الباب الثالث

حساب التكامل

CALCULUS OF INTEGRATION

٣ - ١ الدالة المقابلة بالتفاضل والتكامل غير المحدد

Antiderivative and Indefinite Integral

تناولنا فى الباب الثانى المسألة الآتية : تعطى دالة مثل $F(x)$ ويطلب إيجاد مشتقتها ، أى الدالة $f(x) = F'(x)$. وفى هذا الباب سنعتبر العملية العكسية . تعطى الدالة $f(x)$ ويطلب ايجاد الدالة $F(x)$ بحيث تساوى مشتقتها الدالة $f(x)$ ، أى $F'(x) = f(x)$.

تعريف (١) : تسمى الدالة $F(x)$ **الدالة المقابلة بالتفاضل** antiderivative للدالة $f(x)$ فى الفترة $[a,b]$ إذا تحققت عند جميع نقط هذه الفترة المساوية

$$F'(x) = f(x)$$

مثال

أوجد الدالة المقابلة للدالة $f(x) = x^2$.

الحل : من التعريف ينتج أن $F(x) = \frac{1}{3} y^3$ هى الدالة المقابلة نظراً لأن $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

ومن الواضح أنه إذا توافرت دالة مقابلة لدالة معطاه $f(x)$ فإن هذه

الدالة المقابلة ليست الوحيدة . فى المثال السابق يمكن إعتبار الدوال الآتيــــة دوال مقابلة :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1 \quad , \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7$$

أو عامة $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ ، حيث C ثابت اختيارى ، ذلك لأن

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2$$

ومن ناحية أخرى يمكن إثبات أن الدوال التى على صورة $\frac{1}{3}x^3 + C$ تشمل جميع الدوال المقابلة للدالة x^2 ، وهذا ينتج مباشرة من النظرية الآتية .

نظـرية :

إذا كانت $F_1(x)$ ، $F_2(x)$ دالتين مقابلتين للدالة $f(x)$ فى الفترة $[a, b]$ ، فإن الفرق بينهما يكون كمية ثابتة .

الاثبـات : من التعريف (١) يتحقق

$$F_1'(x) = f(x) \quad , \quad F_2'(x) = f(x) \qquad \dots \quad \dots \quad (1)$$

لأية قيمة x فى الفترة $[a, b]$. بوضع

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x) \qquad \dots \quad \dots \quad (2)$$

ينتج من (1) أن

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

or

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv 0$$

لأية قيمة – فى الفترة $[a, b]$. ولكن من $\phi'(x) = 0$ ينتج أن $\phi(x)$ كمية ثابتة .

من هذه النظرية ينتج مباشرة أنه إذا وجدت دالة مقابلة $F(x)$ للدالة المعطاة $f(x)$ فإن أية دالة مقابلة أخرى لابد وأن تأخذ الصورة $F(x) + C$ حيث C كمية ثابتة .

تعريف (٢) : إذا كانت الدالة $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ فان التعبير $F(x) + C$ يسمى **التكامل غير المحدد** indefinite integral للدالة $f(x)$ ويرمز له بالرمز $\int f(x)\,dx$. من التعريف نكتب

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

إذا تحقق $F'(x) = f(x)$. وفى هذا التعبير تسمى الدالة $f(x)$ **موضوع التكامل** integrand والعلامة $\int$ **علامة التكامل** integral sign كما يسمى التعبير الذى يلى علامة التكامل أى $f(x)\,dx$ **عنصر التكامل** element of integration ، C **ثابت التكامل** constant of integration .

نستنتج من هذا أن التكامل غير المحدد هو **مجموعة من الدوال** family of functions على الصورة $y = F(x) + C$. ومن الناحية الهندسية نجد أن التكامل غير المحدد هو مجموعة من المنحنيات يمكن الحصول على أى منها بالازاحة المتوازية لأحد هذه المنحنيات إلى أعلى أو إلى أسفل فى اتجاه محور y .

ويمكن تعيين قيمة ثابت التكامل C إذا أعطينا شروطاً اضافية فى المسألة كما فى المثال التالى .

مثـــال

ميل المماس عند أية نقطة من منحنى يساوى $2x$ ، أوجد معادلة المنحنى إذا علمت أنه يمر بالنقطة $(2,7)$.

