# الباب الثانى

## حساب التفاضل

## DIFFERENTIAL CALCULUS

نستعرض فى هذا الباب موضوع تعيين معدل تغير الكمية $y$ كدالة المتغير $x$ . وسنعتبر أولا العلاقة $y = f(x)$ وكذلك الكميتين $x$ , $y$ مجرد رموز رياضية بحته بدون أن نعطيها أى معنى طبيعى ، ونؤجل هذا للتطبيقات .

### ٢ - ١ مشتقة دالة Derivative of a Function

نفرض أن $y = f(x)$ هى دالة معرفة ، ومتصلة فى الفترة $[a, b]$ .نأخذ نقطتين فى هذه الفترة مثل $x + \Delta x , x$ . فى مناقشتنا الآتية سنعامل $x$ على أنها كمية ثابتة ، $\Delta x$ باعتبارها الزيادة فيها . وقد وجدنا فى الباب السابق ( بند ١ - ٢٠ ) أن الزيادة $\Delta x$ فى $x$ تسبب زيادة $\Delta y$ فى الدالة $y$ ، أى أن

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

نقسم الآن الزياده $\Delta y$ فى الدالة على الزياده $\Delta x$ فى متغيرها المستقل فنجد أن

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وهذه النسبة هى متوسط معدل تغير $y$ بالنسبة إلى $x$ فى الفترة $[x, x + \Delta x]$ وهى مقياس لسرعة تغير الدالة فى هذه الفترة . وقد وجدنا

فى الباب السابق ( بند ١ – ٢٠ ) أن $y$ ، تعتمد على $x$ ، أى دالة فى $x$ ، ( مع ثبوت $x$ ) ، وعلى هذا فان النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تكون أيضاً دالة فى $\Delta x$ . نترك الآن $\Delta x$ تؤول إلى الصفر بلا قيود . ونظراً لاتصال الدالة فإن اقتراب $\Delta x$ من الصفر يسبب اقتراب $\Delta y$ أيضاً من الصفر كما أوضحنا فى البند المذكور . نفرض أن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ لها نهاية محدودة عند ما تؤول $\Delta x$ إلى الصفر ونرمز لها بالرمز $f'(x)$ :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

والمعنى الطبيعى لهذه النهاية هو معدل تغير الدالة $f(x)$ بالنسبة لمتغيرها عند قيمة معينة $x$ لهذا المتغير . وفى التحليل الرياضى يطلق على هذه النهاية إسم مشتقة الدالة المعطاة عند النقطة $x$ .

**تعريف** : نهاية النسبة بين الزيادة فى دالة ماعند $x$ والزيادة فى متغيرها عند هذه النقطة عند ما تؤول الزيادة الأخيرة إلى الصفر ، تسمى مشتقة الدالة عند هذه النقطة .

من تعريف المشتقة نلاحظ أن كل قيمة للمتغير $x$ تناظرها قيمة لمعدل تغير الدالة بالنسبة إلى $x$ . وعلى هذا فإن معدل التغير $f'(x)$ هو دالة جديدة للمتغير $x$ ولذلك تسمى أيضاً الدالة المشتقة drived function للدالة المعطاة $f(x)$ وتستعمل الرموز التالية للدلالة على المشتقة :

$$y' \,,\ \frac{dy}{dx} \,,\ f'(x) \,,\ \frac{df(x)}{dx} \,;\ Dy \,,\ Df .$$

نجمل الآن الخطوات المتبعة فى إيجاد الدالة المشتقة :

١) أوجد الزيادة $\Delta y$ للدالة ، أى الفرق بين قيمتها عند $x + \Delta x$ و $x$ :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

٢) أوجد النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ بقسمة الزيادة $\Delta y$ التى حصلنا عليها على $\Delta x$ .

٣) خذ نهاية هذه النسبة عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ .

**مثال (١)**

أوجد مشتقة الدالة $y = x^3 + 1$ عند النقطة $x$ .

**الحـــل :**

1) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 + 1$

$$= x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 1,$$

$f(x) = x^3 + 1,$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= 3x^3 \Delta x + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 ,$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \,.\, \Delta x + (\Delta x)^2 ;$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [\, 3x^2 + 3x \,\Delta x + (\Delta x)' \,] = 3x^2 ,$$

**مثال (٢)**

أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{1}{x}$ حيث $x \neq 0$ .

الحـــل :

1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \;;$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)} \;;$

3) $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ -\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}$ .

**مثال (٣)**

أوجد الدالة المشتقة للدالة $y = \sqrt{x}$ عندما $x > 0$ .

الحـــل :

1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \;;$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

$$= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \quad ;$$

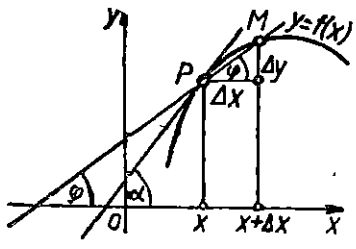
$$3) \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ملاحظه : رمزنا بالرمز $\frac{dy}{dx}$ لنهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، وليس المقصود هنا أن dy هي نهاية $\Delta y$ وأن dx هي نهاية $\Delta x$ وإلا لكنا حصلنا على الصورة غير المعينة $\frac{0}{0}$ وإنما يقصد بالرمز $\frac{dy}{dx}$ الدلالة على المشتقة أى نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ولذلك يجب اعتبار $\frac{dy}{dx}$ وحدة واحدة وليس كسراً يمكن فصل بسطه عن مقامه .

## ٢ ـ ٢ المعنى الهندسى للمشتقه

Geometric Meaning of the Derivative

نعتبر الدالة f (x) ومنحنيها المناظر y = f (x) كما فى شكل ( ٢ - ١ ) عند قيمة معينة للمتغير x تأخذ الدالة القيمة y = f (x) . وتناظر هاتين القيمتين x , y النقطة P ( x . y ).




شكل ( ٢ ـ ١ )

إذا تركنا $x$ تزداد بمقدار $\Delta x$ فان القيمة الجديدة $x + \Delta x$ للمتغير المستقل تناظرها قيمة جديدة للدالة $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. وبالتالى نحصل على نقطة جديدة مناظرة على المنحنى وهى النقطة $M(x + \Delta x, y + \Delta y)$. نرسم القاطع $PM$ ولتكن $\phi$ هى زاوية ميل هذا القاطع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. نكون النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ فمن الشكل يتضح مباشرة أن

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \phi = \text{slope of secant } PM .$$

إذا إقتربت الآن $\Delta x$ من الصفر فإن النقطة $M$ تتحرك على المنحنى مقتربه دائما من النقطة $P$، كما يدور القاطع $PM$ حول $P$ وتتغير بذلك الزاوية $\phi$ مع $\Delta x$. وعندما $\Delta x \to 0$ فإن $\phi$ تصل الى نهاية معينة $\alpha$ والمستقيم المار بالنقطه $P$ ينطبق فى النهاية على المماس للمنحنى عند النقطه $P$. من هذا نستنتج أن

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan \phi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) .$$

وعلى هذا فإن

$$f'(x) = \tan \alpha$$

أى أن قيمه المشتقه $f'(x)$ عند قيمه معينه للمتغير $x$ تساوى ميل المماس لمنحنى الداله $f(x)$ عند النقطه المناظرة $P(x, y)$.

