الباب الرابع

تفاضل الدوال المسترسلة

Differentiation of Transcendental Functions

٤ - ١ الدوال المثلثيه Trigonometric Functions

علمنا من دراستنا السابقة لحساب المثلثات أن هناك ست نسب مثلثية لأية زاوية a ، هى $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$, $\cot a$, $\sec a$, $\operatorname{cosec} a$

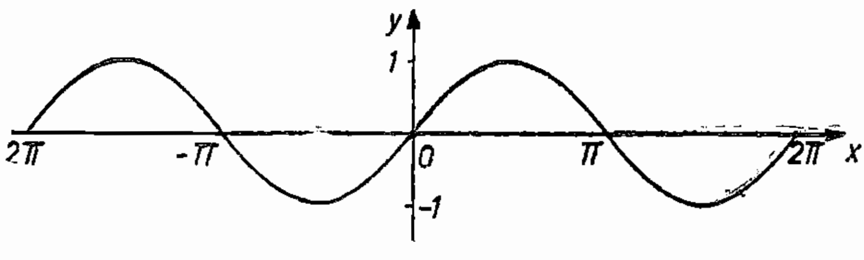
وإذا أطلقنا على الزاوية الرمز x كمتغير فانه يمكن تعريف الدوال المثلثية كالآتى :

$$\sin x\ ,\ \cos x\ ,\ \tan x\ ,\ \cot x\ ,\ \sec x\ ,\ \operatorname{cosec} x\ .$$

وفيما يلى سنتعرف على خواص كل دالة ، كما سنوجد المشتقة المناظرة .

اولا : الدالــه $y = \sin x$

يبين شكل (٤ - ١) منحنى الدالة $y = \sin x$ وهو يخـــرج من نقطة الأصل نظرا لأن $\sin 0 = 0$ وتأخذ الدالة فى التزايد مع الزاوية حتى تصل إلى



شكل (٤ ـ ١)

القيمة 1 عند $x = \frac{\pi}{2}$ ثم تعود فتتناقص حتى تصل إلى الصفر عند $x = \pi$ وتوالى التناقص (سالبة) حتى تصل إلى -1 عند $x = \frac{3\pi}{2}$ ثم تعاود التزايد إلى أن تصل إلى الصفر عند $x = 2\pi$. وحيث أن $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ فان الدالة $\sin x$ دالة دورية periodic function دورتها 2π أى أنها تتكرر كل فترة طولها 2π وتسمى هذه الفترة بالدورة period وتقابلنا هذه الدالة فى دراسة الحركة الترددية وحركة الموجات ولذلك تسمى أحيانا بالموجـــة الجيبية sine wave كما فى حالة التيار الكهربى المتردد . كذلك نجد أن هذه الدالة فردية نظراً لأن $\sin(-x) = -\sin x$, ومنحنيها متماثل بالنسبة لنقطة الأصل كما فى الشكل . ونلاحظ أن الدالة $\sin x$ متصلة عند أية قيمة للمتغير x كما هو واضح من إتصال منحنيها ، وعلى ذلك يمكن إيجاد مشتقة هذه الدالة كما يلى :

$$y = \sin x ,$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) ,$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x ,$$

$$= 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} .$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على المشتقة

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot$$

$$= \cos\left[\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \cdot \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \cos x \,.\, 1$$

$$= \cos x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \,.$$

وعامة إذا كان $y = \sin u$ حيث $u = \varphi(x)$ فان

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

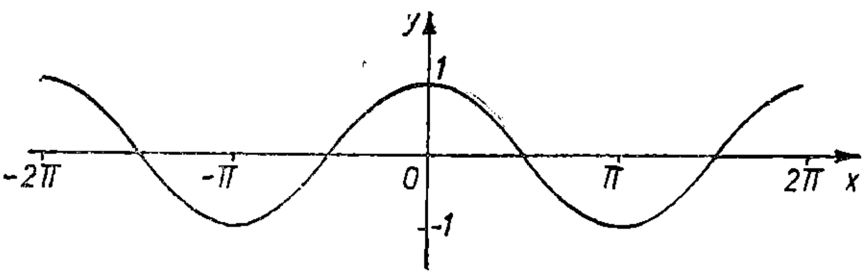
مثـال

أوجد مشتقة الدالة $y = \sin(2-3x)$.

الحـل :
$$\frac{dy}{dx} = \cos(2-3x) \cdot \frac{d}{dx}(2-3x)$$

$$= -3 \cos(2-3x)$$

ثانيا : الدالة $y = \cos x$



شكل (٤ ــ ٢)

يبين شكل (٤-٢) منحنى الدالة $y = \cos x$ وهى تبدأ بالقيمة 1 عند $x = 0$ وتأخذ فى التناقص حتى الصفر عند $x = \frac{\pi}{2}$ وتوالى التناقص (سالبة) بعد ذلك حتى تصل للقيمة -1 عند $x = \pi$ ، ثم تبدأ فى التزايد حتى تصل إلى الصفر عند $x = \frac{\pi}{2}$ وتوالى التزايد حتى تصل ثانية إلى أكبر قيمة لها وهى $+1$ عند $x = 2\pi$. وهـذه الدالة دورية أيضـا ودورتها 2π نظـرا لأن $\cos (x + 2\pi) = \cos x$ كما أن الدالة $\cos x$ دالة زوجية $\cos (-x) = \cos x$ ومنحنيها متماثل بالنسبة لمحور الصادات كما فى الشكل (٤ - ٢) .

وبمقارنة شكلى (٤ - ١) ، (٤ - ٢) نجد أن منحنى الدالة $\cos x$ ينشأ من منحنى الدالة $\sin x$ بإزاحة محور الصادات إلى اليمين مسافة $\frac{\pi}{2}$ وهـذا واضح من المتطابقة $\cos x = \sin (x + \frac{\pi}{2})$. ومن شكل (٤ - ٢) نجـد أن منحنى الدالة متصل فى جميع نقطة أى أن الدالة $\cos x$ دالة متصـلة عند جميع قيم x وعلى هذا فان لها مشتقة لجميع قيم x ويمكن إيجادها كما يلى :

$$y = \cos x,$$

$$y + \Delta y = \cos (x + \Delta x) ,$$

$$\Delta y = \cos (x + \Delta x) - \cos x,$$

$$= -2 \sin (x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \sin (x + \frac{\Delta x}{2}) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ نحصل على المشتقة المطلوبة أى

$$\frac{dy}{dx} = -\lim_{\Delta x \longrightarrow 0}\left[\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \cdot \lim_{\Delta x \longrightarrow 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\sin\left[\lim_{\Delta x \longrightarrow 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \cdot \lim_{\frac{\Delta x}{2} \longrightarrow 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\sin x \cdot 1$$

$$= -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا لاحظنا أن

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

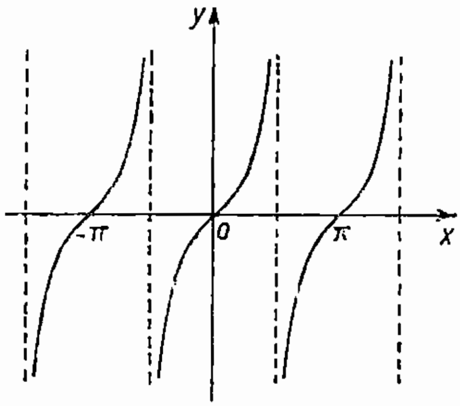
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot -1$$

$$= -\sin x$$

وعامة إذا كان $u = \varphi(x)$, $y = \cos u$ فان

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

ثالثا : الدالة $y = \tan x$



شكل (٤ ـ ٣)

من المتطابقة

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \dots (1)$$

يمكننا إستنتاج منحنى الدالة $\tan x$ بأن نوجد عند كل قيمة x الإحداثيين الرأسيين $\sin x$, $\cos x$ من شكلى (٤ - ١) ، (٤ - ٢) وبالقسمة نحصل على الإحداثى الرأسى $\tan x$ المناظر لقيمة x . ويبين شكل (٤ - ٣) منحنى الدالة $\tan x$ ، وخواص هذه الدالة هى :

أ ــ الدالة متصلة عند جميع قيم x المحدودة فيما عدا عند النقط

$$x = (n + \tfrac{1}{2})\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

التى يكون عندها منحنى الدالة غير متصل وهذا واضح من العلاقة (1)

حيث ينعدم المقـــام $\cos x$ عند هذه القيم وتصبح الدالة غير معرفـــة عند هذه النقط .

ب ــ الدالة $\tan x$ فردية وهذا واضح من (1) لأن $\sin x$ فردية فى حين $\cos x$ زوجية فيكون خارج القسمة دالة فردية . وعلى ذلك فان

$$\tan(-x) = -\tan x .$$

وواضح من شكل (٤-٣) أن منحنى الدالة متماثل بالنسبة إلى نقطة الأصل .

حـ ــ الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π نظراً لأن

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

ء ــ الدالة $\tan x$ غير مقيدة ويمكن أن تأخذ جميع القيم من ∞ ــ إلى ∞ ــ ، أى أن مدى الدالة غير محدود .

ولإيجاد مشتقة هذه الدالة نعود إلى العلاقة (1) ونطبق قاعـــدة تفاضل خارج قسمة :

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x .$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x .$$

رابعا : الدالة $y = \cot x$

يمكن إستنتاج منحنى هذه الدالة إما من منحنى الدالة $\tan x$ باعتبار

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \qquad \dots (2)$$

أو من الدالتين $\sin x$, $\cos x$ باعتبار

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} . \qquad \dots (3)$$

ومنحنى هذه الدالة يكون متصلا فى جميع نقطة إلا عند قيم x التى ينعدم عندها المقام $\sin x$ أى عند النقط

$$x = n\pi \quad , \quad n = 0 , \pm 1, \pm 2, \dots$$

وهذه الدالة فردية ومنحنيها متماثل بالنسبة لنقطة الأصل :

$$\cot (-x) = -\cot x.$$

كما أن الدالة $\cot x$ دورية ودورتها π :

$$\cot (x + \pi) = \cot x$$

وهى غير مقيدة فتأخذ جميع القيم بين $-\infty$ ، $+\infty$ أى أن مداها غير محدود .