الحل : إذا كتبنا معادلة المنحنى على الصورة $y = F(x)$ ، يكون ميل المماس هو

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

وبالتخمين (مؤقتاً) نجد أن

$$y = x^2 + C.$$

وهذه المعادلة تمثل مجموعة لا نهائية من القطاعات المكافئة الرأسية التى محورها هو محور y . وتنشأ جميع المنحنيات بإزاحة القطع المكافىء $y = x^2$ إلى أعلى وإلى أسفل فى إتجاه محور y . والشرط الموجودفى رأس المسألة يعنى اختيـــار ذلك المنحنى من هذه المجموعة الذى يمر بالنقطة المعطاه ، أى تعيين قيمـة C المناظرة . لذلك نعوض إحداثيات النقطة المعطاه فى المعادلة العـامة للمجموعة ونحسب قيمة C :

$$\text{At} \quad (2,7): \qquad 7 = 2^2 + C \qquad \text{or} \qquad C = 3$$

فتـكون المعادلة المطلوبة هى $y = x^2 + 3$.

وهنا يأتى السؤال : هل تتواجد الدوال المقابلة (وبالتالى التكامل غير المحدد) لكل دالة $f(x)$ ؟ والجواب لا طبعا . ولنلاحظ الآن (بدون إثبات) أنه إذا

كانت الدالة $f(x)$ مستمرة فى الفترة $[a, b]$. فانه تتواجد دالة مقابلة لهذه الدالة (وبالتالى تكامل غير محدد) .

تسمى عمليـــة إيجاد الدالة المقابلة لدالة معطـــاه $f(x)$ بعملية تـكامل integration الدالة $f(x)$.

٣ – ٢ بعض خواص التكامل غير المحدد

Some Properties of Indefinite Integral

١) تفاضل التكامل غير المحـــدد يساوى موضوع التكامل ، أى إذا كان $F'(x) = f(x)$ فان

$$\left(\int f(x)\, dx \right)' = \left(F(x) + C \right)' = f(x)$$

٢) تفاضلة التكامل غير المحدد تساوى عنصر التكامل ، أى

$$d \left(\int f(x)\, dx \right) = f(x)\, dx.$$

وهذا ينتج مباشرة من الخاصية الأولى .

٣) التكامل غير المحدد لتفاضلة دالة ما يساوى نفس الدالة مضافاً اليها ثابت اختيارى ، أى

$$\int d\, F(x) = F(x) + C .$$

والإثبات بحساب تفاضلة كل من الطرفين ($= d\, F(x)$) .

٤) التكامل غير المحدد للمجموع الجبرى لعدد محدود من الدوال يســـاوى نفس المجموع الجبرى لتكاملات هذه الدوال ، أى

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx .$$

ولإثبات ذلك نفاضل طرفى هذه العلاقة آخذين فى الاعتبار الخاصية الأولى فنجد أن

$$\left(\int [f_1(x) + f_2(x)]\, dx\right)' = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx\right)' = \left(\int f_1(x)\, dx\right)' + \left(\int f_2(x)\, dx\right)'$$

$$= f_1(x) + f_2(x)$$

٥) يمكن أخذ المعامل الثابت فى موضوع التكامل خارج علامة التكامل ، أى إذا كانت a كمية ثابتة فان

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

لإثبات ذلك نفاضل طرفى هذه المعادلة :

$$\left(\int a\, f(x)\, dx\right)' = a\, f(x),$$

$$\left(a \int f(x)\, dx\right)' = a \left(\int f(x)\, dx\right)' = a\, f(x).$$

٦) ضرب x فى ثابت a :

If $\int f(x)\, dx = F(x) + C,$

then $\int f(ax)\, dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$

بتفاضل طرفى المعادلة الأخيرة نجد أن

$$\left(\int f(ax)\, dx \right)' = f(ax)$$

$$\left(\frac{1}{a} F(ax) + C \right)' = \frac{1}{a} \left(F(ax) \right)' = \frac{1}{a} F'(ax)\, a$$

$$= F'(ax) = f(ax) \,.$$

٧) إضافة ثابت b إلى x :

$$\text{If} \quad \int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

$$\text{then} \quad \int f(x+b)\, dx = F(x+b) + C,$$

والإثبات بتفاضل طرفى المعادلة الأخيرة .

