الباب الأول

الدوال والنهايات

FUNCTIONS AND LIMITS

سنتناول فى هذا الباب التعاريف الأساسية الخاصة بالمتغيرات والدوال وكذا موضوع النهايات والتى ستقابلنا فى دراستنا لحساب التفاضل والتكامل .

١ – ١ المتغيرات والثوابت Variables and Constants

تتعين القيم العددية للكميات الطبيعية مثل الزمن والطول والمساحة والحجم والكتلة والسرعة والضغط ودرجة الحرارة .. الخ بواسطة القياس . وتتناول الرياضيات هذه الكميات بغض النظر عن معناها الخاص . وعلى هذا فعندما نتحدث عن الكميات فإننا نقصدها من ناحية قيمها العددية numerical values . وفى الظواهر الطبيعية المختلفة نجد أن القيمة العددية لبعض الكميات تتغير فى حين أن القيمة العددية لبعضها الآخر تظل ثابتة . فمثلا ، فى الحركة المنتظمة لنقطة ما نجد أن الزمن والمسافة يتغيران فى حين تظل السرعة ثابته .

المتغير هو كمية تتخذ لنفسها قيماً عددية مختلفة ، أما **الثابت** فهو كمية تظل محتفظة بقيمتها العددية ثابتة . ويرمز عادة للمتغيرات بالأحرف w,v,u,z,y,x .. الخ كما تستعمل الحروف c,b,a .. الخ للدلالة على الثوابت .

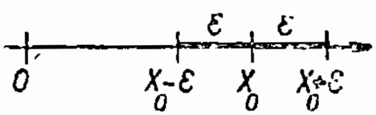
والجدير بالملاحظة أنه إذا كنا نعتبر ظواهر طبيعية معينة ، فإن كمية بعينها يمكن أن تكون فى إحدى هذه الظواهر ثابتاً وتكون متغيرة فى ظاهرة أخرى . على سبيل المثال تكون السرعة فى الحركة المنتظمة ثابتاً فى حين أنها تكون

متغيراً فى الحركة بعجلة منتظمة . وتسمى الكميات التى تحتفظ بنفس قيمتها فى جميع الأحوال **الثوابت المطلقة** absolute constants . فمثلا النسبة بين محيط دائرة وقطرها هى ثابت مطلق يسمى النسبة التقريبية ويرمز لهـا بالرمز π وتساوى 3.14159 تقريباً .

١ - ٢ مدى متغير The Range of a Variable

علما أن المتغير يتخذ لنفسه سلسلة من القيم العددية ، ومجموعة القيم هذه تعتمد على خواص المسألة التى يدخل فيها هذا المتغير . فمثلا إذا سخنا الماء تحت الظروف العادية فان درجة حرارته تبدأ فى التغير من درجة حرارة الغرفة $(20^\circ C)$ إلى درجة غليان الماء $(100^\circ C)$. كذلك تأخذ الكمية المتغيرة $x = \cos\alpha$ جميع القيم من -1 إلى 1 . من هذا نستنتج أن مدى متغير هو فى الحقيقة فترة تغيره وقد تكون هذه الفترة مفتوحة أو نصف مفتوحة أو مغلقة . ففى المثال الاول يكون مدى تغير درجة الحرارة T هو الفترة $[20,100]$ أى أن $20 \leqslant T \leqslant 100$ وفى المثال الثانى يقع x فى الفترة $[-1,1]$ أى $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

يعرف **جوار** neighbourhood النقطة x_0 على أنه الفترة الإختيارية (a,b) التى تحتوى النقطة فى داخلها أى أن $a < x_0 < b$. ويؤخذ عادة الجوار (a,b) للنقطة x_0 بحيث تقع x_0 فى منتصفه وفى هذه الحالة تسمى x_0 مركز الجوار وتسمى الكمية $\frac{b-a}{2}$ بنصف قطر الجوار . وشكل (١-١) يبين الجوار $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ للنقطة x_0 الذى نصف قطره ε .



شكل (١ ـ ١)

يقال لمتغير إنه **متزايد** increasing إذا كانت كل قيمة تالية له أكبر من سابقتها ، كما يقال لمتغير إنه **متناقص** decreasing إذا كانت كل قيمة تالية له أقل من سابقتها . وتسمى الكميات المتغيرة المتزايدة والكميات المتغيرة المتناقصة **بالمتغيرات المطردة التغير** monotonically varying أو باختصار **كميات مطردة** monotonic quantities . فمثلا إذا ضاعفنا عدد أضلاع مضلع منتظم مرسوم داخل دائرة فإن مساحة هذا المضلع تكون متغيراً متزايداً . أما إذا كانت أضلاع المضلع تمس الدائرة من الخارج وضاعفنا عدد الأضلاع فإن مساحة المضلع تكون متغيراً متناقصاً . ومن الملاحظ أن كل كمية متغيرة ليست بالضرورة متزايدة أو متناقصة . فمثلا إذا كان α متغيراً متزايداً فى الفترة $[0,2\pi]$ **فإن المتغير** $x = \sin\alpha$ ليس كمية مطردة لأنها تزداد أولا من 0 إلى 1 ثم تتناقص من 1 إلى -1 ثم تعاود الإزدياد من -1 إلى 0 .