ويمكن إيجاد مشتقة هذه الدالة إما من (2) أو (3) . فاذا اعتبرنا الصورة (3) ، أى

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x ,$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

خامسا : الدالة $y = \sec x$

حيث أن الدالة $\sec x$ هى مقلوب الدالة $\cos x$ ، أى

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} ,$$

يمكن إستنتاج منحنيها من شكل (٤ - ٢) وبإيجاد مقلوب جميع الإحداثيات الرأسية . وعلى هذا فإن $\sec x$ تكون متصلة عند جميع قيم x فيما عدا عند النقط التى ينعدم عندها $\cos x$ أى عند

$$x = (n + \tfrac{1}{2})\pi , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وهى دالة زوجية ومنحنيها متماثل بالنسبة لمحور y :

$$\sec(-x) = \sec x$$

كما أنها دورية ودورتها 2π :

$$\sec(x + 2\pi) = \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x ,$$

وحيث أن مدى الدالة $\cos x$ هو $[-1, 1]$ فأن مدى الدالة $\sec x$

هو جميع الاعداد التى لا تقع فى الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ أى أن منحنى الدالة يقع خارج الشريط الأفقى المحدد بالمستقيمين $y = \pm 1$.

لإيجاد مشتقة $\sec x$ نضع

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(-\sin x)}{\cos^2 x} = \sec x \tan x,$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x .$$

سادسا : الدالة $y = \operatorname{cosec} x$

هذه الدالة هى مقلوب $\sin x$ أى

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

ويمكن إستنتاج منحنيها بقلب منحنى الدالة $\sin x$. وعلى هذا فان الدالة معينة عند جميع قيم x فيما عدا عند القيم التى ينعدم عندها المقام أى عند

$$x = n\pi \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

وهذه الدالة غير مقيدة وتأخذ جميع القيم التى لا تقع فى الفترة $(-1, 1)$.

وهى دالة فردية ومنحنيها متماثل بالنسبة لنقطة الأصل كما أنها دورية ودورتها 2π ، ومشتقتها هى

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x \cot x .$$

مثال (١)

أوجد مشتقة الدالة $y = \sin^3 x$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 3 \sin^2 x \,.\, \frac{d}{dx}(\sin x) = 3 \sin^2 x \cos x \,.$$

مثال (٢)

فاضل بالنسبة إلى x الدالة $y = \tan^4 (2x + 1)$.

الحل :

$$y = [\tan (2x + 1)]^4$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 [\tan (2x + 1)]^3 \,.\, \frac{d}{dx} [\tan (2x + 1)]$$

$$= 4 \tan^3 (2x + 1) \,.\, 2 \sec^2 (2x + 1)$$

$$= 8 \tan^3 (2x + 1) \sec^2 (2x + 1)$$

مثال (٣)

أوجد مشتقة الدالة $y = x^3 \sec^2 3x$

الحل :

$$y = x^3 [\sec 3x]^2$$

وهى على صورة حاصل ضرب .

$$\frac{dy}{dx} = x^3 . 2 [\sec (3x)] \frac{d}{dx} (\sec 3x) + [\sec (3x)]^2 \cdot 3x^2$$

$$= 2x^3 \sec 3x \, [\, 3 \sec 3x \tan 3x \,] + 3x^2 \sec^2 3x$$

$$= 3x^2 \sec^2 3x \, (\, 2x \tan 3x + 1 \,)$$

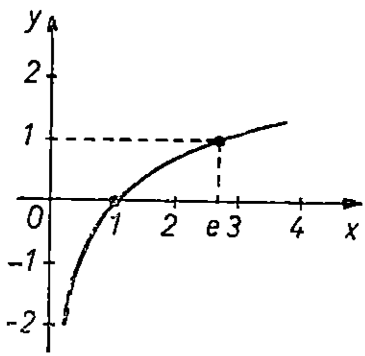
٤ ـ ٢ الدالة اللوغاريتمية

The Logarithmic Function

سبق لنا فى بند ١ ـ ١٩ وعرفنا اللوغاريتمات الطبيعية أو النبيرية وهى التى أساسها العدد e . وتسمى الدالة

$$y = \ln x \; , \; 0 < x < \infty \; ,$$

بالدالة اللوغاريتمية ويبين شكل (٤ ـ ٤) منحنى هذه الدالة .



شكل (٤ — ٤)

ومجـــال هذه الدالة هـــو $(\infty \, , \, 0)$ فى حين أن مـــداها هـو $(-\infty \, , \, \infty)$ ، وهى متصلة عند جميع نقط مجالها ومتزايدة .

لايجاد مشتقة الدالة اللوغاريتمية نضع

$$y = \ln x \; ,$$

$$\therefore \; y + \Delta y = \ln (x + \Delta x),$$

$$\Delta y = \ln (x + \Delta x) - \ln x$$

$$= \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Put $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{m}$, then , $\frac{1}{\Delta x} = \frac{m}{x}$.

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot m \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

وفى الطرف الأيمن يكون m متغيراً (x ثابت) بحيث أن

$$m = \frac{x}{\Delta x} \longrightarrow \infty \text{ as } \Delta x \longrightarrow 0 .$$

نحسب الآن نهاية $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \longrightarrow 0$, $m \longrightarrow \infty$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{m \to 0} \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m ,$$

ومن اتصال الدالة اللوغاريتمية يمكننا أن نكتب

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right].$$

ولكن من تعريف العدد ه فى بند ١ — ١٩ وجدنا أن

$$e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m$$

لذلك يمكن كتابة المشتقة السابقة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x} \cdot$$

وعامة إذا كان $y = \ln u$ حيث $u = \varphi(x)$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \cdot$$

ملاحظة : الدالة $\log_a x$ لها عند أية نقطة x $(0 < x < +\infty)$

مشتقة تساوى $\frac{1}{x \cdot \ln a}$. ذلك لأن

$$\ln x = \log_a x \cdot \ln a$$

or $$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \cdot$$

وعامة إذا كان $y = \log_a u$ حيث $u = \varphi(x)$ فان

$$\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثـال (١)

أوجـد مشتقة الدالة $y = \log_a (x^2 + 4)$.

الحل : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^2 + 4)\ \ln a}\ \frac{d}{dx}\ (x^2 + 4) = \frac{2x}{(x^2 + 4)\ \ln a}$

مثـال (٢)

فاضل بالنسبة إلى x الدالة $y = \ln (x^2 + 4)^2$

الحل : بأخذ اللوغاريتم أولا يمكن كتابة الدالة على الصورة الأبسط

$$y = 2\ \ln\ (x^2 + 4)\ .$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 4} \cdot \frac{d}{dx}\ (x^2 + 4) = \frac{4x}{x^2 + 4}\ .$$

مثـال (٣)

أوجـد مشتقة الدالة $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ بالنسبة x

الحل : بأخذ اللوغاريتم أولا نجد أن

$$y = \tfrac{1}{2}\ \ln\ (1 + \sin x) - \tfrac{1}{2}\ \ln\ (1 - \sin x)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \cos x - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \sin x} \cdot (-\cos x)$$

$$= \frac{\cos x}{3}\ \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right)$$

$$= \frac{\cos x}{2} \cdot \frac{2}{1 - \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x.$$

٤ ـ ٣ تفاضل الدوال العكسية

Differentiation of Inverse Functions

إذا كان للدالة $y = f(x)$ دالة عكسية $x = \varphi(y)$ (بند ١ — ٩) ،
لها عند النقطة y مشتقة $\varphi'(y)$ لا تساوى الصفر ، فانه عند النقطة المناظرة x
تكون للدالة $y = f(x)$ مشتقة تساوى $\frac{1}{\varphi'(y)}$ أى أن

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \qquad \text{or} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} .$$

ولإثبات ذلك نفاضل طرفى العلاقة $x = \varphi(y)$ بالنسبة إلى x آخذين
فى الاعتبار أن y دالة x ، نجد أن

$$1 = \varphi'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy} .$$

وهو المطلوب

٤ ـ ٤ الدوال المثلثية العكسية

Inverse Trigonometric Functions

اولا : الدالة $y = \sin^{-1} x$

لنعتبر الدالة $x = \sin y$. يمكن إستنتاج منحنى هذه الدالة من منحنى
الدالة الجيبية المبين فى شكل (٤ — ١) وذلك بتبديل x مع y . وهذه الدالة

متعددة القيم لأن كل قيمة x فى الفترة $1 \leqslant x \leqslant 1$ — يناظرها عدد لانهائى من القيم y ، فمثلا إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ فإن قيم y التى تحقق $\sin y = \frac{1}{2}$ هى

$$y = \frac{\pi}{6} + 2n\pi\ ,\ y = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\ ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

والدالة $y = \sin x$ معرفة فى الفترة اللانهائية $-\infty < x < +\infty$

وفى الفترة $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ تكون هذه الدالة متزايدة وتغطى قيمها الفترة $-1 \leqslant y \leqslant 1$. لهذا يكون للدالة

$$y = \sin x\ ,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

دالة عكسية نعرفها على أنها

$$y = \sin^{-1} x \Longleftrightarrow x = \sin y \text{ and } -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} .$$

لإيجاد مشتقة هذه الدالة نفاضل طرفى العلاقة $x = \sin y$ بالنسبة إلى y :

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ ,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \sin^{-1} x \leqslant \frac{\pi}{2} .$$

وقد أخذت الاشارة الموجبة أمام الجذر نظراً لأن الدالة $y = \sin^{-1} x$ تأخذ قيما فى الفترة $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ وبالتالى يكون $\cos y \geqslant 0$.