٨) الجمع بين الحالتين (٦) ، (٧) :

$$\text{If} \quad \int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

$$\text{then} \quad \int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

مثال (١)

$$\int x^5\, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{6} x^6 + C$$

مثال (٢)

$$\int \sqrt[3]{x^4}\, dx = \int x^{\frac{4}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{3}{5}\, x^{5/3} + C$$

مثال (٣)

$$\int (x+1)(x-2)\ dx = \int (x^2 - x - 2)\ dx$$

$$= \int x^2\ dx - \int x\ dx - 2 \int dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - \tfrac{1}{2} x^2 - 2x + C$$

مثال (٤)

$$\int \frac{x^3 - 2x + 3}{x^3}\ dx = \int (1 - 2x^{-2} + 3x^{-3})\ dx$$

$$= x - 2\ \frac{x^{-1}}{-1} + 3\,\frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$= x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + C.$$

مثال (٥)

$$\int (2x^3 + 5\sqrt{x})\ dx$$

$$= 2\,\frac{x^4}{4} + 5\,\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \tfrac{1}{2} x^4 + \frac{10}{3}\ x\sqrt{x} + C$$

مثال (٦)

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\,\sqrt[4]{x} \right)\ dx$$

$$= 3 \int x^{-\frac{1}{3}}\, dx + \tfrac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx + \int x^{5/4}\, dx$$

$$= 3\, \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \tfrac{1}{2}\, \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{9/4}}{9/4} + C$$

$$= \frac{9}{2}\, \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}\, x^2\, \sqrt[4]{x} + C.$$

مثال (٧)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3} + C$$

مثال (٨)

$$\int \sqrt[3]{7x}\, dx = \int (7x)^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{(7x)^{4/3}}{4/3} \cdot \frac{1}{7} + C$$

$$= \tfrac{3}{4}\, x\, \sqrt[3]{7x} + C$$

مثال (٩)

$$\int (2x-6)^8\, dx = \frac{(2x-6)^9}{9} \cdot \tfrac{1}{2} + C$$

$$= \frac{1}{18}\, (2x-6)^9 + C$$

٣ ـ ٣ التكامل المحدد Definite Integral

نفرض أن $F(x)$ هى الدالة المقابلة بالتفاضل للدالة $f(x)$ أى أن

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

فإذا أخذنا قيمتين للمتغير x مثل a , b فإن قيمـــة التكامل عند x = a تســـاوى

$$F(a) + C$$

وقيمته عند x = b تساوى

$$F(b) + C$$

وبطرح قيمتى التكامل ينتج أن

$$[F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$

وهذا الفرق لا يتوقف على الثابت C ، ويسمى بقيمة التكامل المحـدد بين النهايتين x = a ، x = b . ويـكتب التكامل المحدد على الصورة

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \dots \quad (1)$$

وتسمى a النهاية السفلى lower limit ، b النهاية العليـــا upper limit للتكامل المحدد ، كما تسمى الفترة [a, b] فترة التكامل interval of integration .

ويطلق على العلاقة (1) صيغة نيوتن - ليبنتز . وللحصول على قيمة التكامل المحدد ، نوجد أولا الدالة المقابلة بالتفاضل F (x) باستخدام طرق التكامل غير المحدد ، ثم نعوض فيها بقيمتى النهايتين العليـــا ثم السفلى على الترتيب ونحسب الفرق بينهما ، ونكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

مثال (١)

$$\int_a^b x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

مثال (٢)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \frac{2}{2} \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3} - 1$$

٣ ـ ٤ التكامل المحدد كنهاية لمجموع

Definite Integral as a Limit of a Sum

نفرض أن $y = f(x)$ هى دالة متصلة معرفة فى الفترة $[a, b]$ ، شكل (٣-١).
نقسم الفترة $[a, b]$ إلى n من الأقسام (ليست بالضرورة متساوية) بالنقط :

$$x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b, \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

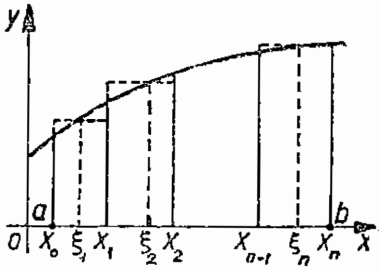
Put $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

