المساحات (أنظر شكلى ٤ — ١ ، ٤ — ٢) .

ثانيا : التكامل المحدد للدوال الزوجية والفرديه

نفرض أن f (x) دالة متصلة فى الفترة [— b ,b] .

فإذا كانت f (x) دالة زوجية فان :

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_{o}^{b} f(x)\,dx, \qquad \dots \dots (1)$$

أما إذا كانت $f(x)$ دالة فردية فان :

$$\int_{-b}^{b} f(x)\, dx = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

الاثبات : باجراء التحويل $x = -u$ ، $dx = -du$ نجد أن

$$\int_{-b}^{0} f(x)\, dx = \int_{b}^{0} f(-u)(-1)\, du = \int_{0}^{b} f(-u)\, du$$

$$= \int_{0}^{b} f(-x)\, dx .$$

$$\therefore \int_{-b}^{b} f(x)\, dx = \int_{-b}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{b} f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{b} f(-x)\, dx + \int_{0}^{b} f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{b} [f(x) + f(-x)]\, dx,$$

فاذا كانت $f(x)$ زوجية يكون $f(-x) = f(x)$ وبالتالى نحصل على (1) . أما إذا كانت $f(x)$ فردية فان $f(-x) = -f(x)$ ونحصل على (2) .

مثال

أحسب قيمة $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 + \sin x}{1 + x^2}\, dx$

الحل : موضوع التكامل ليس دالة فردية أو زوجية . إلا أنه يمكن كتابة التكامل كمجموع تكاملين :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx.$$

موضوع التكامل الأيمن دالة فردية نظراً لأن

$$\frac{\sin(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{\sin x}{1+x^2}$$

لذلك ينعدم التكامل الأيمن . أما التكامل الأيسر فموضوعه دالة زوجية ، إذن

$$I = 2\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1} \left\{ 1 - \frac{1}{1+x^2} \right\} dx$$

$$= 2\Big[\, x - \tan^{-1} x \Big]_{0}^{1} = 2 - \frac{\pi}{2},$$

ملاحظة : إذا أعتبرنا الخواص البيانية لمنحنيات الدوال الزوجية والفردية فانه يكون للخاصيه السابقة المعنى الهندسى الآتى : إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فان منحنيها يكون متماثلا بالنسبة للمحور الرأسى وعلى ذلك فان تكاملها المحدد على الفترة $[-b, b]$ ينقسم إلى جزئين متكافئين فى الفترتين $[-b,o]$ ، $[o,b]$ نظراً لتساوى المساحتين. وعلى ذلك يكون التكامل على الفترة $[-b,b]$ مساويا ضعف التكامل على الفترة $[o,b]$. أما إذا كانت $f(x)$ دالة فردية فان منحنيها يكون متماثلا بالنسبة إلى نقطه الأصل . وعلى ذلك فإن المساحه المحصورة بين المنحنى ومحور x والمستقيمين $x = -b$ ، $x = b$ تنقسم إلى قسمين متساويين

فإذا أعتبرنا المساحات فوق محور x موجبة وتحته سالبة فان المجموع الجبرى المساحات يساوى صفراً . وسوف نبحث قاعدة الاشارات هذه بالتفصيل عند الحديث عن حساب المساحة تحت المنحنيات باستخدام التكامل المحدد .

٥ ـ ١٠ تقريب التكامل المحدد

Approximating the Definite Integral

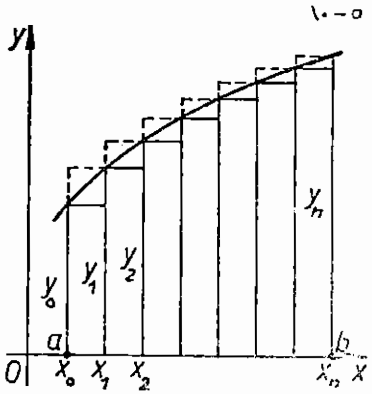
ذكرنا فيما سبق أنه يتعذر فى بعض الأحوال تقييم التكامل بالطرق التى أوردناها من قبل ، لذلك نلجأ أحيانا لطرق تقريبية فى حساب التكامل المحدد . وجميع هذه الطرق تعتمد على مفهوم التكامل كنهاية مجموع .