مثـال

أوجـد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \left(\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)^2$

الحل : $\frac{dy}{dx} = -2\sin^{-1}\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= -2\sin^{-1}\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

ثانيا : الدالة $y = \cos^{-1} x$

نعتبر ، كما سبق ، الدالة $y = \cos x$ المعرفة فى الفترة $-\infty < x < \infty$ فإذا قيدنا تعريف هذه الدالة بالفترة $[0, \pi]$ فإنها تـكون فيها دالة متناقصة للمتغير x ، أى

$$y = \cos x \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

ويمكننا تعريف الدالة العكسية

$$y = \cos^{-1} x \longleftrightarrow x = \cos y \text{ and } 0 \leqslant y \leqslant \pi .$$

ويستنتج منحنيها من شكل (٤ - ٢) بتبديل المتغيرين x , y .

ولإيجاد مشتقة دالة جيب التمام العكسية نفاضل طرفى العلاقة $x = \cos y$ بالنسبة إلى y كما فى الحالة السـابقة :

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 \leqslant \cos^{-1} x \leqslant \pi.$$

وفى العلاقة $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ أخذنا الجذر باشارة موجبة نظراً لأن الدالة $y = \cos^{-1} x$ معـرفة فى الفـترة $0 \leqslant y \leqslant \pi$ وبالتـالى $\sin y \geqslant 0$.

مثـال

إذا كان $y = \cos^{-1}(\tan x)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحـل

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\tan^2 x}} \cdot \sec^2 x$$

ثالثا : الدالة $y = \tan^{-1} x$

إذا اعتـبرنا الدالة $y = \tan x$ فى الفـترة $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ لوجدنا أنها دالة متزايدة وبالتالى يمكن تعريف دالتها العكسية

$$y = \tan^{-1} x \longleftrightarrow x = \tan y .$$

وهذه الدالة معرفة لجميع قيم x فى الفترة $-\infty < x < \infty$ وتغطى قيمها الفترة $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ أى أن مداها هو $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

لإيجاد المشتقة نكتب

$$x = \tan y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

مثال

إذا كان $y = (\tan^{-1} x)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل :
$$\frac{dy}{dx} = 4(\tan^{-1} x)^3 \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

رابعا : الدوال $\cot^{-1} x, \sec^{-1} x, \operatorname{cosec}^{-1} x$

ا) بطريقة مشابهة تماما كما فى الحالات السابقة نعرف $\cot^{-1} x$ على أنها العدد y الذى يحقق $0 < y < \pi$ وكذلك $\cot y = x$ ، ومشتقة هذه الدالة تعطى من

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < \cot^{-1} x < \pi.$$

ب) إذا كان $x \geqslant 1$ فإن الدالة $\sec^{-1} x$ تعرف بالعدد y الذى يحقق $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ وكذلك $\sec y = x$. أما إذا كان $x \leqslant -1$ ، فان $\sec^{-1} y$ تعرف بالعدد y الذى يحقق $-\pi \leqslant y < -\frac{\pi}{2}$ ، $\sec y = x$.

ومشتقة هذه الدالة هى

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot$$

ح) إذا كان $x \geqslant 1$ فإن الدالة $\operatorname{cosec}^{-1} x$ تعرف بالعدد y بحيث $0 < y \leqslant \frac{\pi}{2}$ ، $\operatorname{cosec} y = x$. أما إذا كان $x \leqslant -1$ فإن $\operatorname{cosec}^{-1} x$ تعرف بالعدد y والذى يحقق $-\pi < y \leqslant -\frac{\pi}{2}$ ، $\operatorname{cosec} y = x$ ، وتعطى مشتقة هذه الدالة من

$$\frac{d}{dx} \left(\operatorname{cosec}^{-1} x \right) = - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot$$

٤ — د الدالة الأسية ومشتقتها

Exponential Function and its Derivative

تعتبر الدالة الأسية $y = a^x$ (حيث $a > 0$ ، $-\infty < x < \infty$ ، $0 < y < \infty$) الدالة العكسية للدالة اللوغاريتميـة $x = \log_a y$. والدالة الأخيرة إما مطردة التزايد إذا كان $a > 1$ أو مطردة التناقص فى حالة $a < 1$ ، كما أن لها مشتقة عند y .

بالرجوع إلى تفاضل الدوال العكسية نجد أن الدالة العكسية $y = a^x$ لهـا مشتقة عند x نحصل عليها بتفاضل $x = \log_a y$ بالنسبة إلى x :

$$1 = \frac{1}{y \cdot \ln a} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a = a^x \ln a$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(a^x \right) = a^x \ln a$$

وعامة إذا كان $y = a^u$ حيث $u = \phi(x)$ فإن

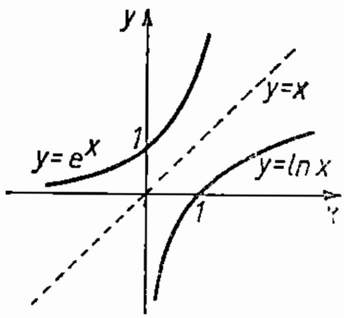
$$\frac{d}{dx}(a^u) \; a^u \cdot \ln a \;\; \frac{du}{dx}$$

أما فى حالة $a = e$ فإن

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

نظراً لأن $\ln e = 1$.

والدالة الأسية $y = e^x$ (تكتب أحيانا $\exp x$) هى الدالة العكسية للدالة $y = \ln x$ ويبين شكل (٤ — ٥) الدالتين حيث تنشأ إحداهما كصورة إنعكاس للدالة الأخرى فى المستقيم $y = x$.



شكل (٤ — ٥)

ومن الملاحظ أن مشتقة الدالة $y = e^x$ هى نفسها أى أنها لم تتأثر بعملية التفاضل . وهذا يعنى أن معدل تغير هذه الدالة عند قيمة معينة لمتغيرها x يساوى تماما قيمة الدالة عند هذه النقطة . والمعنى البيانى لهذه الخاصية هو أن ميل المماس عند أية نقطة على منحنى الدالة $y = e^x$ يساوى الأحداثى الصادى لهذه النقطة .

مثـال

اوجد مشتقة الدالة $y = e^{x^2}$.

الحـل : ضع $u = x^2$ فتصبح الدالة $y = e^u$. بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u (2x) = 2x\, e^{x^2} .$$

٤ ـ ٦ التفاضل اللوغاريتمى

Logarithmic Differentiation

يطلب فى بعض الاحوال إيجاد مشتقة دالة معقدة $y = f(x)$ يدخل فى تكوينها عمليات ضرب وقسمة دوال x وأحيانا رفع دوال x إلى قوى هى فى حد ذاتها دوال x . فى هذه الحاله نلجأ أولا إلى تبسيط الدالة المعطاة بأخـذ اللوغاريتم للاساس e لكل من الطرفين ثم نجرى عملية التفاضل بعد ذلك .

مشتقة u^v حيث u , v دالتا x :

بوضع $y = u^v$ ثم أخذ اللوغاريتم للأساس e ينتج أن

$$\ln y = \ln u^v = v \ln u$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \ln u + v . \frac{d}{dx} (\ln u)$$

$$= \frac{dv}{dx} \ln u + \frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

بالضرب فى $y = u^v$ ينتج أن

$$\frac{d}{dx}\left(u^v\right) = u^v \frac{dv}{dx} \ln u + v\,u^{v-1}\frac{du}{dx}$$

مثال (١)

أوجد مشتقة $y = x^x$.

الحل : $\ln y = x . \ln x$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 . \ln x + x . \frac{1}{x}$$

$$= \ln x + 1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(x^x\right) = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

مثال (٢)

فاضل بالنسبة إلى x الدالة

$$y = \frac{x^2 \sqrt[3]{3x+2}}{(2x-3)^3} \quad , \quad x > \frac{3}{2} .$$

الحل : بأخذ اللوغاريتمات نحصل على

$$\ln y = 2 \ln x + \tfrac{1}{3} \ln (3x+2) - 3 \ln (2x-3).$$

$$\frac{1}{y} . y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{3x+2} - \frac{6}{2x-3}$$

$$\therefore y' = \frac{x^2 \sqrt[3]{3x+2}}{(2x-3)^3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{3x+2} - \frac{6}{2x-3}\right)$$

مشتقه حاصل ضرب n من الدوال :

نفرض أن

$$y = u_1\, u_2 \;\cdots\;\cdots\;\cdots\; u_n$$

حيث $u_1 , \cdots , u_n$ دوال x . بأخذ اللوغاريتمات ينتج

$$\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + \ldots + \ln u_n$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$\frac{1}{y}\, y' = \frac{1}{u_1}\, u'_1 + \frac{1}{u_2}\, u'_2 + \cdots + \frac{1}{u_n}\, u'_n$$

or

$$y' = u'_1\, u_2 \ldots u_n + u_1\, u'_2 \cdots u_n + \cdots + u_1\, u_2 \cdots u'_n$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من قبل فى بند (٢ – ٥) .

ملاحظه : يسمى التعبير $(\ln\ y)' = \frac{y'}{y}$ ، الذى هو مشتقة لوغاريتم الدالة $y = y\ (x)$ ، **بالمشتقه اللوغاريتميه** logarithmic derivative .