نختار نقطة فى كل من الفترات

$$[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

ونسمى النقط المختارة $\zeta_n, \ldots, \zeta_1$ على الترتيب كما فى شكل (٣ - ١) ، حيـــث

$$x_0 < \zeta_1 < x_1, \ldots, x_{n-1} < \zeta_n < x_n$$



شكل (٣ ـ ١)

نوجد قيمـــة الدالة عند النقط المختارة ، أى $f(\zeta_1)$ ، . . ، $f(\zeta_n)$ ونكون المجموع

$$S_n = f(\zeta_1)\,\Delta x_1 + f(\zeta\;)\,\Delta x_2 + \dots + f(\zeta_n)\;\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\;\Delta\,x_i$$

يسمى هذا المجمـــوع **مجموع التكامل** integral sum للدالة $f(x)$ فى الفترة $[a, b]$.

ويعتمد المجموع S_n على الطريقة التى قسمنا اليها الفترة $[a, b]$ إلى أقسام $[x_{i-1}\,،\,x_i]$ وكذلك على اختيار النقط ζ_i فى هذه الأقسام . فإذا رمزنا بالرمز $\max\;\Delta x$ إلى أطول قسم فإن $\max\;\Delta x \longrightarrow 0$ عنـــدما $n \longrightarrow \infty$ أى أن طول أكبر قسم يؤول إلى الصفر عندما يزداد عدد الأقسام زيادة لا نهائية .

نفرض أننا أجرينا عمليات تقسيم مختلفة للفترة $[a, b]$ واعتبرنا اختيارات مختلفة للنقط ζ_i وحسبنا فى كل مرة المجموع $\Sigma\; f(\zeta_i)\;\Delta\,x_i$ وأخذنا نهاية هذا

المجموع عندما $\max \Delta x \longrightarrow 0$ ووجدنا فى جميع الحالات أن نهاية المجموع تكون دائما واحدة فاننا نقول أن الدالة **قابلة التكامل** integrable فى الفترة $[a, b]$ وتكون النهاية الواحدة التى حصلنا عليها هى قيمة **التكامل المحدد** definite integral للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ ونكتب

$$\lim_{\max \Delta x \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

ملاحظات :

١) يعتمد التكامل المحدد على شكل الدالة $f(x)$ وعلى نهايتى التكامل فقط ولكنه لايعتمد على متغير التكامل الذى يمكن تسميته بأى حرف :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \dots = \int_a^b f(z)\, dz$$

٢) عند تعريف التكامل المحدد $\int_a^b f(x)\, dx$ فرضنا أن $a < b$. فاذا كان $b < a$ فإنه ينتج من التعريف أن

$$\int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx$$

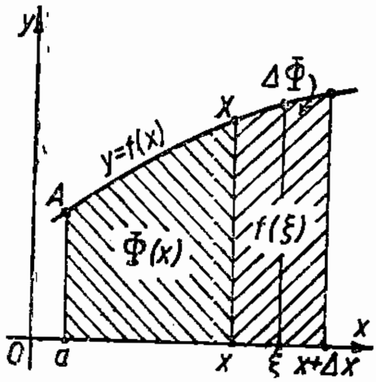
٣) فى حالة $a = b$ يكون $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

٣ ـ ٥ المساحة تحت المنحنى Area Under a Curve

نفرض أنه فى التكامل المحـــدد $\int_a^b f(x)\,dx$ تـكون النهـاية السفلى a ثابتة والنهاية العليا b متغيرة . فى هذه الحالة تتغير قيمة التكامل تبعاً لذلك ، أى التكامل يصبح دالة النهاية العليا . وحتى نحتفظ بالمسميات المعتادة نرمز للنهـــاية العليا بالرمز x ونسمى متغير التكامل t فيأخذ التكامل الصورة

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \ldots (1)$$

إذا كانت f (t) دالة غير سالبة فإن الـكمية φ (x) تـكون مساوية عـدديا للمساحة aA Xx المبينة فى شكل (٣ ـ ٢) ومن الواضح أن هذه المساحـة تتغير مـــع x .