**مثـال**

أوجد ميــــل المماس للمنحنى $y = x^3 + 1$ عنـد كل من النقطتين $P_1(\frac{1}{2}, \frac{9}{8})$ و $P_2(-1,0)$.

**الحل** : أوجدنا فى مثال (١) من البند السابق مشتقة الدالة $f(x) = x^3+1$ وهى $f'(x) = 3x^2$ . بتعويض الاحداثى السينى لكل من النقطتين فى هذه المشتقة نحصل على ميل المماس عند كل نقطة :

$$\text{At } P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{8}\right): \tan\alpha_1 = f'(\tfrac{1}{2}) = 3 \times \tfrac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$\text{At } P_2(-1,0): \tan\alpha_2 = f'(-1) = 3(-1)^2 = 3.$$

## ٢-٣ قابلية الدوال للتفاضل Differentiability of Functions

تعريف : إذا كانت للدالة $y = f(x)$ مشتقة عند النقطة $x = x_0$ أى أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

قيل إن الدالة قابلة للتفاضل أولها مشتقة عند $x = x_0$ .

إذا كانت الدالة قابلة للتفاضل عند كل نقطة فى الفترة $[a, b]$ أو $(a, b)$ قيل إنها قابلة للتفاضل فى هذه الفترة .

**ملاحظة** : إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للتفاضل عند نقطة ما $x = x_0$ فهى بالضرورة متصلة عند هذه النقطة. وعلى هذا لا يمكن لدالة ما أن يكون لها مشتقة عند نقطة عدم الاتصال .

أما إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطـة ما مثل $x = x_0$ فإن هذا لا يؤدى بالضرورة إلى قابليتها للتفاضل عند هذه النقطة ، أى يجوز للداله $f(x)$ ألا يـكون لها مشتقة عند النقطة $x_0$ ، وهذا يتضح من المثالين التاليين .

**مثـال (١)**

تعرف الدالة $f(x)$ فى المنطقة $[0, 2]$ كما يلى :

$$f(x) = x \text{ when } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(x) = 2x - 1 \text{ when } 1 < x \leqslant 2.$$

لايوجد لهذه الدالة مشتقة عند $x = 1$ بالرغم من كونها مستمرة عنـد هذه النقطة .

وفى الحقيقة عندما تـكون $\Delta x > 0$ نجد أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(1 + \Delta x) - 1] - [2 \times 1 - ]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \Delta x}{\Delta x} = 2.$$

أما حينما تـكون $\Delta x > 0$ نجد أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1 + \Delta x] - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

وعلى هذا فإن النهاية تعتمد على إشارة $\Delta x$ ؛ وهذا يعنى أن الدالة ليس لها مشتقة عند $x = 1$ . والمعنى البيانى لهذه الحالة هو أن عند $x = 1$ لا يوجد لمنحنى الدالة مماس محدد .

أما بالنسبة لاتصال الدالة عند النقطة $x = 1$ فهو متوافر نظراً لأن

$$\Delta y = \Delta x \quad \text{when} \quad \Delta x < 0,$$
$$\Delta y = 2\Delta x \quad \text{when} \quad \Delta x > 0,$$

وفى كلتا الحالتين $\Delta y \longrightarrow 0$ عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ .

**مثال (٢)**

الدالة $y = \sqrt[3]{x}$ معرفة ومتصلة لجميع قيم المتغير المستقل .

لنختبر الآن هذه الدالة من حيث وجود مشتقة لها عند $x = 0$ . لذلك نوجد قيمتى الدالة عند $x = 0$ وعند $x = 0 + \Delta x$ . فعند $x = 0$ يكون $y = 0$ وعند $x = 0 + \Delta x$ نجد أن $y + \Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}$ . من هذا نجد أن الزيادة فى الدالة هى

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

نوجد الآن نهاية النسبة بين الزيادة فى الدالة والزيادة فى متغيرها المستقل :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty .$$

أى أن النسبة بين الزيادة فى الدالة والزيادة فى المتغير عند النقطة $x = 0$

تقترب من ما لا نهـاية عندما $0 \longrightarrow \Delta x$ ( وعلى ذلك لا توجد نهاية ) .
نتيجة لذلك تـكون الدالة غير قابلة للتفاضل عند $x = 0$ . ويصنـع المماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة مع المحور الأفقى زاوية تساوى $\frac{\pi}{2}$ وهذا يعنى أنه ينطبق على المحور الرأسى .

## ٢ — ٤ السرعة The Velocity

فى دراستنا الحركة جسيم على خط مستقيم نأخذ عادة المسار كمحور للاحداثيات ونختار عليه نقطة O كنقطة أصل ونعين الإتجاه الموجب على هذا المحور وكذا وحدة قياس المسافة . ثم نبدأ آنذاك فى دراسة الحركة عن طريق معادلة تعطى إحداثى الجسيم كدالة الزمن $t$ المنقضى منذ بدء الحركة .

نفرض أن قانون الحركة تعطيه المعادلة $s = f(t)$ والمطلوب تعيين سرعة الجسم فى لحظة ما $t$ . فاذا فرضنا أن المسافة والزمن هما الـكميتان الأساسيتان اللتان يمكن قياسها ففى الزمن $t$ يحتل الجسيم الموضـع

$$s = f(t)$$

وفى الزمن $t + \Delta t$ يـكون الجسيم فى الموضع

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t) .$$

وعلى هـذا فى الفـترة الزمنية من $t$ إلى $t + \Delta t$ يـكون الجسيم قد إنتقـل مسافة

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t) .$$

وجميع الـكميات السابقة هى كميات طبيعية يمكن قياسها .

نعرف الآن السرعة المتوسطة average velocity على أنها خارج قسمة $\Delta s$ على $\Delta t$ ، أى

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} .$$

لإيجاد السرعة اللحظية instantaneous velocity عند الزمن $t$ نأخذ السرعة المتوسطة على فترات زمنية متناقصة $\Delta t$ . هنا نصل إلى مايسمى بالسرعة عند الزمن $t$ كنهاية للسرعة المتوسطة عند ما $\Delta t \longrightarrow 0$ ، أى أن

$$v = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} .$$

ومن تعريف المشتقة ينتج أن

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{f}(t)$$

حيث ترمز النقطة فوق $f$ إلى المشتقة بالنسبة للزمن .