٤ – ٧ الدوال الزائديه Hyperbolic Functions

فى تطبيقات كثيرة للتحليل الرياضى يقابلنا التعبيران

$\frac{1}{2}\,(e^{x} + e^{-x})$ and $\frac{1}{2}\,(e^{x} - e^{-x})$,

مما يستدعى إطلاق إسمين جديدين عليهما ، فسميا

$$\cosh\ x = \tfrac{1}{2}\ (e^{x} + e^{-x}) \quad ,$$

$$\sinh\ x = \tfrac{1}{2}\ (e^{x} - e^{-x}) \quad .$$

وتسمى الدالة الأولى منها **جيب التمام الزائدى** hyperbolic cosine . وتسمى الثانية **الجيب الزائدى** hyperbolic sine . وقد لا يتضح من الوهلة الأولى سبب هذه التسمية ، إلا أننا سنرى فى سياق دراستنا أن الدالتين $\cosh t$, $\sinh t$ ترتبطان بالنقطة (x , y) على القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ بطريقة مماثلة لتلك التى تربط $x = \cos t$, $y = \sin t$ بالنقطة (x , y) على دائرة الوحـــدة $x^2 + y^2 = 1$. لتحقيق ذلك نعوض

$$\left.\begin{aligned} x &= \cosh t = \tfrac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right) \\ y &= \sinh t = \tfrac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

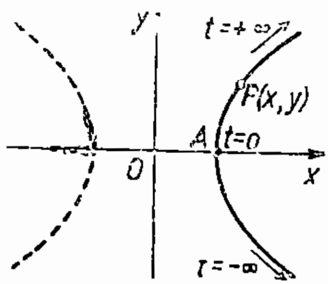
فى معادلة القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ فنجد أن

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \tfrac{1}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}\right) - \tfrac{1}{4}\left(e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4} \times 4 = 1$$

أى أن النقطة (x , y) المعروف إحداثيها بالعلاقتين (1) تقـع على القطع الزائد . وفى الواقع إذا تغير t من $-\infty$ إلى $+\infty$ فان النقطة $P(x , y)$ ترسم



شكل (٤ - ٦)

الفرع الأيمن من القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ فى الأتجاه المبين بالسهم فى شكل (٤ - ٦) وحيث أن e^t تكون دائما موجبة وكذلك $e^{-t} = 1/e^t$ فان x المعطاه بالعلاقة الأولى فى (1) تكون موجبة لجميع قيم t الحقيقية $(-\infty < t < +\infty)$. وعلى ذلك تظل النقطة $(\cosh t , \sinh t)$ عن يمين المحور الرأسى دائما .

فى سياق البرهان السابق أثبتنا المتطابقة الأولى للدوال الزائدية ألا وهى :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \cdots (2)$$

وهذه المتطابقة تناظر مثيلتها فى حساب المثلثات $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

وفيما يلى سنتطرق إلى الحديث عن أوجه تماثل أخرى بين هذين النوعين من الدوال .

تعرف بقية الدوال الزائدية بدلالة $\sinh x$ ، $\cosh x$ كالآتى :

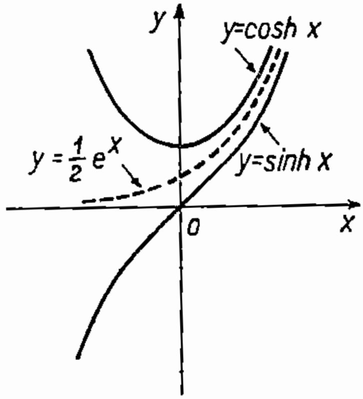
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} ,$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} ,$$

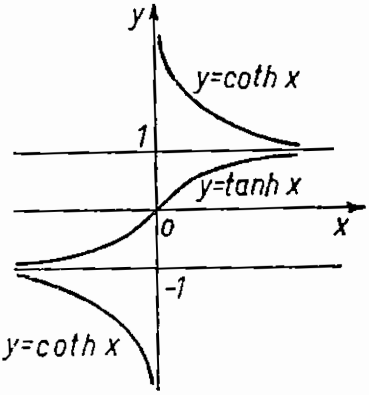
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} ,$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} .$$

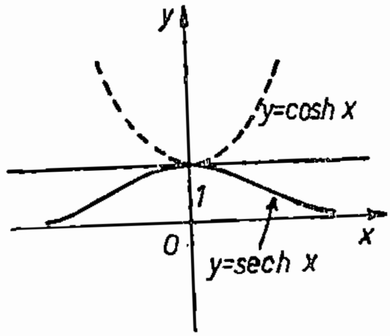
وتبين الأشكال من (٤ - ٧) إلى (٤ - ١٠) منحنيات هذه الدوال .



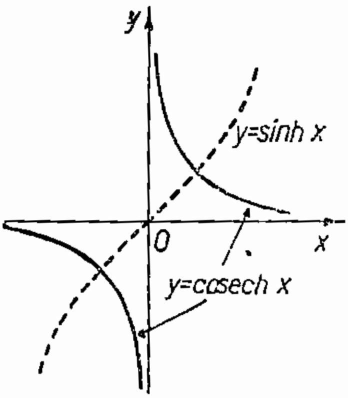
شكل (٤ — ٧)



شكل (٤ — ٨)



شكل (٤ — ٩)



شكل(٤ — ١٠)

من العلاقتين (1) نجد أن

$$\cosh x + \sinh x = e^{x} \quad ,$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} \quad .$$

وعلى هذا فإن أى تركيب من الدوال الاسية e^{x} ، e^{-x} يمكن استبداله بتركيب آخر من $\sinh x$ ، $\cosh x$ وبالعكس. كذلك ، حيث أن e^{-x} موجبة فإن $\cosh x$ تكون أكبر من $\sinh x$ كما فى شكل (٤ - ٧) . ولكن لقيم x الكبيرة تكون e^{-x} صغيرة ويكون $\cosh x \simeq \sinh x$ وعند $x = 0$ نجد أن $\cosh x =$ ، $\sinh x = 0$ وهى نفس القيم التى تأخذها الدوال المثلثية

المناظرة عند $x = 0$. كذلك يتضح من شكل (٤ - ٧) أن الدالة $\cosh x$ زوجية ، لأن

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

كما أن الدالة $\sinh x$ فردية

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

ويكون منحنى الدلة الأولى متماثلا بالنسبة لمحور y فى حين أن منحنى الدالة الأخرى يكون متماثلا بالنسبة لنقطة الأصل . وهذه هى نفس خواص الدوال المثلثية المناظرة . إلا أنه توجد اختلافات جوهرية بين الدوال الزائدية والمثلثية.

فمثلا الدوال المثلثيـــة دوال دورية : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ، $\tan(x + \pi) = \tan x$, .. الخ ولكن الدوال الزائدية ليست دورية .

كذلك يختلف النوعان من الدوال فى مدى القيم التى يأخذها كل نوع :

$\sin x$ تتغير بين -1 , $+1$ وتتردد بينهما ،

$\sinh x$ تتغير من $-\infty$ إلى $+\infty$ وتتزايد باطراد ،

$\cos x$ تتغير من -1 , $+1$ وتتردد بينهما

$\cosh x$ تتغير من $+\infty$ إلى $+1$ إلى $+\infty$ ؛

$|\sec x|$ لا تقل أبدا عن الوحدة ،

$\operatorname{sech} x$ لا تزيد أبدا عن الوحدة وتكون موجبة دائما ،

$\tan x$ تتغير من $-\infty$ إلى $+\infty$ ،

$\tanh x$ تتغير من -1 إلى $+1$ ،

هذا بالاضافة الى الاختلاف فى سلوك الدوال عنـــدما $x \to \pm\infty$.

ففى حالة الدوال المثلثية $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, .. الخ لا يمكن أن نجزم بشىء قاطع عن سلوكها لقيم x الكبيرة . أما بالنسبة للدوال الزائدية فانهـــا تسلك بشكل أو بآخر مثل $\frac{1}{2}e^{x}$ أو $\frac{1}{2}e^{-x}$ أو الوحـــدة أو الصفر كما يلى :

لقيم x الكبيره الموجبة :

$$\cosh x \simeq \sinh x \simeq \tfrac{1}{2} e^{x}.$$

$$\tanh x \simeq \coth x \simeq 1 .$$

$$\operatorname{sech} x \simeq \operatorname{cosech} x \simeq 2e^{-x} \simeq 0.$$

أما لقيم x السالبة ، | x | كبير :

$$\cosh x \simeq -\sinh x \simeq \tfrac{1}{2} e^{-x} .$$

$$\tanh x \simeq \coth x \simeq -1,$$

$$\operatorname{sech} x \simeq -\operatorname{cosech} x \simeq 2e^{x} \simeq 0.$$

وفيما يلي بعض العلاقات التطابقية للدوال الزائدية :

$$\sinh (x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

$$\cosh (x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

بوضع $x = y$ ينتج :

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x.$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

من العلاقة الثانية والمطابقة (2) نجد بالجمع أن

$$\cosh 2x + 1 = 2 \cosh^2 x,$$

وبالطرح نحصل على

$$\cosh 2x - 1 = 2 \sinh^2 x$$

٤ ـ ٨ مشتقات الدوال الزائديه

Derivatives of Hyperbolic Functions

من التعريف

$$\sinh x = \tfrac{1}{2} (e^{x} - e^{-x}),$$

$$\cosh x = \tfrac{1}{2} (e^{x} + e^{-x}),$$

نجد بالتفاضل أن

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh x.$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \sinh x.$$

كذلك

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)$$

$$= \frac{\cosh x.\cosh x - \sinh x.\sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

وبالمثل يمكن إثبات العلاقات الآتية :

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{cosech}^2 x.$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x.$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \coth x.$$

ونلاحظ هنا أن هذه العلاقات تشبه نظيراتها للدوال المثلثية فيما عدا الأشارات . فبالنسبة للدوال الزائدية الثلاث الأولى نجد أن إشارات مشتقاتها موجبة فى حين أن الثلاث الأخرى تكون إشارة مشتقاتها سالبة . أما بالنسبة للدوال المثلثية المناظرة نجد أن الاشارة السالبة تكون مع مشتقات دوال التمام أى التى تبدأ بالحرفين co .