شكل (٣ ـ ٢)

ولنوجد الآن مشتقة φ (x) بالنسبة إلى x . وبمعنى آخـر مشتقة التكامل المحدد (1) بالنسبة إلى النهاية العليا .

نعطى المتغير x زيادة Δx (موجبة أو سالبة) فيكون :

$$\phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

وتكون الزيادة فى الدالة $\phi(x)$ مساوية

$$\Delta\phi = \phi(x+\Delta x) - \phi(x)$$

$$= \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

$$= f(\zeta)\,\Delta x, \qquad x \leqslant \zeta \leqslant x + \Delta x$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \frac{f(\zeta)\,\Delta x}{\Delta x} = f(\zeta).$$

$$\therefore \quad \phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\zeta)$$

وحيث أن $x \to \zeta$ عندما $\Delta x \to 0$ ، لذلك يكون

$$\phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(\zeta) = \lim_{\zeta \to x} f(\zeta) = f(x)$$

نظراً لإتصال الدالة $f(x)$.

والمعنى الهندسى لهذه النتيجة ، شكل (٣-٢) ، هو أن المشتقة $\phi'(x) = f(x)$ تساوى طول الاحداثى الرأسى $X\,x$.

نفرض أن $F(x)$ هى الدالة المقابلة للدالة $f(x)$ فيكون

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C.$$

وفى حدود اختيار مناسب للثابت C تتحقق هذه العلاقة لجميع قيم x أى أنها متطابقة . ولتعيين الثابت C نضع $x = a$ فى هذه المتطابقة فينتج

$$\varphi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C \quad \text{or} \quad C = -F(a)$$

$$\therefore\ \varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

وبوضع $x = b$ نحصل على

$$\varphi(b) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

أى أن المساحة الكلية تحت المنحنى $y = f(x)$ فى الفترة $[a, b]$ تعطى بالتكامل المحدد

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

٣ ـ ٦ الخواص الأساسية للتكامل المحدد

Basic Properties of the Definite Integral

الخاصيه الأولى : يمكن أخذ المعامل الثابت خارج علامة التكامل المحدد :

$$\int_a^b A\, f(x)\, dx = A \int_a^b f(x)\, dx \,. \; (A = \text{const.})$$

الخاصيه الثانيه : التكامل المحدد لمجموع جبرى من دوال متعددة يساوى المجموع الجبرى لتكاملات هذه الدوال . فى حالة دالتين يكون

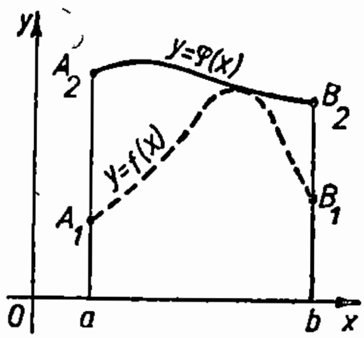
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

الخاصيه الثالثه : إذا حققت الدالتـــان $f(x)$ ، $\varphi(x)$ الشـــرط $f(x) \leqslant \varphi(x)$ فى الفترة $[a, b]$ حيث $a < b$ ، فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

إذا كان $f(x) > 0$ ، $\varphi(x) > 0$ فانه يمكن شرح هذه الخاصية هندسياً كما فى شكل (٣ - ٣) . حيث $\varphi(x) \geqslant f(x)$ فان المساحة $b\; B_1\; A_1\; a$ لاتزيد عن المساحة $b\; B_2\; A_2\; a$.

الخاصيه الرابعه : إذا كانت m ، M هى أصغر وأكبر قيمة للدالة $f(x)$ فى الفترة $[a, b]$ وكان $a \leqslant b$ ، فان



شكل (٣ ـ ٣)

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f\,(x)\,dx \leqslant M\,(b-a)\,.$$

الاثبات :

حسب الفرض يكون $m \leqslant f\,(x) \leqslant M$ وتعطى الخاصية الثالثة

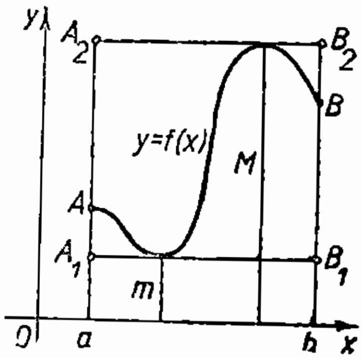
$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx.$$

ولكن

$$\int_a^b m\,dx = m\,(b-a)\,, \quad \int_a^b M\,dx = M\,(b-a).$$

بتعويض ذلك فى المتباينة السابقة ينتج المطلوب .