أولا : قاعدة المستطيلات Rectangular Rule

نفرض أن $y = f(x)$ داله متصلة فى الفترة $[a,b]$. والمطلوب حساب التكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx$. قسم الفترة $[a,b]$ بالنقط $(x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ إلى n قسم من الاقسام المتساوية طول كل منها $h = (b - a)/n$ ونرمز بالرموز $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ إلى قيم الدالة $f(x)$ عند النقط $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ كما فى شكل (٥ - ١) ، أى أن $y_i = f(x_i)$ ؛ $i = 0, 1, \ldots, n$. نكون المجموعين :

$$y_0 h + y_1 h + \ldots + y_{n-1} h,$$

$$y_1 h + y_2 h + \ldots + y_n h,$$



شكل (٥ — ١)

كل من هذين المجموعين يمثل مجموع تـكامل للدالة f (x) على الفترة [a,b] وعلى هذا يمثل تقريباً للتـكامل :

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \dots (1)$$

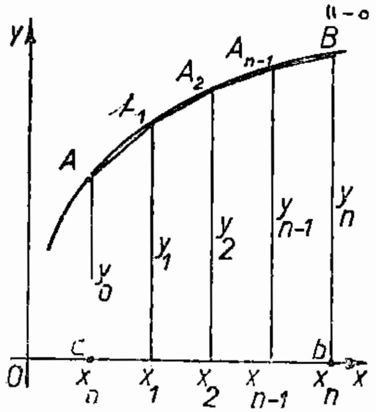
$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \frac{b-a}{n} (y_1 + y + y_3 + \dots + y_n) \dots (2)$$

ويسمى كل من هذين التقريبين قاعدة المستطيلات . وواضـــح من شكل (٥ - ١) أنه إذا كانت f(x) دالة موجبة ومتزايدة فإن العلاقة (1) تمثل مجموع مساحات المستطيلات الواقعة تحت المنحنى $y = f(x)$ ، فى حين أن العـلاقة (2) تمثل مجموع مساحات المستطيلات الخارجية .

والجدير بالملاحظة أن الخطأ فى حساب التـكامل بقاعده المستطيلات يقل كلما زاد عدد الأقسام n ، أى كلما قل طول القسم $h = (b - a) / n$

ثانيا : قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule

من الواضح أننا نحصل على قيمة أدق للتكامل المحدد إذا استبدلنا المنحنى $y = f(x)$ بمضلع مفتوح تقع أركانه على المنحنى كما فى شكل (٥ - ٢) بدلا من الخط السلمى المستخدم فى قاعدة المستطيلات . فتكون مساحة المضلع a A B b



شكل (٥ ــ ٢)

تساوى مجموع مساحات أشباه المنحرف المحددة من أعلى بالأوتار $(AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B)$ وحيث أن مساحات أشباه المنحرف هى على الترتيب

$$\tfrac{1}{2}(y_0 + y_1)h, \; \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)h, \ldots, \tfrac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx \simeq \tfrac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)h$$

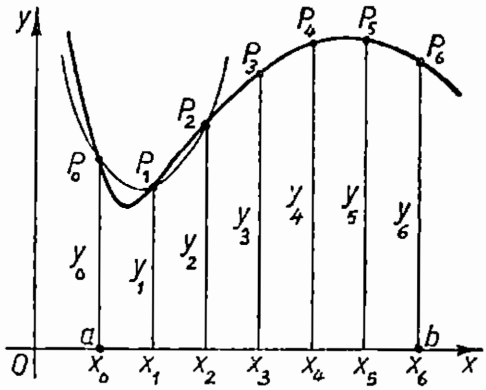
$$+ \ldots + \tfrac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{n}\left[\tfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right] \quad (3)$$

وتسمى هذه الصيغة قاعدة شبه المنحرف . وفى هذه القاعدة يكون العدد n إختيارياً وكلما زاد n صغرت الخطوة $h = (b - a)/n$ وازدادت الدقة فى التقريب بالعلاقة (3) .

ثالثا : قاعدة سمسون Simpson's Rule

نقسم الفترة $[a, b]$ إلى عدد **زوجى** من الأقسام $n = 2m$. ثم نستبدل المساحة الواقعة تحت المنحنى فى أول فترتين $[x_0, x_1]$ ، $[x_1, x_2]$ بالمساحة تحت القطع المكافىء المار بالنقط الثلاث $P_0\ (x_0, y_0)$ ، $P_1\ (x_1, y_1)$ ، $P_2\ (x_2, y_2)$ ومحوره يوازى محور y كما فى شكل (٥ - ٣) .



شكل (٥ ـ ٣)

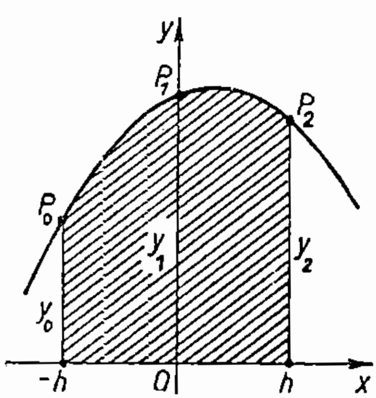
نفرض معادلة القطع المكافىء الذى محوره رأسى على الصورة

$$y = Ax^2 + Bx + C. \qquad \dots \quad \dots (4)$$

ونعين المعاملات C, B, A من شرط مرور القطع المكافىء بالثلاث نقط المذكوره . ثم نكرر هذه العملية لكل فترتين متتاليتين من فترات التقسيم . فيعطى مجموع المساحات تحت القطاعات المكافئة تقريباً للتكامل . وفيما يلى نحسب

المساحة تحت قطع مكافىء منها .