٤ ـ ٩ علاقة الدوال الزائديه بالقطع الزائد

Relation between Hyperbolic Functions and the hyperbola

سنوضح الآن معنى المتغير t فى العلاقتين

$$x = \cosh t \quad , \quad y = \sinh t \quad .. \quad .. \quad (1)$$

اللتين ترتبطان بالنقطة $P(x \, , \, y)$ على القطع الزائد

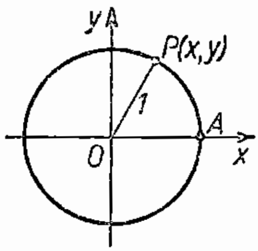
$$x^2 - y^2 = 1.$$

لذلك نبدأ أولا بإيضاح معنى المتغير θ فى المعادلتين

$$x = \cos \theta \quad , \quad y = \sin \theta$$

المرتبطتين بالنقطة $P\,(x \, , \, y)$ على دائرة الوحدة

$$x^2 + y^2 = 1,$$



شكل (٤ — ١١)

ومن المألوف أن يرمز θ للقياس الدائرى للزاوية AOP فى شكل (٤-١١) أى أن

$$\theta = \frac{\text{arc AP}}{\text{radius OA}} \, .$$

مساحة القطاع الدائرى الذى نصف قطره r وزاويته المركزية θ (بالتقدير

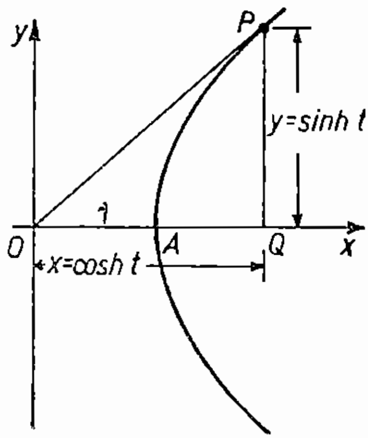
الدائرى) تعطى من $\frac{1}{2} r^2 \theta$. وحيث أن دائرتنا نصف قطرها الوحدة ، لذلك يكون

$$\text{area of sector AOP} = \tfrac{1}{2}\,\theta$$

ومن هذه العلاقة ينتج

$$\theta = \text{twice the area of the sector AOP}$$

وسنحاول الآن إيجاد معنى مشابه للتغير t فى المعادلتين (1) . نحسب مساحة القطاع AOP فى شكل (٤ - ١٢) . واضح أنها تساوى مساحة المثلث



شكل (٤ـ ١٢)

OQP مطروحا منها المساحة AQP المحددة من أعلى بالمنحنى ومن أسفل بمحور x ومن اليمين بالمستقيم P Q . ويعطى التكامل المحدد المساحة الأخيرة من

$$\text{area AQP} = \tfrac{1}{2}\sinh t \cosh t - \tfrac{1}{2}\,t$$

وعلى هذا تكون مساحة القطاع هى

$$\begin{aligned}\text{area of sector AOP} &= \text{area of OQP} - \text{area of AQP}\\ &= \tfrac{1}{2}\sinh t\cosh t - \left(\tfrac{1}{2}\sinh t\cosh t - \tfrac{1}{2}\,t\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\,t\end{aligned}$$

$\therefore \quad t =$ twice the of area of the sector AOP

وكما فى حالة الدائرة تكون قيمة t موجبة إذا كانت المساحة فوق محور x وسالبة إذا وقعت المساحة تحت محور x .

٤ ـ ١٠ الدوال الزائدية العكسية ومشتقاتها

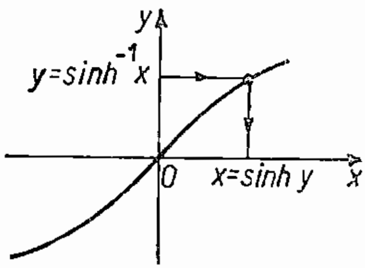
Inverse Hyperbolic Functions and their Derivatives

نبدأ بالعلاقة

$$x = \sinh y \cdot$$

واضح أنه عندما تتغير y باستمرار من ∞ — إلى ∞ — فان x تتغير بالمثل . وهذا يعنى بيانياً أننا إذا بدأنا بأية قيمة على محــور y كما فى شكل (٤ - ١٣) ورسمنا مستقيما أفقيا حتى يلاقى المنحنى ثم نرسم من نقطة التلاقى مستقيما رأسيا فانه يقابل محور x فى نقطة واحدة ، أى أن النقطة (x , y) تقع على المنحنى . وهذه العملية يمكن إجراؤها بطريقة عكسية مبتدئين من قيمة على محور x حتى نصل إلى القيمة المناظرة على محور y . والعملية الأخيرة تعطينا y كدالة x والتى سنرمز لها بالرمز

$$y = \sinh^{-1} x$$



شكل (٤ ـ ١٣)

ونسميها **دالة الجيب الزائدى العكسية** inverse hyperbolic sine ، وهى تعنى أن $x = \sinh y$.

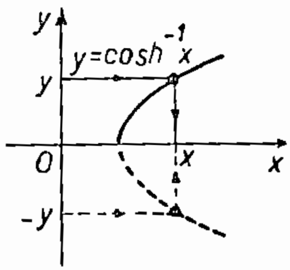
دالة جيب التمام الزائدى العكسيه inverse hyperbolic cosine دالة ثنائية القيمة . وسنوضح قيمتها الرئيسية مبتدئين بالمعادلة

$$x = \cosh y$$

كل من y , $-y$ تعطى نفس قيمة x ، أى أن العلاقة التى تربط قيم y بقيم x المناظرة هى علاقة إثنين إلى واحد . فإذا اعتبرنا x المتغير المستقل فانه توجد قيمتان للمتغير y تناظران هذه القيمة . وسنعتبر القيمة الموجبة للمتغير y القيمة الرئيسية لدالة جيب التمام الزائدى العكسية :

$$y = \cosh^{-1} x \text{ means } x = \cosh y\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ x \geqslant 1.$$

فى شكل (٤ - ١٤) تمثل المعادلة $x = \cosh y$ المنحنى كله فى حين أن المعادلة



شكل (٤ ــ ١٤)

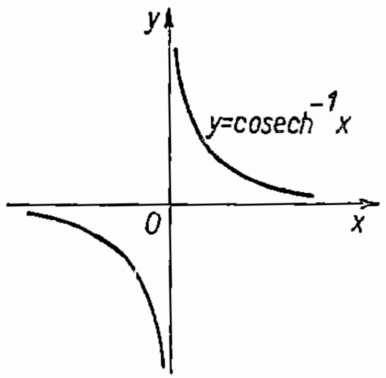
$y = \cosh^{-1} x$ تمثل الجزء فوق محور x فقط ، أما الجزء الذى يقع تحت محور x فتمثلة المعادلة $y = -\cosh^{-1} x$.

بالرجوع إلى شكل (٤-١٥) نجد أن الدالة العكسية الأخرى المزدوجة القيمة هى دالة القاطع الزائدى العكسية التى سنختار منها فرعها الموجب ، أى أن

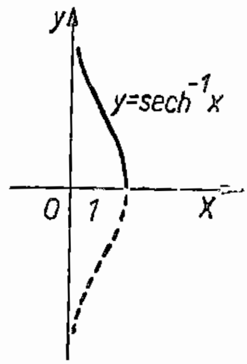
$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \, , \, y > o \, , \, o < x \leqslant 1 \qquad \cdots (1)$$

يعرف الفرع الرئيسى حيث العددان x , y يحققان

$$x = \operatorname{sech} y, \qquad \cdots (2)$$



شكل (٤ ـ ١٦)



شكل (٤ ـ ١٥)

وحيث أن

$$\operatorname{sech} y = \frac{1}{\cosh y}$$

فإن المعادلة (2) تـكافىء المعادلة

$$\cosh y = \frac{1}{x}$$

والشرط $y > o$ يعين نفس الفرع كما فى (1) ، بحيث أن

$$y = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

أى أن

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x} \, ,$$

وبالمثل نجد أن

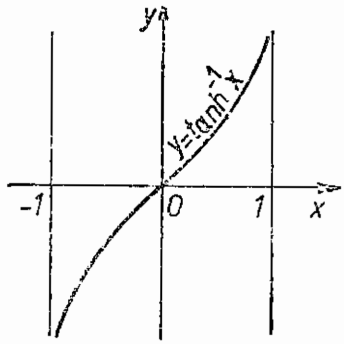
$$y = \operatorname{cosech}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x} \quad \text{means} \quad \operatorname{cosech} y = x,$$

وكذلك

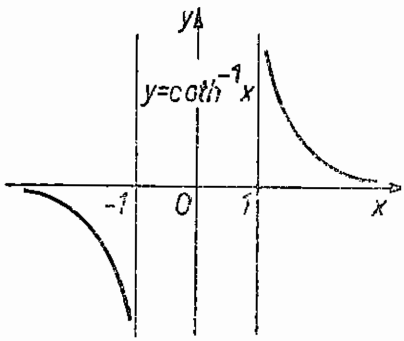
$$y = \tanh^{-1} x \qquad \text{means} \quad x = \tanh y,$$

$$y = \coth^{-1} x \qquad \text{means} \quad x = \coth y$$

الأشكال من (٤ — ١٣) إلى (٤ — ١٨) تبين منحنيات الدوال الزائدية العكسية المختلفة .



شكل (٤ـ١٧)



شكل (٤ـ١٨)

وهناك طريقة أخرى للتعبير عن الدوال الزائدية العكسية بدلالة اللوغاريتمات كما سنبينها فى حالة $\tanh^{-1} x$:

$$y = \tanh^{-1} x$$

$$\therefore \; x = \tanh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

نحل الآن هذه المعادلة بالنسبة إلى e^{2y} :

$$x e^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

or

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore\ y = \tanh^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\ ,\ |x| < 1 .$$

وقدقيدنا المتغير x فى العلاقة الأخيرة بالفترة $|x| < 1$ لأن $x = \tanh y$ تقع فى هذه الفترة وذلك لجميع قيم y الحقيقية التى تحقق $-\infty < y < +\infty$.