**مثــال**

إذا تحرك جسم فى خط مستقيم ( السقوط من سكون ) تبعاً للعلاقـــة $s = \frac{1}{2} g t^2$ فاننا نجد أن سرعته عند الزمن $t$ هى

$$v = \frac{ds}{dt} = g\, t.$$

## ٢ ـ ٥ النظريات الأساسية للتفاضل

Fundamental Theorems on Differentiation

**أولا : مشتقة الدالة الثابتة تساوى صفرا عند أية نقطة $x$ .**

نفرض أن $y = c$ ، حيث $c$ كمية ثابتة . لأية قيمة $x$ ولأية زيادة $\Delta x$ تكون الزيادة $\Delta y$ مساوية الصفر نظراً لثبوت $y$ . وعلى هذا تكون النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ وبالتالى يكون

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \ ;$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(c) = 0 \ .$$

ومنحنى الدالة $y = c$ هو مستقيم يوازى محور $x$ وميله يساوى صفراً .

**ثانيا : مشتقة الدالة $x^n$ حيث $n$ أى عدد حقيقى .**

نفرض أن $y = x^n$ حيث $n$ عدد حقيق موجب أو سالب ، نسبي أو غير نسبي . إذا زادت $x$ بمقدار $\Delta x$ فإن الزيادة فى الدالة تكون

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

وتصبح النسبة بين الزيادة فى الدالة إلى الزيادة فى متغيرها مساوية

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

بأخذ النهاية عندما تؤول $\Delta x$ إلى الصفر نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{(x + \Delta x) - x}$$

نضع $z = x + \Delta x$ ، فعندما تقترب $\Delta x$ من الصفر تؤول $z$ إلى $x$
وتأخذ النهاية الأخيرة الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{z \to x} \frac{z^n - x^n}{z - x} = n\, x^{n-1} .$$

أى أن

$$\frac{d}{dx} ( x^n ) = n\, x^{n-1} , \text{ n any real number.}$$

**حالات خاصة :**

ا - بوضع $n = \frac{1}{2}$ تكون مشتقة الدالة $y = \sqrt{x}$ مساوية $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
أى أن مشتقة $\sqrt{x}$ تساوى مقلوب ضعف الجذر .

ب - إذا كان $n$ عدداً موجباً وكانت الدالة $y = \frac{1}{x^n}$ فإن مشتقتها
تكون $y' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ . فمثلا

$$y = \frac{1}{x^3} \quad : \quad y' = -\frac{3}{x^4}$$

**ثالثا : مشتقة حاصل ضرب ثابت ودالة .**

بفرض أن $y = c\ f\ (x)$ ، حيث $c$ ثابت ، فان $\Delta\ y$ تكون الفرق بين قيمتى الدالة $c\ f\ (x)$ عند $x + \Delta x$ ، $x$ ، أى

$$\Delta\ y = c\ f\ (x + \Delta\ x) - c\ f\ (x)$$

$$= c\ [\ f\ (x + \Delta\ x) - f\ (x)\ ]$$

وبالقسمة على $\Delta\ x$ ينتج أن

$$\frac{\Delta\ y}{\Delta\ x} = c\ \frac{f\ (x + \Delta\ x) - f\ (x)}{\Delta\ x}$$

ثم نوجد المشتقة بأخذ النهاية عندما $\Delta\ x \longrightarrow 0$ :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \left[ c\ \frac{f\ (x + \Delta\ x) - f\ (x)}{\Delta\ x} \right]$$

$$= c \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f\ (x + \Delta\ x) - f\ (x)}{\Delta\ x} = c\ f'\ (x).$$

or

$$\frac{d}{dx}\ [\ c\ f\ (x)\ ] = c\ \frac{d}{dx}\ f\ (x).$$

أى أن المعامل الثابت يمكن سحبه خارج علامة التفاضل .

**رابعا : مشتقة مجموع عدد محدود من الدوال تساوى المجموع المناظر لمشتقات هذه الدوال .**

نفرض على سبيل المثال أن المجموع يتكون من ثلاثة حدود ، أى أن

$$y = u\ (x) + v\ (x) + w\ (x).$$

حيث جميع الدوال $u\ (x)$ ، $v\ (x)$ ، $w\ (x)$ قابلة للتفاضل فى فترة معينة

للمتغير $x$ . عند القيمة $x + \Delta x$ يكون

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w).$$

حيث $\Delta y$ ، $\Delta u$ ، $\Delta v$ ، $\Delta w$ هى زيادات الدوال $y$ ، $u$ ، $v$ ، $w$ ، ا

تناظر الزيادة $\Delta x$ فى المتغير $x$ . وعلى هذا فإن

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

or

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

**مثال (١)**

أوجد مشتقة الدالة $y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ .

**الحل :**

$$y' = 3(x^4)' - (x^{-\frac{1}{3}})'$$

$$= 3 \times 4x^3 - (-\tfrac{1}{3})\, x^{-\frac{1}{3} - 1}$$

$$= 12x^3 + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$$

### مثال (٢)

أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + 7$ .

**الحـل :**

$$y' = 3\left(-\frac{2}{x^3}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0'$$

$$= -\frac{6}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**خامسا : مشتقة حاصل ضرب الدوال .**

مشتقة حاصل ضرب دالتين قابلتين للتفاضل يساوى حاصل ضرب مشتقة الدالة الأولى فى الدالة الثانية مضافا اليه حاصل ضرب الدالة الأولى فى مشتقة الدالة الثانية ، أى أن

$$\text{if } y = u\,v, \text{ then } y' = u'\,v + u\,v'.$$

والاثبات كما يلى :

$$y = u\,v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (v + \Delta u)(v + \Delta v) - u\,v$$

$$= \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v +$$

$$u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

( حيث $u$ , $v$ لا تعتمد على $\Delta x$ ) .

نعتبر الآن الحد الأخير فى الطرف الأيمن :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} .$$

حيث أن $u(x)$ دالة قابلة للتفاضل فهى متصلة، وبالتالى

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0.$$

وكذلك

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} \neq \infty .$$

بذلك يكون الحد المذكور مساويا للصفر فنحصل أخيراً على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} .$$

ما أثبتناه الآن يعطينا مباشرة قاعدة التفاضل حاصل ضرب أى عدد محدود من الدوال . فإذا كان لدينا حاصل ضرب دوال ثلاث $y = u\ v\ w$ فانه يمكن

تمثيل الطرف الأيمن كحاصل ضرب u في ( v w ) فنجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}(v\,w) + u.\frac{d}{dx}(v\,w)$$

$$= \frac{du}{dx}\,v\,w + u\left(\frac{dv}{dx}\,w + v\,\frac{dw}{dx}\right)$$

$$= \frac{du}{dx}\,v\,w + u\,\frac{dv}{dx}\,w + u\,v\,\frac{dw}{dx}.$$

وبهذه الطريقة يمكننا أن نحصل على قاعـــدة لمشتقة حاصل ضرب أى عدد ( محدود ) من الدوال ، أى إذا كان $y = u_1\,u_2\,..\,..\,..\,u_n$ فإن

$$y' = u_1'\,u_2\,...\,u_{n-1}u_n + u_1\,u_2'\,...\,u_{n-1}\,u_n$$

$$+ ... + u_1\,u_2\,...\,u_{n-1}\,u_n'.$$

**مثـال**

أوجد المشتقة للدالة $y = (2x^2+3x)\,.\,(3-2x)$ .