حيث أن المساحة تحت القطع المكافىء لاتتأثر بنقل المحور الرأسى موازياً لنفسه مع الاحتفاظ بوضع المحور الأفقى فانه يمكن وضع المحور الرأسى بحيث يتوسط الفترتين كما فى شكل (٥ - ٤) . بفرض طول كل فترة منهما يساوى h



شكل (٥ ـ ٤)

تصبح احداثيات النقط الثلاث على القطع المكافىء هى $P_0(-h, y_0)$ ، $P_1(0,y_1)$ ، $P_2(h, y_2)$. بتعويض احداثيات هذه النقط فى معادلة القطع المكافىء (4) نحصل على مجموعة المعادلات الآتية :

$$x_0 = -h : \quad y_0 = Ah^2 - Bh + C;$$

$$x_1 = 0 : \quad y_1 = C.$$

$$x_2 = h : \quad y_2 = Ah^2 + Bh + C.$$

نفرض مؤقتاً أن المعاملات A , B , C معروفة ونحسب المساحة تحت القطع المكافىء باستخدام التكامل المحدد :

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2+Bx+C)dx = \left[\frac{1}{3} Ax^3 + \tfrac{1}{2} Bx^2 + Cx\right]_{-h}^{h}$$

$$= \frac{h}{3} (2\,Ah^2 + 6\,C) = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \cdots \qquad (5)$$

نعود الآن إلى شكل (٥ - ٣) ونطبق القاعدة (5) على كل فترتين متتاليتين :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} (y_0+4y_1+y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} (y_2+4y_3+y_4),$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} (y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n).$$

وبالجمع نحصل على تقريب التكامل المطلوب أى

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} [y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots$$

$$\cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

$$\text{or} \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} [y_0+y_n+2(y_2+y_4 \cdots + y_{n-2})$$

$$+ 4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})].$$

وهذه الصيغة تسمى قاعدة سمسون. وفيها يكون عددالاقسام n زوجيا إختيارياً وكلما إزداد هذا العدد كلما اقترب المجموع فى الطرف الايمن من قيمة التكامل .

مثـال

احسب بالتقريب $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$

الحـل . تسم الفترة [2 , 1] إلى 10 أقسام متساوية ، فيكون $h = 0.1$

x	y = 1/x	x	y = 1/x
$x_0=1.0$	$y_0=1.00000$	$x_6=1.6$	$y_6=0.62500$
$x_1=1.1$	$y_1=0.90909$	$x_7=1.7$	$y_7=0.58824$
$x_2=1.2$	$y_2=0.83333$	$x_8=1.8$	$y_8=0.55556$
$x_3=1.3$	$y_3=0.76923$	$x_9=1.9$	$y_9=0.52632$
$x_4=1.4$	$y_4=0.71429$	$x_{10}=2.0$	$y_{10}=0.50000$
$x_5=1.5$	$y_5=0.66667$		

اولا : باستخدام قاعدة المستطيلات الاولى (1) نجد أن

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq 0.1\ (y_0+y_1+\cdots+y_9) = 0.1\times 718773 = 0.71877$$

وباستخدام قاعدة المستطيلات الثانية(2) ينتج

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq 0.1\ (y_1+y_2+\cdots+y_{10}) = 0.1\ \times 6.68773 = 0.66877$$

ثانيا : تعطى قاعدة شبه المنحرف التقريب الآتى :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq 0.1\ [\tfrac{1}{2}(1+0.5) + 6.18773] = 0.69377$$

ثالثا : أما قاعدة سمسون فتعطى :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \simeq \frac{0.1}{3} [y_0 + y_{10} + 2\ (y_2 + y_4 + y_6 + y_8)$$

$$+ 4 (y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)]$$

$$= \frac{0.1}{3} [1 + 0.5 + 2 \times 2.72818 + 4 \times 3.45955] = 0.69315$$

أما القيمة المضبوطة للتكامل لسبعة أرقام عشرية

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0.6931472$$

وعلى هذا فإن تقسيم الفترة [1.2] إلى عشرة أقسام ثم تطبيق قاعدة سمسون يعطى خمسة أرقام صحيحة ، وفى حالة شبه المنحرف نحصل على ثلاثة فقط ، أما قاعده المستطيلات فتعطى رقما واحدا فقط .