العلاقات الأخرى التى تعطى بقيـــة الدوال الزائدية العـكسية بـدلاله اللوغاريتمات هى :

$$\sinh^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2+1}),\ -\infty < x < \infty ,$$

$$\cosh^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2-1})\ ,\ x \geqslant 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) = \cosh^{-1} \frac{1}{x}\ ,\ 0 < x \leqslant 1,$$

$$\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right) = \sinh^{-1} \frac{1}{x}\ ,\ x \neq 0,$$

$$\coth^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \tanh^{-1} \frac{1}{x}\ ,\quad |x| > 1 ,$$

وفيما يلى سنعطى مشتقات الدوال الزائدية العـكسية وسنكتفى باثبات احداها نظراً لتشابه طريقة الاثبات كما فى حالة الدوال المثلثية العـكسية :

$$\frac{d}{dx} (\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} .$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \; x > 1,$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1,$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}, \; |x| > 1,$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \; |x| < 1.$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosech}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

اثبات القانون الخاص بمشتقة $\cosh^{-1}x$:

$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{or} \quad \cosh y = x,$$

$$\sinh y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \pm\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

ونظراً لأن $\cosh y > 1$ لذلك وجب الشرط بأن $x>1$. كذلك استثنينا القيمه $x=1$ حتى لاينعدم مقـام المشتقه وتصبح الاخيرة لا نهائيه . وإشـاره المشتقة تكون موجبه إذا تقيدنا بالقيمـه الرئيسية $y=\cosh^{-1}x$ حيث $y\geqq 0$ ، لأنه حينئذ تكون $\sinh y \geqq 0$ وتـكون اشاره المشتقةهى اشارة $\sinh y$.

٤ ـ ١١ التمثيل البارامترى للداله

Parametric Representation of a Function

نفرض أن لدينا المعادلتين

$$x = \varphi (t) \ , \ y = \psi (t). \qquad (1)$$

حيث t متغير يأخذ قيماً تقع فى الفترة $[t_1 \ , \ t_2]$. تناظر كل قيمة للمتغير t قيمة لكل من y,x على فرض أن كل من الدالتين φ, ψ أحادية القيمة . فإذا نظرنا لقيم y,x باعتبار أنها احداثيات نقطة ما فى المستوى $x \ y$ فإن كل قيمة للمتغير t تناظرها نقطة محددة فى هذا المستوى . فإذا تغير t من t_1 إلى t_2 ترسم هذه النقطة منحنى معيناً . تسمى المعادلتان (1) بالمعادلتين البارامتريتين لهذا المنحنى ، كما يسمى t البارامتر parameter ، ويقال إن المنحنى ممثل بارامتريا بالمعادلتين (1).

نفرض علاوة على ذلك أن الدالة $x = \varphi (t)$ لها دالة عكسيه $t = \Phi (x)$ فمن الواضح أن y هى دالة x :

$$y = \psi [\Phi(x)].$$

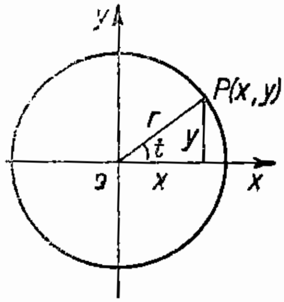
وعلى هذا فإن المعادلتين (1) تعرفان y كداله x فى التمثيل البارامترى , أما التعبير الصريح الذى يبين تبعية y لـ x ، أى $y = f (x)$ ، فنحصل عليه بحذف البارامتر t من المعادلتين (1) .

٤ ـ ١٢ معادلات بعض المنحنيات فى الصورة البارامترية

الدائرة : Circle

معطى دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r كما فى شكل (٤-١٩)

ترمز للزاوية التي يصنعها نصف قطر الواصل إلى نقطة ما $P(x, y)$ على الدائرة مع محور x بالرمز t . نعبر عن إحداثيي هـذه النقطة بدلا البارامتر t :



شكل (٤ ـ ١٩)

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos t. \\ y &= r \sin t. \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

والمعادلتان الأخيرتان هما المعادلتان البارامتريتان للدائرة .

ونلاحظ أن البارامتر t يتغير من 0 إلى 2π حتى ترسم النقطة $P(x, y)$ الدائرة بأكملها مرة واحدة ابتداء من نقطة تقاطعها مع محور x الموجب .

وإذا حذفنا البارامتر t من هاتين المعادلتين نحصل على معادلة واحدة خالية من t تربط المتغيرين y ، x ببعضهما . بالتربيع والجمع ينتج أن

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

or

$$x^2 + y^2 = r^2$$

وهي المعادلة الكارتيزية للدائرة .

أما إذا كان مركز الدائره هو النقطة (h,k) فإن المعادلتين البارامتريتين تصبحان

$$\left.\begin{aligned} x &= h + r \cos t, \\ y &= k + r \sin t, \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t < 2\pi .$$

وبحذف t نحصل على

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

القطع الناقص : Ellipse

المعادلة الكارتيزية للقطع الناقص هى

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

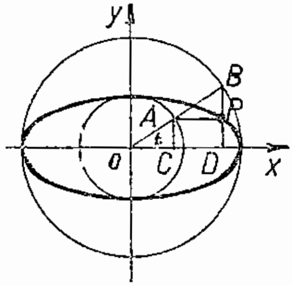
بوضع $x = a \cos t$ فى هذه المعادلة نجد أن $y = b \sin t$.

على هذا تصبح المعادلتان

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t < 2\pi$$

هما المعادلتان البارامتريتان للقطع الناقص .

سنوضح الآن المعنى الهندسى للبارامتر t . لرسم دائرتين مركزهما المشترك هو نقطة الأصل ونصف قطريهما هما a , b كما فى شكل (٤ - ٢٠) . نفرض أن النقطة P (x,y) تقع على القطع الناقص وأن B هى نقطة على الدائره الكبرى لها نفس الاحداثى السينى كما النقطة P . نرمز بالرمز t للزاوية التى يصنعها القطر OB مع محور x . من الشكل ينتج مباشره أن



شكل (٤ — ٢)

$$x = OD = a \cos t,$$

وهذه هى المعادلة البارامترية الأولى . كذلك من الشكل نجد أن

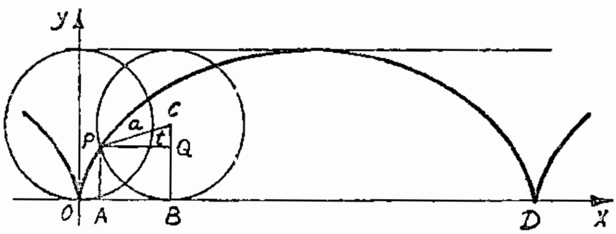
$$AC = b \sin t.$$

ولكن من المعادلة البارامترية الثانية ينتج أن $AC = y$ ، وهذا يعنى أن المستقيم AP يكون موازيا لمحور x .

من هذا نستنتج أن البارامتر t هو الزاوية التى يصنعها O B مع المحور السينى وتسمى هذه الزاوية أحياناً زاوية الاختلاف المركزى eccentric angle .

السيكلويد : Cycloid

السيكلويد هو المنحنى الذى ترسمه نقطة ثابتة على محيط دائرة تتدحرج بدون انزلاق على خط مستقيم ، كما هو مبين بشكل (٤ - ٢١) .



شكل (٤ - ٢١)

نفترض أن الحركة بدأت عندما كانت النقطة p الثابتة على محيط الدائرة عند نقطة الأصل O . ولنحسب الآن احداثي p بعد أن دارت الدائرة زاوية t . فإذا كان a هو نصف قطر الدائرة المتدحرجة فإنه من الشكل ينتج مباشرة أن

$$x = OA = OB - AB ,$$

وحيث أن الدائرة تتدحرج بدون انزلاق فان

$$OB = \text{arc } PB = a \; t ,$$
$$AB = PQ = a \sin t ;$$

من هذا نستنتج أن

$$x = a\,t - a \sin t = a (t - \sin t).$$

بالاضافة إلى ذلك

$$\begin{aligned} y &= PA = QB = CB - CQ \\ &= a - a \cos t = a (1 - \cos t) \end{aligned}$$

وعلى هذا فإن

$$\left.\begin{aligned} x &= a (t - \sin t). \\ y &= a (1 - \cos t). \end{aligned}\right\} \; 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

هما المعادلتان البارامتريتان للسيكلويد . وعندما يتغير t من 0 إلى 2π فان النقطة p ترسم عقداواحدا من السيكلويد.

ويلاحظ أن المسافة $O\,D$ المناظرة لعقد كامل تساوى إفراداً كاملا لمحيط الدائرة أى $2\pi\ a$.

بحذف البارمتر t من المعادلتين الأخيرتين نحصل على x كدالة y مباشرة . فى الفترة $0 \leqslant t \leqslant \pi$ يكون للدالة $y = a\,(1 - \cos t\,)$ دالة عكسيه هى

$$t = \cos^{-1} \frac{a - y}{a} .$$

بتعويض t فى معادلة x نجد أن

$$x = a \cos^{-1} \frac{a - y}{a} - a \sin \left(\cos^{-1} \frac{a - y}{a} \right)$$

or

$$x = a \cos^{-1} \frac{a - y}{a} - \sqrt{2 a y - y^2} .$$

when $o \leqslant x \leqslant \pi a$.

وبالإشارة إلى شكل (٤ - ٢١) نجد أنه إذا كان $\pi a \leqslant x \leqslant 2 \pi a$ يكون

$$x = 2 \pi a - \left(a \cos^{-1} \frac{a - y}{a} - \sqrt{2 a y - y^2} \right) .$$

والجدير بالملاحظة أن الدالة

$$x = a (t - \sin t)$$

لها دلالة عكسية ولكنها غير قابلة للتعبير عنها بدلالة دوال أولية . وعلى هذا فإن الدالة $y = f (x)$ ليس من السهل التعبير عنها بدلالة دوال أولية .

ملاحظة : يبين السيكلويد أنه فى حالات معينة يكون مناسبا استعمال المعادلات البارامترية فى دراسة الدوال والمنحنيات بدلا من العلاقة المباشرة بين x , y (y كدالة x ، أو x كدالة y) .