**الحـل** : من الواضح أنه يمكن إيجاد المشتقة بفك الأقواس أولا ثم تفاضل الناتج حداً حداً . إلا أننا سنحسب المشتقة باستخدام قاعدة تفاضل حاصل ضرب دالتين ونفرض أن

$$2\,x^2 + 3x = u \text{ and } 3-2x = v,$$

وبتطبيق القاعدة السابقة نجد أن

$$y' = (2x^2+3x)'\,.\,(3-2x) + (2x^2+3x)\,.\,(3-2x)'$$

$$= (4x+3)\,.\,(3-2x) + (2x^2+3x)\,.\,(-2)$$

$$= 3\ (3 - 4x^2).$$

**سادسا ـ مشتقة خارج قسمة دالتين**

مشتقة خارج قسمة دالتين تساوى كسراً بسطه عبـــارة عن حاصل ضرب مشتقة دالة البسط فى دالة المقام مطروحاً منه حاصل ضرب دالة البسط فى مشتقة دالة المقام ، أما مقام المشتقة فيساوى مربع دالة المقام فى الكسر الاصلى .

$$\text{If } y = \frac{u}{v}, \text{ then } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

لإثبات ذلك نفـــرض أن $\Delta y$ ، $\Delta u$ ، $\Delta v$ هى الزيادات فى الدوال $y$ ، $u$ ، $v$ المناظرة للزيادة $\Delta x$ فى المتغير $x$ ، فيكون

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u . v - u . \Delta v}{v\ (v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta u . v - u . \Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\ (v + \Delta v)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\ (v + \Delta v)}$$

$$= \frac{\left( \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \right) v - u . \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}$$

ونظراً لأن الدالة $v$ قابلة للتفاضل وبالتـــالى مستمرة ، لذلك $\Delta v \longrightarrow 0$
عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ ونجد أن

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

**ملاحظـة** : ذكرنا فيما سبق أن الدالة القابلة للتفاضل هى الدالة التى لها مشتقة.
من النظريات السابقة يمكننا أن نستنتج أن الدالة التى تنشأ من جمـــع ، طرح ، ضرب أو قسمة دوال قابلة للتفاضل تـكون نفسها دالة قابلة للتفاضل .

## ٢–٦ داله داله Function of a Function

نفرض أن $y = \sqrt{2px}$ . إذا وضعنـا

$$2px = u$$

فمن الواضح أن $u$ دالة $x$ ، مثلا

$$u = \phi(x).$$

وعلى هذا فإن الدالة المفروضة

$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{u}$$

تصبح دالة $u$ التى هى بدورهـــا دالة $x$ . فإذا كتبنا $y = f(u)$ ،
فإن $u = \phi(x)$

$$y = f[\phi(x)]$$

كذلك $y = \sin x^3$ هى دالة دالة نظراً لأنه إذا وضعنا $x^3 = u$ فإن
وعلى هذا فإن $u = \phi(x)$

$$y = \sin u = \sin \varphi(x)$$

تصبح دالة دالة .

وفى التطبيقات تقابلنا أحيانا دوال أكثر تعقيداً مثل

$$y = \ln(\sin x^3).$$

فهنا $\sin x^3$ هى دالـــة دالة وهذه بدورها تعتبر المتغـــير المستقل للدالة اللوغاريتمية . فى هذه الحالة يكون اللوغاريتم دالة $\sin u$ ، $\sin u$ دالة $u$ ، $u$ ذاتها داله $x$ . ونكتب هذه العلاقة رمزيا على الصورة

$$y = F\{f[\varphi(x)]\}.$$

## ٢ — ٧ مشتقه داله داله ـ قاعدة السلسله

Derivative Of Function Of a Function - Chain Rule

إذا كانت $y$ دالة $u$ قابلة للتفـــاضل بالنسبة إلى $u$ وكانت $u$ دالة $x$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى $x$ ، فان $y$ تكون دالة قابلة للتفاضـــل بالنسبة إلى $x$ ، وتكون مشتقة $y$ بالنسبة إلى $x$ مساوية حاصل ضرب مشتقة $y$ بالنسبة إلى $u$ فى مشتقة $u$ بالنسبة إلى $x$ ، أى

$$\text{if } y = f(u), \quad \text{and} \quad u = \varphi(x),$$

$$\text{then } \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{du} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ولاثبات ذلك نأخذ قيمة معينة $x$ تناظرها قيمة معينة $u$ وهذه بدورها تناظرها قيمـــة معينة $y$ . نعطى $x$ زيادة إختيارية $\Delta x$ فيتسبب عن ذلك زيادة $\Delta u$ فى $u$ وهذه بدورها تسبب زيادة $\Delta y$ فى $y$ . نفرض أن $\Delta u \neq 0$ ,

$0 \neq \Delta x$ . فحسب الفرض $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ ، $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ لها نهايات تساوى على الترتيب

$f'(u)$ , $\varphi'(x)$ , أى أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) \text{ and } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x) .$$

الدالتان $f(u)$ , $\varphi(x)$ قابلتان للتفاضل وهذا يعنى أنهما مستمران . وعلى هذا $\Delta x \to 0$ تسبب أن كل من $\Delta u$ , $\Delta y$ تؤول إلى الصفر . نتيجـــة لذلك يمكن إستبدال $\Delta u \to 0$ فى النهاية اليسرى بالتعبير $\Delta x \to 0$ ونكتب النهايتين السابقتين على الصورة

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) \text{ and } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x).$$

بضرب الأطراف المتناظرة فى المتساويتين ينتج أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) . \varphi'(x).$$

وبتطبيق النظرية الخاصة بنهاية حاصل الضرب يـــؤول الطرف الأيسر إلى

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} .$$

من ذلك نستنتج أن

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) . \varphi'(x) = \frac{df(u)}{du} . \frac{d\varphi(x)}{dx} .$$

وتكتب العلاقة الأخيرة باختصار على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot$$

**ملاحظة :** يمكن تعميم هذه النظرية للدوال الأكثر تعقيدا ، فمثلا إذا كان

$$y = f(u) \;,\; u = \phi\,(t) \text{ and } t = \psi\,(x)$$

فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

وهكذا .

تسمى قاعدة تفاضل دالة دالة بقاعدة السلسلة نظراً لأن إيجاد المشتقة بالنسبة إلى $x$ للدالة $y = f\left[\,\phi\,\{\psi\,(x)\}\right]$ تشمل سلسلة الخطوات الآتية : نفاضل أولا الدالة الخارجية $y = f\,(u)$ بالنسبة إلى $u$ ، ثم نفاضل الدالة التالية $u = \phi\,(t)$ بالنسبة إلى $t$ ، وأخيراً نفاضل الدالة الداخلية $t = \phi\,(\ )$ بالنسبة إلى $x$ . وحاصل ضرب هذه المشتقات يعطى المشتقة $\frac{dy}{dx}$ المطلوبة .