تمـــارين

١) أوجد قيمة التكاملات الآتية باجراء تعويض مناسب :

$$\int e^{5x-3}\,dx,\quad \int \frac{\ln x}{x}\,dx,\quad \int \tan\varphi \sec^{3}\varphi\, d\varphi.$$

$$\int (\cot e^{x})e^{x}\,dx,\quad \int x\sqrt{x^{2}+1}\,dx,\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^{2}+3}}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^{3} x}\,dx,\quad \int \frac{\tan x}{\cos^{2} x}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\cos^{2} x\sqrt{\tan x-1}},$$

$$\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\sin^{2} x}},\quad \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx,\quad \int \frac{(x-1)\,dx}{x^{2}+2x+3},$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx,\quad \int x a^{x^{2}}\,dx,\quad \int (x+2)e^{x^{2}+4x+3}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^{2} x}},\quad \int \frac{\cos^{-1} x - x}{\sqrt{1-x^{2}}}\,dx,\quad \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^{2} x}},\quad \int \sec^{5} x \tan x\,dx,\quad \int \frac{1+\cos 2x}{\sin^{2} 2x}\,dx,$$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx\ ,\ \int \frac{\ln x\ dx}{x\,[1+(\ln x)^2]}\ ,\ \int \frac{\sqrt{x}}{4+x^3}\,dx\ ,$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}\ .\ \int \frac{dx}{x \ln x^2}\ ,\ \int \frac{dx}{1+e^x}\ .$$

(٢) باستخدام قاعدة التكامل بالتجزيء أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int x^3 \cos x\ dx,\ \int x^3 e^{x^2}\,dx\ ,\ \int (\ln x)^3\,dx,\ \int \frac{\ln \ln x}{x}\,dx,$$

$$\int \sin(\ln x)\ dx\ .\ \int x^3 \ln x\ dx,\ \int x \sin^{-1} x\ dx,$$

$$\int e^{3x} \sin 2x\ dx,\ \int \ln(x^2+1)dx\ ,\ \int \tan^{-1}\sqrt{x}\ dx,$$

$$\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\ dx,\ \int x \cos^2 x\ dx\ .$$

(٣) أوجد قيمة التكاملات المثلثية الآتية :

$$\int \sin^5 x\ dx\ ,\ \int \sin 2x \cos^6 2x\ dx\ ,\ \int \sin 3x \cos 5x\ dx\ ,$$

$$\int \cos 6x \cos 9x \, dx, \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx, \int \sec^4 2x \, dx, \int \cot^5 x \operatorname{cosec}^3 x \, dx,$$

$$\int \cot^4 x \, dx, \int \frac{\sec^4 x}{\tan^2 x} dx, \int \tan x \cos^4 x \, dx, \int \tan^3 x \sec x \, dx$$

$$\int \cos^6 x \, dx, \int \sin x \sin 3x \, dx.$$

٤) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}, \int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 3} dx, \int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 5} dx,$$

$$\int \frac{x^4 \, dx}{x^2 + 3x + 1}, \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}, \int \frac{(6x - 7) \, dx}{3x^2 - 7x + 11},$$

$$\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx, \int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x},$$

٥) باستخدام الكسور الجزئية احسب التكاملات الآتية :

$$\int \frac{7x + 1}{6x^2 + x - 1} dx, \int \frac{x^5 + x^3 + 7x}{(x-1)(x-2)^3} dx, \int \frac{(x^2 - 5) \, dx}{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}$$

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x^2+4)} dx, \int \frac{(x^2 - 2) \, dx}{x (x^2+1)^2}, \int \frac{dx}{(x - 2)^2 (x^2 + 2x + 10)}$$

$$\int \frac{(x^2 + 1) \, dx}{(x-1)^3}, \int \frac{x^3 + 1}{(x^2 - 1)^2} dx, \int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^4 - 8x^2 + 16} dx,$$

$$\int \frac{(3x - 7) \, dx}{x^3 + x^2 + 4x + 4}, \int \frac{(4x^2 - 8x) \, dx}{(x-1)^2 (x^2+1)^2}.$$

٦) أوجد قيمة التكاملات الآتيه :

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x-x^2}} \;,\; \int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+3}} \;,\; \int \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} \;,\; \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} \;,\; \int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$$

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}} \;,\; \int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}} \;.$$

٧) احسب قيمة تقريبيه للتكامل المحدد باستخدام قاعدة المستطيلات وقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمسون ، حيث n هو عدد الاقسام

$$\ln 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x} (n = 8) \;,\; \int_1^{11} x^3\,dx \;(n = 10),$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{2x-1} (n = 4) \;,\; \int_1^{10} \log x\,dx \;(n = 9),$$

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \;(n = 10) \;,\; \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \;(n = 9) \;.$$