ويمكن توضيح المعنى الهندسى لهذه الخاصية كما فى شكل (٣-٤) . على فرض أن $f\,(x) \geqslant 0$ ، تقع المساحة $a\,A\,B\,b$ بين مساحتى المستطيلين $a\;A_1\;B_1\;b$ ، $a\;A_2\;B_2\;b$.



شكل (٣ ـ ٤)

الخاصيه الخامسه : نظريه القيمه المتوسطه Mean - Value Theorem

إذا كانت الدالة f (x) مستمرة فى الفترة [a, b] فانه توجد نقطة ζ فى هذه الفترة بحيث يتحقق

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\zeta).$$

الأثبات :

نفرض أن a < b ، فاذا كانت m ، M هما على الترتيب أصغر وأكبر قيمة للدالة f (x) فى الفترة [a, b] ، فحسب الخاصية الرابعة يكون :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

من هذه المتباينة ينتج

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \mu \text{ , where } m \leqslant \mu \leqslant M.$$

وتبعاً لفرضنا أن $f(x)$ مستمرة فى الفترة $[a, b]$ لذلك تأخذ هذه الدالة جميع القيم الواقعة بين m ، M فى هذه الفترة . وعلى ذلك توجد نقطة $\zeta\,(a \leqslant \zeta \leqslant b)$ بحيث يكون $\mu = f\,(\zeta)$ ، أى أن

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = f\,(\zeta)\,(b-a).$$

تسمى الكمية

$$f\,(\zeta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx$$

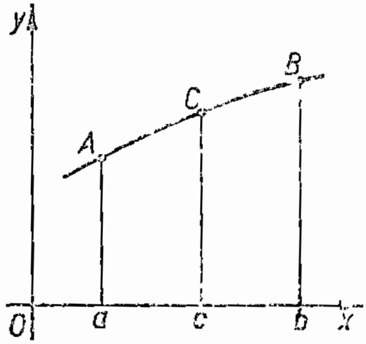
القيمه المتوسطه للدالة فى الفترة $[a, b]$. والمعنى الهندسى للقيمة المتوسطة هو ارتفاع المستطيل الذى له نفس المساحة كالمساحة تحت المنحنى (قيمـــة التكامل المحدد) والذى قاعدته $(b-a)$ أى طول فترة التكامل .

الخاصيه السادسة : لأية ثلاثة أعداد a ، b ، c تتحقق المتساوية

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f\,(x)\,dx$$

بشرط تواجد التكاملات الثلاثة .

يبين شكل (٣ - ٥) المعنى الهندسى للخاصية السادسة فى حالة ما إذا كان $f\,(x) > 0$ ، $a < c < b$. فى هذا الشكل نجد المساحة $a\,A\,B\,b$ تساوى مجموع المساحتين $c\,A\,C\,a$ ، $b\,B\,C\,c$.



شكل (٣ ـ ٥)

مثـــال

أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2$ فى الفترة $[0, 3]$.

الحـــل : القيمة المتوسطة تعطى من

$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a} = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 3$$

تمارين

١) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} \;,\; \int (1-2x)\,(1+3x)\,dx \;,\; \int \frac{(x+2)^2}{x}\,dx,$$

$$\int (2x+3)^3\,dx \;,\; \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) dx,$$

$$\int \frac{3x^4 + 2x^2 + 5}{x^2 + 1}\,dx,$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$$

٢) أحسب قيمة كل من التكاملات المحددة الآتية :

$$\int_a^b x^2\,dx \;,\quad \int_a^b \sqrt{x}\,dx \;,\; \int_0^1 x^4\,dx \;,$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \;,\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \;.$$

٣) أوجد القيمة المتوسطة للدوال الآتية فى الفترة المبينة قرين كل منها :

$$f(x) = 2 + 4x \;.\; [\,-1,2\,].$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \;,\; [\,2,7\,].$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x \;,\; [\,0,2\,].$$