### مثال (١)

أوجد مشتقة الدالة $y = (x^2 + 3x - 2)^4$ .

الحل : نضع $u = \phi\,(x) = x^2 + 3x - 2$ فتصبح

$$y = f\,(u) = u^4$$

وتكون المشتقة المطلوبة هى

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 4u^3 \cdot (2x + 3)$$

$$= 4(x^2 + 3x - 2)^3 \quad (2x+3)$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة مباشرة بدون فرض الدالة الداخلية $u$ كالآتى : نفاضل الدالة الخارجية $y$ بالنسبة إلى القوس فنحصل على $4\,(x^2 + 3x-2)^3$ ثم نضرب الناتج فى تفاضل القوس ( الدالة الداخلية) بالنسبة إلى $x$ أى $(2x + 3)$ .

## مثال (٢)

فاضل بالنسبة إلى $x$ الدالة $y = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 - 6x + 4}$

**الحل** : نكتب $y$ على الصورة $y = (x^3 + 3x^2 - 6x + 4)^{-1}$

ثم نفاضل بالنسبة إلى $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = -(x^3+3x^2-6x-4)^{-2} \cdot (3x^2 + 6x-6)$$

$$= -\frac{3\,(x^2+2x-2)}{(x^3+3x^2-6x+4)^2}$$

## مثال (٣)

أوجد مشتقة الدالة $y = \left(\dfrac{3x - 2}{2x + 1}\right)^7$

**الحل :**

$$y' = 7 \left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)^6 \cdot \frac{3(2x+1)-(3x-2)2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{49\ (3x-2)^6}{(2x+1)^8}$$

**مثال (٤)**

فاضل بالنسبة إلى $x$ الدالة $y = (x^2+2x-3)^{16}\ (2x+5)^{13}$ .

**الحل :** نضع $u = (x^2+2x-3)^{16}$ , $v = (2x+5)^{13}$ فيكون

$$u' = 16\ (x^2+2x-3)^{15}\ (2x+2),$$

$$v' = 13\ (2x+5)^{12}\ (2).$$

$$\therefore\ y' = u'\,v + u\,v'$$

$$= (2x+5)^{13}\ 32\ (x^2+2x-3)^{15}\ (x+1) + (x^2+2x-3)^{16}\ 26\ (2x+5)^{12}$$

$$= (x^2+2x-3)^{15}\ (2x+5)^{12}\ [\ 32\ (2x+5)\ (x+1) + 26\ (x^2+2x-3)\ ]$$

## ٢ ـ ٨ التفاضل الضمنى Implicit Differentiation

سبق لنا أن عرفنا الدوال الضمنية فى بند [ ١ ـ ٦ ] وهى دوال تظهر فى الصورة $f(x, y) = 0$ حيث $f(x, y)$ هى تعبير يربط المتغير المستقل $x$ بالتابع $y$ . وقد وجدنا أنه يمكن فى بعض الأحوال التعبير عن $y$ صراحة بدلالة $x$ . وفى أغلب الأحيان يتعذر ذلك . وللحصول على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ نفاضل العلاقة السابقة مباشرة بالنسبة إلى $x$ فنحصل على متساوية على الصورة $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ وهى معادلة من الدرجة الأولى فى $\frac{dy}{dx}$ بحلها بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$ نحصل على المشتقة $\frac{dy}{dx} = \phi(x, y)$ .

### مثال (١)

بفرض أن $y$ دالة قابلة للتفاضل ومعرفة ضمنياً بالمعادلة

$$y^3 + 3xy + x^3 - 5 = 0$$

فاوجد $y'$ بدلالة $y, x$ .

**الحل :** مشتقة $y^3$ هى $3y^2y'$ . أما الحد $3xy$ فيجب تناوله كحاصل ضرب فتكون مشتقته هى $3y + 3xy'$ . فى حين أن مشتقة $x^3$ هى $3x^2$ ومشتقة $-5$ هى $0$ ، إذن

$$3y^2y' + 3xy' + 3y + 3x^2 = 0.$$

ومنها نوجد المشتقة

$$y' = -\frac{y + x^2}{y^2 + x}$$

## مثال (٢)

أوجد مشتقة $4x^2 + 9y^2 = 26$ ضمنيا وأختبر النـاتج بحل المعادلة بالنسبة إلى y ثم التفاضل صراحة .

**الحـل** : الطريقة الضمنية تعطى

$$8x + 18\,y\,y' = 0$$

or
$$y' = -\frac{4x}{9y},\ y \neq 0.$$

من ناحية أخرى نجد أن الطريقة الصريحة تعطى

$$y_1 = +\tfrac{1}{3}\sqrt{36-4x^2}\ ,\ y^2 = -\tfrac{1}{3}\sqrt{36-4x^2}$$

$$y_1'(x) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\,(36-4x^2)^{-\frac{1}{2}}(-8x) = -\frac{4x}{3\sqrt{36-4x^2}}$$

أما $y_2'(x)$ فهو نفس التعبير ولـكن مسبوقا بإشارة موجبة .

من الطريقة الضمنية يـكون

$$y_1' = -\frac{4x}{9y_1} = -\frac{4x}{9.\frac{1}{3}\sqrt{36-4x^2}} = -\frac{4x}{3\sqrt{36-4x^2}}$$

مما يتفق مع نتيجة الطريقة الصريحة ، وبالمثل بالنسبة إلى $y_2(x)$.

## مثال (٣)

بفرض أن y دالة قابلة للتفاضل أوجد المشتقة عندما

$$y^5 + 3x^2y^3 - 7x^6 - 8 = 0$$

**الحل** : فى هذا المثال ليس لنا الخيار فى إتبـــاع الطريقة الضمنية أو الصريحة

حيث أنه من المستحيل حل المعادلة بالنسبة إلى y والتعبير عنها صراحة بدلالة x أو بالعكس x بدلالة y .

التفاضل المباشر يعطى :

$$5\,y^4\,y' + 3x^3 \,.\, 3y^2\,y' + 3y^3 \,.\, 2x - 42x^5 = 0$$

or

$$y' = \frac{42x^5 - 6x\,y^3}{5\,y^4 + 9x^3\,y^2} \,.$$

## ٢ – ٩ التفاضلات Differentials

نفرض أن الدالة $y = f(x)$ قابلة للتفاضل فى الفترة $[a , b]$ . تعطى مشتقة هذه الدالة عند أية نقطة x فى الفترة $[a , b]$ بالعلاقة

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

عندما $\Delta x \to 0$ تقترب النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ من القيمة المحددة $f'(x)$ وبالتالى تختلف قيمة هذه النسبة عن المشتقة $f'(x)$ بمتناهية فى الصغر ولتكن $\alpha$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \,,$$

حيث $\alpha \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$ . بضرب طرفى العلاقة الأخيرة فى $\Delta x$ ينتج