الاستروید : Astroid

يمثل الأستروید (أو المنحنى النجمى) بالمعادلتين البارامتريتين

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t\ , \\ y &= a\sin^3 t\ , \end{aligned}\right\} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

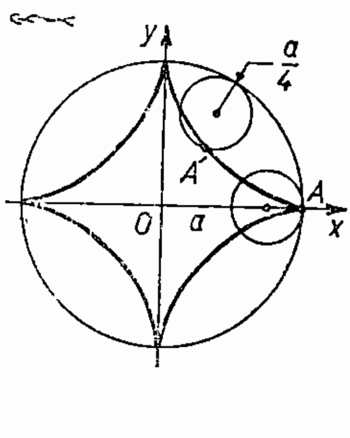
برفع حدود هاتين المعادلتين إلى القـــوة $\frac{2}{3}$ والجمع نحصل على العـــلاقة بين x ، y :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t + \sin^2 t)\ .$$

or

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\ ,$$

ويبين شكل (٤ - ٢٢) منحنى الأسترويد . ويمكن الحصول على هذا المنحنى كمسار نقطة معينة على محيط دائرة نصف قطرها $\frac{a}{4}$ تتدحرج (بدون أنزلاق) من الداخل على محيـــط دائرة نصف قطرها a بحيث تظل الدائرة الصغرى داخل الدائرة الكبرى .



شكل (٤ ـ ٢٢)

ويلاحظ هنا أن المعادلتين البارامتريتين وكذلك المعادلة الكارتيزية تعرف أكثر من دالة واحدة $y = f(x)$. فهى تعرف دالتين مستمرتين فى الفترة $-a \leqslant x \leqslant +a$ ، إحداهما تأخذ قيماً غير سالبة والأخرى تأخذ قيماً غير موجبة .

٤ - ١٣ مشتقة دالة ممثلة بارامتريا

Derivative of a Function Represented Parametrically

نفرض أن y دالة x ، ممثلة بارامتريا بالمعادلتين :

$$\left.\begin{aligned} x &= \phi(t) , \\ y &= \psi(t) , \end{aligned}\right\} t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

نفرض أن الدالتين ϕ ، ψ قابلتان للتفاضل وأن الدالة $x = \phi(t)$ لها الدالة العكسية $t = \Phi(x)$ وهذه بدورها قابلة للتفاضل . وعلى هذا يمكن اعتبار الدالة $y = f(x)$ المعرفة بالمعادلتين البارامتريتين دالة دالة :

$$y = \psi(t) , \; t = \Phi(x)$$

حيث t هو المتغير الوسيط .

باستخدام قاعدة تفاضل دالة دالة نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{d(\Phi x)}{dx}.$$

ومن نظرية تفاضل الدالة العكسية نعلم أن

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = 1 \Big/ \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

وبالتعويض فى العلاقة قبل الأخيرة ينتج :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,\psi(t)}{dt} \Big/ \frac{d\,\varphi(t)}{dt} \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} \,.$$

وهذه العلاقة تمكننا من إيجاد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ لدالة ممثلة بارامترية بدون اللجوء إلى التعبير عن y مباشرة بدلالة x .

مثال (١)

إذا كانت y دالة x معطاه بالمعادلتين البارامتريتين

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t\,, \\ y &= a\sin t\,, \end{aligned}\right\} \ (\,0 \leqslant t < 2\pi\,),$$

فأوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$: i) عند أية قيمة t ii) عندما $t = \frac{\pi}{4}$

الحل :

$$\text{i)}\ \frac{dy}{dx} = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t\ ;$$

$$\text{ii)}\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\cot\frac{\pi}{4} = 1\ .$$

مثال (٢)

أوجد ميل المماس لمنحنى السيكلويد

$$\begin{aligned} x &= a\,(\,t - \sin t\,) \\ y &= a\,(\,1 - \cos t\,) \end{aligned}$$

عند أية نقطة $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

الحل : ميل المماس عند أية نقطة يساوى قيمة المشتقة $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة ، أى

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} .$$

$$\because \frac{dx}{dt} = a\ (1 - \cos t)\ ,\ \frac{dy}{dt} = a \sin t.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a\ (1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} t \cos \frac{1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{1}{2} t}$$

$$= \cot \tfrac{1}{2} t = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) .$$

وعلى ذلك فإن ميل المماس للسيكلويد عند أية نقطة يساوى $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$ ، حيث t هو قيمة البارامتر المناظرة لهذه النقطة . وهذا يعنى أن الزاوية α التى يميل بها المماس على محور x تساوى $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$.

٤ ـ ١٤ المشتقات العليا Derivatives of Higher Orders

نفترض أن $y = f(x)$ دالة قابلة للتفاضل فى فترة ما $[a , b]$ ، فتعتمد عادة قيمة المشتقة $f'(x)$ على x ، أى أن المشتقة $f'(x)$ تكون بدورها دالة فى x . بتفاضل هذه الدالة نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية للدالة $f(x)$.

تسمى مشتقة المشتقة الأولى **مشتقة من الرتبة الثانية** derivative of the second order **أو المشتقة الثانية** second derivative للدالة الأصلية ويرمز لها عادة بأحد الرموز

$$\frac{d^2y}{dx^2} , y'' ,\ y_2 ,\ D^2 y ,\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} ,\ f''(x).$$

فمثلا إذا كان $y = x^5$ فان

$$y' = 5x^4 \; ; \; y'' = (5\,x^4)' = 20\,x^3 .$$

تسمى مشتقة المشتقة الثـــانية مشتقة من الرتبة الثالية derivative of the third order أو المشتقه الثالثة third derivative ويرمز لها بالرموز

$$\frac{d^3y}{dx^3} , \; y''' \; , \; y_3 \; , \; D^3y ; \; \frac{d^3\, f\,(x)}{dx^3} \quad , \; f'''\,(x) \quad .$$

وعلى وجه العمـوم يرمز إلى المشتقـة من الرتبة n للدالة $y = f\,(x)$ (أى مشتقة المشتقة من الرتبة $n - 1$) بالرموز

$$\frac{d^n y}{dx^n} , \; y^{(n)} \; , y_n \; , \; D^n y ; \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} \; , \; f^{(n)}(x) \, .$$

ويرمز أيضا للمشتقة الرابعة والخـامسة والرتب الأعلى بالاعـداد الرومانيه فتـكتب

$$y^{iv} \;\; , \; y^{v} \; , \; y^{vi} \; \ldots\ldots$$

حتى نتفادى كتابة رتبة المشتقة بين قوسين .

فمثلا الدالة $y = x^5$ لها المشتقات العليا

$$y' = 5x^4 \quad , \qquad y'' = 20x^3 \qquad , \qquad y''' = 60\,x^2 \;\; ,$$

$$y^{iv} = y^{(4)} = 120\;x \qquad , \qquad v^{v} = y^{(5)} = 120 \quad ,$$

$$y^{(6)} = y^{(7)} = \;\; .. \;\; .. \;\; .. = 0 \; .$$

مثال (١)

أوجد جميع المشتقات العليا للدالة $y = x^k$ ، حيث k عدد صحيح موجب

الحـل :

$$y' = k\, x^{k-1} ,$$

$$y'' = k\,(k-1)\, x^{k-2} ,$$

$$y''' = k\,(k-1)\,(k-2)\, x^{k-3} ,$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = k\,(k-1)\,(k-2) \quad (k-n+1)\, x^{k-n} ,$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$y^{(k)} = k\,(k-1)\,(k-2) \cdots 3.2.1 = k!$$

مثال (٢)

أوجد المشتقة النونية للدالة $y = e^{kx}$ ، حيث k كمية ثابتة.

الحـل :

$$y' = k\, e^{kx} ,$$

$$y'' = k^2\, e^{kx} ,$$

$$y''' = k^3\, e^{kx} ,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$y^{(n)} = k^n\, e^{kx} .$$

مثال (٣)

أوجد $y^{(n)}$ للدالة $y = \sin x$.

الحـل :

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$y^{iv} = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$\ldots \qquad \ldots \ldots \qquad \ldots$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) .$$

مثال (٤)

أوجد المشتقة النونية للدالة $y = \cos x$.

الحـل :

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$y'' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$\ldots \qquad \ldots \ldots \qquad \ldots \ldots \ldots$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) .$$

مثال (٥)

أوجد $D^n y$ إذا كانت $y = \ln x$.

الحـل :

$$Dy = +\frac{1}{x} ,$$

$$D^2 y = -\frac{1}{x^2} ,$$

$$D^3 y = +\frac{2}{x^3} = (-1)^2 \frac{2!}{x^3} ,$$

$$D^4 y = -\frac{2.3}{x^4} = (-1)^3 \frac{3!}{x^4} ،$$

... ...

$$D^n y = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} ؛$$

قاعدة لابينتز : Leibnitz Rule

سنستنتج الآن قاعدة تمكننا من حساب المشتقة النونية لحاصل ضرب دالتين $u(x)$, $v(x)$. نوجد أولا بعض المشتقات الاولى ثم نستنتج بعد ذلك القاعدة العامة

$$y = u v,$$

$$y_1 = u_1 v + u v_1,$$

$$y_2 = u_2 v + u_1 v_1) + (u_1 v_1 + u v_2) = u_2 v + 2 u_1 v_1 + u v_2,$$

$$y_3 = (u_3 v + u_2 v_1) + 2 (u_2 v_1 + u_1 v_2) + (u_1 v_2 + u v_3)$$

$$= u_3 v + 3 u_2 v_1 + 3 u_1 v_2 + u v_3 .$$

$$y_4 = u_4 v + 4 u_3 v_1 + 6 u_2 v_2 + 4 u_1 v_3 + u v_4$$

ومن الواضح أن تكوين المشتقة من أية رتبة تخضع للقاعدة الآتية :

فك التعبير $(u + v)^n$ بواسطة نظرية ذى الحدين ثم أستبدل اسس قوى u, v فى المفكوك الناتج برتب المشتقات المناظرة ، أما القوى الصفرية (u^0, v^0) فى بداية ونهاية المفكوك فتستبدل بالدوال نفسها (أى مشتقات من الرتبة صفر) :

$$(uv)_n = u_n v + n u_{n-1} v_1 + \frac{n(n-1)}{2!} u_{n-2} v_2 + \dots + u v_n$$

وهذه هى قاعدة لايبنتز .

والاثبات السليم لهذه القـــاعدة يستعين بطريقة الاستنتـــاج الرياضى mathematical induction وتعتمد هذة الطريقة على الآتى :

نفرض أن القاعدة صحيحة للرتبة n ثم نثبت أنها صحيحة للرتبة $(n+1)$.

مثال (١)

أوجد المشتقة النونية للدالة $y = e^{ax} x^3$.

الحل :

$$u = e^{ax}, \qquad v = x^3 ,$$

$$u_1 = ae^{ax}, \qquad v_1 = 3x ,$$

$$u_2 = a^2e^{ax} \qquad v_2 = 2 ,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$u_n = a^n e^{ax}, \qquad v_3 = v_4 = \cdots = 0.$$

$$y_n = a^n e^{ax} x^2 + na^{n-1} e^{ax} . 2x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} e^{ax} . 2$$

$$= a^{n-2} e^{ax} [a^2x^2 + 2nax + n(n-1)].$$

مثال (٢)

باستخدام قاعدة لايبنتز أوجد المشتقة الثالثة للدالة $y = \frac{x}{x+1}$.

الحل : نكتب الدالة المعطاة على الصورة $y = x (x+1)^{-1}$ ونضع

$$u = (x+1)^{-1} \qquad v = x,$$

$$u_1 = -(x+1)^{-2} \qquad v_1 = 1,$$

$$u_2 = 2(x+1)^{-3} \qquad v_2 = 0,$$

$$u_3 = -6(x+1)^{-4} \qquad v_3 = 0,$$

$$y_3 = u_3 v + 3u_2 v_1 + 3u_1 v_2 + uv_3 =$$

$$= -6(x+1)^{-4} . x + 3.2 (x+1)^{-3} . 1$$

$$= -\frac{6x}{(x+1)^4} + \frac{6}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{6}{(x+1)^4}$$

٤ ـ ١٥ المشتقات العليا فى التمثيل البارامترى

Higher Derivatives of Functions Represented Para — metrically

نعتبر الآن موضوع إيجاد المشتقات من الرتب العليا لدالة ممثلة بارامتريا .

نفرض أن y دالة x ممثلة بالمعادلتين البارامتريتين

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} t_1 \leqslant t \leqslant t_2 ;$$

وأن الدالة $x = \varphi(t)$ لها الدالة العكسية $t = t(x)$ فى الفترة $[t_1, t_2]$

أثبتنا فى بند (٤ ـ ١٣) أن المشتقة $\frac{dy}{dx}$ تعطى بالمعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big| \frac{dx}{dt} = \psi'(t) / \varphi'(t)$$

وهذه المشتقة تعتبر دالة المتغير الوسيط t . لإيجاد المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ نفاضل المشتقة الاولى بالنسبة إلى x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \Big| \frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} \Big| \frac{dx}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\ (\psi'(t)/\varphi'(t))\ /\ \varphi'(t)$$

$$= \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{\psi''(t)\ \varphi'(t) - \psi'(t)\ \varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}$$

or

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\ \varphi'(t) - \psi'(t)\ \varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$$

بالمثل يمكن إيجاد المشتقات ذات الرتب الاعلى $\frac{d^3y}{dx^3}$ ، $\frac{d^4y}{dx^4}$ ، . . وذلك

باعتبار كل مشتقة نحصل عليها كدالة t نفاضلها أولا بالنسبة إلى t ثم نقسم

الناتج على $\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}$.

مثال (١)

تعطى y دالة x بالتمثيل البارامترى

$$x = a \cos t\ ,\ y = b \sin t\ ,$$

أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t\ ,\quad \frac{dy}{dt} = b \cos t\ ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Big/ \frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{b}{a} \quad (-\operatorname{cosec}^2 t) / (-a \sin t)$$

$$= -\frac{b}{a^2} \quad \operatorname{cosec}^3 t \;.$$

مثال (٢)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$ إذا علمت أن

$$x = t^2 + 3t - 2 \;;\; y = 2 - t - t^2$$

الحل :
$$\frac{dx}{dt} = 3 + 2t \;,\; \frac{dy}{dt} = -1 - 2t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = -\frac{1+2t}{3+2t} :$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(1+2t)'(3+2t) - (1+2t)\,(3+2t)'}{(3+2t)^2} \quad \frac{1}{3+2t}$$

$$= -\frac{2\,(3+2t) - (1+2t).\,2}{(3+2t)^3}$$

$$= -\frac{4}{(3+2t)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dt}\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right| \Big/ \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{4.\,3.\,2}{(3+2t)^4} \quad \frac{1}{(3+2t)} = \frac{24}{(3+2t)^5}$$

تمارين

١) فاضل الدوال الآتية بالنسبة إلى x :

1) $y = \tan 3x$ 2) $y = 2 \sin x \cos x$

3) $y = \sec (x^2)$ 4) $y = \sin^2 3x$

5) $y = \operatorname{cosec}^3 \frac{1}{3}x$ 6) $y = \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x$

7) $y = x \sin x + \cos x$ 8) $y = \sqrt{\tan 2x}$

9) $y = x^2 \tan^2 \frac{1}{2} x$ 10) $y = (\cos^3 3x) / (1 + x^2)$

11) $y = (\sin 2x) / (1 + \cos 2x)$

12) $y = \sin (\cos x)$ 13) $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

14) $y = \tan (\ln x)$ 15) $y = \log_a (x^2 + 1)$

16) $y = \log_a (x^2 - \sin x)$ 17) $y = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$

18) $y = \ln \ln x$

19) $y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \tan \frac{x}{2}$

20) $y = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln \cos x$

21) $y = a^{x^2}$ 22) $y = 7^{x^2 + 2x}$

23) $y = e^{\cos x} \sin x$ 24) $y = \log \sin x$

25) $y = \cos^{-1} e^x$

26) $y = \tan^{-1}(\ln x) + \ln(\tan^{-1} x)$

27) $y = \ln(e^{x} + 5\sin x - 4\sin^{-1} x)$

28) $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$

29) $y = e^{x} \ln \sin x$

30) $y = e^{\cot^{-1} x}$

٢) باستخدام التفاضل اللوغاريتمى أوجد مشتقات الدوال الآتية :

a) $y = x^{\ln x}$ b) $y = (\ln x)^{x}$

c) $y = x^{\sin x}$ d) $y = (\sin x)^{x}$

e) $y = \sqrt{(x+2)(x+3)/(x+1)}$

f) $y = \dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2+1}\,\sqrt{2x^2+3}}$ g) $y = x^{x^{x}}$

h) $y = x^{x^2}$ i) $y = (\tan^{-1} x)^{x}$

٣) فاضل الدوال الآتية بالنسبة إلى x :

a) $y = \coth(\tan x)$ b) $y = \cosh^2 5x$

c) $y = 4\,\operatorname{cosech}\dfrac{x}{4}$ d) $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

e) $y = \ln \sinh 2x$ f) $y = \cosh^{-1}(\ln x)$

g) $y = \tanh^{-1}(\tan x)$ h) $y = \coth^{-1}(\sec x)$

i) $y = \tanh^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$ j) $y = \cot^{-1}(\sinh x)$

٤) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ ، $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ للدوال الآتية :

a) $x = 4t + 6 \,,\; y = 2 - 5t$

b) $x = 2t^2 - 3 \,,\; y = t^3 + 4t - 1$

c) $x = 3 \cos t \,,\; y = 5 \sin t$

d) $x = e^{-2t} \,,\; y = 1 + 3t^3$

e) $x = 2t + 1 \,,\; y = 2e^{3t}$

f) $x = 2 \sin 2\theta \,,\; y = 2 \sin \theta$

g) $x = a \cos^3 \theta \,,\; y = a \sin^3 \theta$

h) $x = e^{2t} \,,\; y = e^{t} + e^{-t}$ $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}, \dfrac{d^4y}{dx^4}$.

٥) إذا كان $x = 1 + f(t)$ ، $y = [1 - f(t)]/[1 + f(t)]$

فاوجد $\dfrac{dy}{dx}$ بدلالة $f \,,\, f'$

٦) إذا كان $x = a \cos g(t)$ ، $y = b \sin g(t)$ فاثبت أن

$$x\, y^2 \frac{d^2y}{dx^2} = b^2 \frac{dy}{dx} .$$

٧) إذا كان $u = 2 \ln \cot s$ ، $v = \tan s + \cot s$ فاثبت أن

$\frac{du}{dv} = \tan 2s$.

٨) أوجد لكل دالة مشتقتها العليا المبينة بجانبها :

a) $y = 2\sqrt{x}$, y^{iv}.

b) $y = \sqrt{\sec 2x}$, y'' .

c) $y = \ln \sin x$, y'''

d) $y = \dfrac{x^8}{1-x}$, y^{iv}

e) $y = \ln (1 + x)$, $y^{(n)}$.

f) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $y^{(n)}$.

g) $y = x \; e^{x}$, $y^{(n)}$.

h) $y = x^{n-1} \ln x$, $y^{(n)}$.

i) $y = \sin^2 x$, $y^{(n)}$.

j) $y = x \sin x$, $y^{(n)}$.

k) $y = e^{x} \sin x$, porve that $y'' - 2y' + 2y = 0$.

l) $y^2 = 4ax$, y''.

m) $x^2 + y^3 = r^2$, y''.

n) $y^2 - 2xy = 0$, y'''.

o) $y = \tan(x+y)$, y'''.

p) $e^x + x = e^y + y$, y''.

q) show that $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\sinh x) = \sinh x$.

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\sinh x) = \cosh x$$

—