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x. \qquad \dots \dots (1)$$

وحيث أن $f'(x) \neq 0$ فى الحالة العامة ، لذلك عند قيمة $x$ ثابتة وقيمة متغيرة $\Delta x \to 0$ يكون حاصـــل الضرب $f'(x) \Delta x$ متناهية فى الصغر من الرتبة الأولى بالنسبة إلى $\Delta x$ . ولكن حاصل الضرب $\alpha \Delta x$ يكون دائما متناهية فى الصغر من الرتبة الثانية بالنسبة إلى $\Delta x$ ، لأن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

على ذلك تتكون الزيادة $\Delta y$ فى الدالة من جزئين ، الأول منهما $f'(x)\Delta x$ هو الجزء الرئيسى principal part الزيادة وهو من الرتبة الأولى بالنسبة إلى $\Delta x$ . ويطلق على الجزء الرئيسى $f'(x) \Delta x$ اسم تفاضلة الدالة ويرمز له بالرمز $d y$ أو $d f(x)$ ، أى أن

$$d y = f'(x) \Delta x \qquad \dots (2)$$

فإذا طبقنا هذا التعريف على الدالة الخاصة $y = x$ فان

$$dy = dx = (x)' \Delta x = \Delta x$$

or

$$dx = \Delta x$$

وعلى هذا فان التفاضلة $d x$ للمتغير المستقل $x$ تنطبق تماماً على الزيادة $\Delta x$ . ويمكن اعتبار العلاقة الأخيرة تعريفاً لتفاضله المتغير المستقل وهذا لا يتعارض مع تعريف تفاضله الدالة . وعلى وجه العموم يمكن كتابة العلاقة (2) على الصورة

$$d y = f'(x) d x$$

وفيها $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ . وعلى هذا يمكن اعتبار المشتقة $f'(x)$ على أنها النسبة بين تفاضله الدالة وتفاضلة متغيرها المستقبل . وقد ظهرت المشتقة $f'(x)$ فى العلاقة الأخيرة على صورة معامل للتفاضلة $d\,x$ ؛ لذلك تسمى المشتقة فى بعض الأحوال المعامل التفاضلى للدالة differential coefficient .

نعود الآن إلى العلاقة (1) ، آخذين (2) فى الاعتبار ، ونعيد كتابتها على الصورة

$$\Delta y = dy + \alpha\,\Delta x$$

وهكذا نجد أن الزيادة فى الدالة تختلف عن تفاضلتها بمتناهية فى الصغر من رتبة أعلى بالنسبة إلى $\Delta x$ . فاذا كان $f'(x) \neq 0$ فان $\alpha\,\Delta x$ تكون متناهية فى الصغر من رتبة أعلى بالنسبة إلى $d\,y$ ويكون

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\,\Delta x}{f'(x)\,\Delta x}$$

$$= 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1 .$$

لذلك نستعمل أحياناً فى الحساب التقريبى العلاقة

$$\Delta y \backsimeq dy$$

أو صورتها التفصيلية

$$f(x + \Delta x) - f(x) \backsimeq f'(x)\,\Delta x$$

or

$$f(x + \Delta x) \backsimeq f(x) + f'(x)\,\Delta x \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

وبالتالى نقلل حجم العمليات الحسابية اللازمة لحساب الزيادة $\Delta y$ .

## مثال (١)

إذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$ فاحسب $\Delta f$ ، $df$ عنــــدما $x = 1$ ، $\Delta x$ تساوى 0.1 ، 0.01 ، 0.001 وذلك لأربعة أرقام عشرية مميزة .

**الحــل :**

$$f(1) = 1, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ and } f'(1) = -1,$$

For $\Delta x = 0.1$ :

$f(1.1) = 0.909091$ and $\Delta f = 0.909091 - 1 = -0.09091$

ومن ناحية أخرى نجد أن

$$df = f'(1) . \Delta x = -1 (0.1) = -0.10000$$

وهكذا لقيم $\Delta x$ الأخرى ، فنحصل على الجدول الآتى :

| $\Delta x$ | $df$ | $\Delta f$ |
|---|---|---|
| 0.1 | −0.10000 | −0.09091 |
| 0.01 | −0.010000 | −0.009901 |
| 0.001 | −0.0010000 | −0.0009990 |

من هذا المثال يتضح أن الكميات $df$ لا تحتاج من الناحية العملية إلى جهد فى حسابها فى حين أن ايجاد $\Delta f$ أشق من ذلك بكثير . وحيث أن الخطأ فى

استعمال $d\,f$ بدلا من $\Delta\,f$ يكون صغيراً فإن هذا التقريب يوفر كثيراً من وقت الحساب اللازم .

**مثال (٢)**

أوجد التفاضلة $dy$ والزيادة $\Delta\,y$ للدالة $y = x^2$ :

١) لأية قيم اختيارية لكل من $x$ ، $\Delta\,x$ .

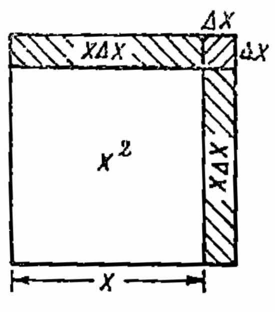
٢) عندما $x = 20$ ، $\Delta\,x = 0.1$ .

**الحل :**

$$1)\ \Delta\,y = (x + \Delta\,x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta\,x + (\Delta x)^2$$

$$d\,y = (x^2)'\,\Delta\,x = 2x\,\Delta\,x.$$

ويبين شكل (٢-٢) كل من $\Delta\,y$ ، $d\,y$ . فنجد أن $\Delta\,y$ تمثلها المساحة المهشرة كلها أى المستطيلان $2\,(x\,\Delta\,x)$ بالإضافة إلى المربع $(\Delta\,x)^2$ فى حين أن $dy$ تمثلها مساحة المستطيلين فقط .




شكل ( ٢ ــ ٢ )

2) If $x = 20$, $\Delta x = 0.1$, then

$$\Delta y = 2 \times 20 \times 0.1 + (0.1)^2 = 4.01$$

$$d y = 2 \times 20 \times 0.1 = 4.00$$

وعلى ذلك فإن استبدال $\Delta y$ بالكمية $dy$ يعطى خطأ يساوى 0.01 ، وفى حالات كثيرة يمكن اعتباره صفيراً بالنسبة إلى $\Delta y = 4.01$ وبالتالى يهمل .

**مثال (٣)**

باستخدام التفاضلات أوجد قيمة تقريبية لجذر $\sqrt[5]{33}$

**الحل :** تتلخص فكرة الحل فى أننا نعلم تماما قيمة $\sqrt[5]{32}$ وهى 2 وأن 33 يقع بالقرب من 32 . لذلك نكون الدالة

$$f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{1/5}$$

إذا أخذنا $x = 32$ ، $\Delta x = 1$ يكون المطلوب تعيين $f(33)$ .

$$\Delta f = f(33) - f(32),$$

$$d f = f'(32) \,.\, (1) = f'(32)$$

but $$f'(x) = \frac{1}{5} x^{-4/5}$$

$$f'(32) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{80},$$

$$\therefore \; d f = \frac{1}{80} \cdot$$

Since $\Delta f \simeq d f$

$$\therefore \; f(33) = f(32) - \Delta f \simeq f(32) + d f$$

$$\sqrt[5]{23} \simeq 2 + \frac{1}{80} = 2.0125$$

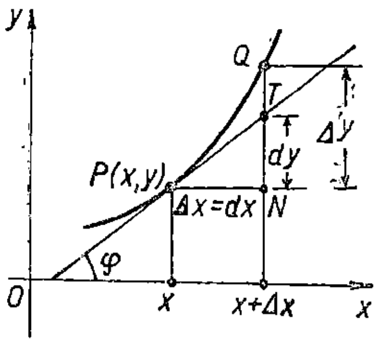
**٢ ـ ١٠ — المعنى الهندسى للتفاضلة**

Geometric Significance of the Differential

نعتبر الدالة $y = f(x)$ والمبين منحنيها فى شكل ( ٢ ـ ٣ ) . نأخذ على المنحنى نقطة اختيارية $P(x, y)$ ونرسم المماس للمنحنى عند هذه النقطة ونرمز للزاوية التى يصنعها المماس مع محور $y$ بالرمز $\phi$ . نعطى المتغير المستقل زيادة قدرها $\Delta x$ فتتغير الدالة بمقدار $\Delta y = NQ$ وتقابل الكميتان $x + \Delta x, y + \Delta y$ النقطة $Q$ على المنحنى .

من المثلث $PNT$ نجد أن

$$NT = PN \tan \phi$$




شكل ( ٢ ـ ٣ )

$$\because \quad \tan \phi = f'(x) \quad \text{and} \quad PN = \Delta x$$

$$\therefore \quad NT = f'(x)\, \Delta x \; ;$$

ولكن من تعريف التفاضلة وجدنا أن $f'(x)\, \Delta x = dy$ وعلى هذا

$$NT = dy.$$

وهذا يعنى أن تفاضلة $f(x)$ ، التى تناظر القيمتين $x$ ؟ $x$ $\Delta$ ، تساوى الزيادة فى الاحداثى الصادى للنقطة على الماس المرسوم للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $x$ .

من شكل ( ٢ - ٣ ) ينتج مباشرة أن

$$QT = \Delta y - dy$$

وقد أثبتنا من قبل أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - dy}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{d y} - 1 = 1 - 1 = 0$$

لذلك نجد أن

$$\frac{QT}{NT} \longrightarrow 0 \text{ as } \Delta x \longrightarrow 0.$$

ويجب ألا يتبادر إلى الأذهان أن الزيادة $\Delta y$ تكون دائما أكبر من $dy$ . فإذا كان المنحنى محدباً وقع الماس عند $P$ فوق المنحنى وبالتالى تقع النقطة $T$ فوق $Q$ ويكون

$$\Delta y = QN , \; dy = NT \text{ and } \Delta y < dy$$

## ٢ — ١١ قواعد التفاضل بدلالة التفاضلات

Rules of Differentiation in Terms of Differentials

وجدنا أن مسألة إيجاد تفاضلة دالة تكافىء مسألة إيجاد المشتقة نظراً لأنه بضرب الأخيرة فى تفاضلة المتغير المستقل نحصل على تفاضلة الدالة . وعلى ذلك فان أغلب النظريات والعلاقات الخاصة بالمشتقات تتحقق أيضا للتفاضلات . وفيما يلى بعض هذه العلاقات :

$$d\,c = 0,$$

$$d\,(cu) = c\,du,$$

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d\,(u\,v) = v\,du + u\,dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^{2}},$$

$$d\,(u^{n}) = nu^{n-1}du,$$

وهكذا .

## ٢ – ١٢ حساب الاخطاء الصغيرة

Culculation of Small Errors

تعطى القياسات العملية عادة قيما تقريبية للكميات المقاسة . فإذا فرضنا أن x قيمة تقريبية للمتغير المستقل حصلنا عليها بالقياس وأن $x + \Delta x$ هى قيمته الحقيقية . لذلك تحدد x القيمة التقريبية للدالة $f(x)$ وتعطى $x + \Delta x$ القيمة المضبوطة للدالة $f(x + \Delta x)$ . يطلق على القيمة المطلقة للفرق بين القيمة المضبوطة والقيمة التقريبية اسم **الخطأ المطلق** absolute error . والخطأ المطلق فى المتغير المستقل يساوى $|\Delta x|$ ، والخطأ المطلق فى الدالة هو

$$|\Delta y| = |f(x + \Delta x) - f(x)|.$$

تسمى القيمة المطلقة للنسبة بين الخطأ المطلق والكمية المقاسة **الخطأ النسبى** relative error . والخطأ النسبى فى قيمة دالة يساوى

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|,$$

وفى هذه العلاقة تكون $y$ هى القيمة التقريبية للدالة . ولإيجاد الخطأ النسبى فى دالة ما يكون من الضرورة إيجاد أولا

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) .$$

والطرف الأيمن فى المعادلة $y = f(x)$ يكون عادة تعبيرا رياضيا معقدا وبالتالى يلزمنا فى حساب $\Delta y$ مهارة كبيرة . إلا أنه يمكن إيجاد قيمة تقريبية للمقدار $\Delta y$ ( وهى تفاضله الدالة $dy$ ) بدون مشقة باستخدام العلاقات المذكورة فى بند ( ٢ — ٩ ) لذلك تستبدل عادة الزيادة $\Delta y$ بالتفاضلة $dy$ ويؤخذ الخطأ النسبى مساويا $\left| \frac{dy}{y} \right|$ .

يعرف **الخطأ المئوى** percentage error على أنه الخطأ النسبى مضروبا فى مائة :

$$\left| \frac{dy}{y} \right| \times 100 \ \%$$

**نظريه (١)** : الخطأ النسبى فى حاصل ضرب لا يزيد عن مجموع الأخطاء النسبية فى عوامله .

**الاثبات** : نفرض أن $y = uv$ ، بأخذ اللوغاريتمات وحساب التفاضلات نجد أن

$$\ln y = \ln u + \ln v$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

لذلك يكون

$$\left|\frac{dy}{y}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right| ,$$

**نظريه (٢)** : الخطأ النسبي فى خارج قسمة لايزيد عن مجموع الأخطاء النسبية للبسط والمقام .

**الاثبات** : نفرض $y = \frac{u}{v}$ ، فبأخذ اللوغاريتم ثم أخذ التفاضلة للطرفين نجد أن

$$\ln y = \ln u - \ln v$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$$

**ومنه ينتج أن**

$$\left|\frac{dy}{y}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right| .$$

**مثـــال**

وجد بالقياس أن نصف قطر كرة هو 3 inch مع احتمال خطأ قدره $\pm$ 0.03 inch ، أوجد بالتقريب الخطأ المطلق والخطأ المئـــوى فى حساب مساحة سطحها وحجمها .

**الحـل** : مساحة سطح الكرة وحجمها هما على الترتيب

$$S = 4 \pi r^2 \quad , V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

يقرب الخطأ فى مساحة السطح والحجم بالتفاضلتين

$$|dS| = S'(r) \; |dr| = 8 \pi r \; |dr|$$

$$|dV| = V'(r) \; |dr| = 4 \pi r^2 \; |dr|$$

وعندما $r = 3$ ، $dr = \pm\ 0.03$ يكون الخطأ تقريباً

$$| dS | = 8\ \pi\ (3)\ (0.03) = 0.72\ \pi\ in^2$$

$$| dV | = 4\ \pi\ (3)^2\ (0.03) = 1.08\ \pi\ in^3$$

ويكون الخطأ النسبي مساويا

$$\left| \frac{dS}{S} \right| = \frac{8\ \pi\ r\ | dr |}{4\ \pi\ r^2} = 2 \left| \frac{dr}{r} \right| = 2 .\ \frac{0.03}{3} = 0.02$$

$$\left| \frac{dV}{V} \right| = \frac{4\ \pi\ r^2\ | dr |}{\frac{4}{3}\ \pi\ r^3} = 3 \left| \frac{dr}{r} \right| = 3 .\ \frac{0.03}{3} = 0.03$$

ويكون الخطأ المئوى على الترتيب هو 2 % ، 3 % .

ويلاحظ هنا أن الخطأ النسبي فى مساحة سطح الكرة يساوى ضعف الخطأ النسبي فى نصف قطرها ، فى حين أن الخطأ النسبي فى حجمها يساوى ثلاث مرات الخطأ النسبي فى نصف قطرها .

# تمارين

١) أوجد من المبادىء الأولية مشتقة الدوال الآتية :

a) $y = x^3$ b) $y = \dfrac{1}{x}$

c) $y = \sqrt{x}$ d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $y = 2x^2 - x$ f) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

g) $y = x\sqrt{x+1}$ h) $y = \sqrt{4-x^2}$

i) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

٢) فاضل بالنسبة إلى x الدوال الآتية :

a) $x^{14} + 10x^2 + 7x - 4$ b) $x^8 + 2x^6 - 4x^3 + 6x + 9$

c) $x^{-2} - 4x^{-5} + 3x^{-8}$ d) $2x^{-1} - 3x^{-5} + 2x^2 - 7$

e) $x^3 - 3x - \dfrac{2}{x^4}$

f) $(x^2 + 2x)(3x + 1)$

g) $(x^3 + 6x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x - 5)$

h) $(x^4 + 2x - 3)(x^6 - 7x^5 + 8x^3 + 9x^2 + 1)$

i) $\dfrac{x^3 - 3x + 5}{x^2}$ j) $\dfrac{x-1}{x+1}$

k) $\dfrac{5x-2}{4x+3}$  l) $\dfrac{x}{x^2+1}$

m) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$  n) $\dfrac{2x^2-3x+4}{x^2-2x+3}$

o) $\dfrac{x+1}{2x+3}(2x-5)$  p) $\dfrac{x^2-x+6}{x^2+1}(x^2+x+1)$

q) $(x^2+2x-1)^3$  r) $(x^7-2x+3x^{-2})^2$

s) $(x^2+2x-6)(3x-2)(x^2+5)$  t) $(2x+3)^3(x^2+1)$

u) $\dfrac{x+2}{3x+1}(x-6)$  v) $\dfrac{x^2-1}{2x+6}(x^2+5)$

w) $\dfrac{(x^2+2)^3}{(x^2+x^{-1})^3}$  x) $(x+5)^2(3x-6)^3(7x^2+1)^4$

y) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

٣) أوجد ′y بدلالة x ، y على فرض أن y دالة قابلة للتفاضل بالنسبة الى x :

a) $x^2-2y^3+5=0$  b) $x^3-3xy+y^3=6$

c) $x^3+2x^2y-xy^2+2y^3=4$

d) $x^5-2x^3y^2+3xy^4-y^5=5$

e) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ , a = constant

٤) أوجد ′y للدوال الآتية بالتفاضل الضمنى ، ثم عبر عن y صراحة بدلالة x واختر الدالة المعينة التى تمر بالنقطة المعطاة ، ثم أوجد قيمة ′y عند هذه النقطة . قارن الناتج فى الحالتين :

a) $x^2 + y^2 = 25 , ( 4 , 3 )$

b) $y^2 = 2x , ( 2 , -2 )$

c) $xy = 3 , ( 1 , 3 )$

d) $3x^2 - 2x y - y^2 = 3, ( 1 , 0 )$

٥) إحسب $\Delta y$ ، $dy$ للدالة $y = x^3 - 2x + 5$ إذا تغيرت $x$ من 2 إلى 2.01

٦) كون جدولا لقيم $dy$ ، $\Delta y$ للدالة $y = x^2 + 3x$ إذا كانت

$$\Delta x = 0.001 \quad , \quad 0.01 \quad , \quad 0.1 \quad , \quad 0.5 \quad , \quad 1;$$
$$x = 1 \quad , \quad 5 \; , \; -1$$

٧) إحسب $dy$ ، $\Delta y$ للدوال الآتية :

a) $y = x^2 + x - 1 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad \Delta x = 0.01$

b) $y = x^2 - 2x - 3, \quad x = -1, \Delta x = -0.02$

c) $y = x^3 + 3x^2 - 6x - 3 , x = 2 , \Delta x = 0.01$

d) $y = \frac{1}{x} , x = 2 , \Delta x = 0.05$

e) $y = \sqrt{x} , x = 1 , \Delta x = -0.1$

f) $y = \frac{x}{x+1} , x = 0 , \Delta x = 0.1$

٨) باستخدام التفاضلات أوجد قيمة تقريبية لكل من :

a) $\sqrt{99}$ b) $\frac{1}{1001}$ c) $(1.02)^{10}$

d) $\sqrt[4]{17}$ e) $(0.98)^{-1}$ f) $\sqrt{0.0024}$

٩) وجد بالقياس أن قطر كرة هو 9 in باحتمال خطأ 0.05 in $\pm$ أوجد بالتقريب أكبر خطأ مئوى محتمل فى حساب الحجم .

١٠) قيس طول ضلع مربع فوجد 5.2 m بخطأ قدره 0.1 m ، أوجد الخطأ المطلق والخطأ المئوى فى حساب مساحته .

١١) يعطى الزمن الدورى لبندول بسيط من العلاقة $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ حيث $l$ هو طول البندول ، g عجلة الجاذبية الأرضية . فإذا حدث خطأ $\Delta l$ فى قياس $l$ أوجد الخطأ النسبى فى حساب T .

١٢) أثبت أنه إذا رفع عدد ما إلى القوة النونية فإن الخطأ النسبى يتضاعف n مرة ، فى حين أنه إذا أخذ الجذر النونى لنفس العـــدد فإن الخطأ النسبى يقل n مرة .