يقال للمتغير x إنه **مقيد** bounded إذا تواجد ثابت $M > 0$ بحيث أن جميع قيم المتغير التى تلى قيمة معينة له تحقق الشرط

$$-M \leqslant x \leqslant M \qquad \text{or} \qquad |x| \leqslant M$$

وبعبارة أخرى يسمى المتغير مقيداً إذا أمكن تعيين فترة $[-M, M]$ بحيث تقع جميع قيم المتغير المتتالية (إعتباراً من قيمة معينة له) فى هذه الفترة . وليس المقصود هنا أن المتغير x يأخذ بالضرورة جميع القيم التى فى الفترة $[-M, M]$ فمثلا المتغير الذى يأخذ جميع القيم الجذرية الممكنة فى الفترة $[-2,2]$ يكون مقيداً إلا أنه لا يأخذ جميع القيم الموجودة فى الفترة $[-2,2]$ أى القيم غير الجذرية .

١ ـ ٣ المتناهيات فى الصغر Infinitesimals

يقال لمتغير ما إنه متناهية فى الصغر إذا تحقق إعتباراً من لحظة معينة أثناء تغيره أن القيمة المطلقة لجميع قيمه التاليــة أقل (وتظل أقل) من أى عدد موجب ε .

مثال (١)

ضلع المضلع المنتظم المرسوم داخل دائرة هو كمية متناهية فى الصغر عندما يتضاعف عدد أضلاعه بلا حدود ، ذلك لأنه أثناء هذه العملية يمكن جعل الضلع صغيراً كما نشاء .

مثال (٢)

الكسر $\frac{1}{x}$ متناهية فى الصغر عندما تزداد القيمــة المطلقة للمتغير x بلا حدود ، فمثلا :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

or

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{-10}, \frac{1}{-100}, \frac{1}{-1000}, \ldots$$

ذلك لأنه مهما كان العدد الموجب ε صغيراً فإنه ستأتى لحظـــة أثناء زيادة $|x|$ بلا حدود يكون عندها (وكذلك بعدها) $|x|$ أكبر من $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} \text{ and } \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

ويلاحظ هنا أن أية كمية متناهيــة فى الصغر هى بالضرورة كمية مقيــدة نظراً لأنه إبتداء من لحظة معينة تصبح قيمتها المطلقة ليس فقط أقل من عدد

محدود موجب ما M ولكن أقل أيضاً من أى عدد صغير موجب ε يمكن فرضه .

وتخضع المتناهيات فى الصغر للخواص الآتية :

١) إذا غيرت إشارة المتناهية فى الصغر فإنها تظل متناهية فى الصغر .

٢) إذا كانت ε_1 ، ε_2 متناهيتين فى الصغر فإن مجموعهما والفرق بينهما يكونان متناهيتين فى الصغر . ونتيجة لذلك يكون المجموع الجبرى لمتناهيات فى الصغر هو أيضاً متناهية فى الصغر .

٣) حاصل ضرب كمية مقيدة x ومتناهية فى الصغر ε يكون متناهية فى الصغر . وكنتيجة لذلك يكون حاصل ضرب ثابت ومتناهية فى الصغر ، وكذلك حاصل ضرب متناهيات فى الصغر متعددة ، هو أيضاً متناهية فى الصغر . كما أن أية قوة صحيحة موجبة n لمتناهية فى الصغر ε تكون أيضا متناهية فى الصغر ، أى

$$\varepsilon^n = \underbrace{\varepsilon.\ \varepsilon\ \dots\ \varepsilon}_{\text{n times}}$$

٤) خارج قسمة متناهيتين فى الصغر ليس بالضرورة متناهية فى الصغر ، فمثلا إذا كانت ε_1 ، ε_2 متناهيتين فى الصغر وكان $\varepsilon_1 = 2\ \varepsilon_2$ فإن

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{2\ \varepsilon_2}{\varepsilon_2} = 2$$

١ - ٤ الدوال Functions

فى دراسة الظواهر الطبيعية وفى حل المسائل الهندسية والرياضية تقابلنا كميات متغيرة تعتمد فى تغيرها على كمية متغيرة أخرى فمثلا فى دراسة الحركة

نجد أن المسافة المقطوعة تتغير بتغير الزمن . كذلك فى العلاقة المعروفة والتى تعطى مساحة الدائرة $A = \pi r^2$ نجد أنه إذا أعطى نصف القطر r قيماً عددية مختلفة فإن مساحة الدائرة A تأخذ بالتالى قيماً عددية مناظرة ، أى أن التغير فى قيمة r تسبب عنه تغير فى A .

تعريف : إذا كانت كل قيمة لمتغير ما x تناظرها قيمة معينة لمتغير آخر y فإننا نقول إن y دالة x ونكتب عادة

$$y = f(x) \quad , \quad y = \varphi(x) \ \ldots$$

ويسمى x **المتغير المستقل** independent variable بينما يسمى y **بالمتغير التابع** dependent varible .

الحرف f الموجود فى العلاقة الدالية $y = f(x)$ يبين أن هناك بعض العمليات المعينة يجب إجراؤها على قيمة x حتى نحصل على قيمة y . وفى بعض الأحوال يستغنى عن كتابة حروف جديدة مثل f ، φ ، ... للدلالة على العلاقة الدالية بين المتغيرين ويكتفى بالرمز الخاص بالمتغير التابع فنكتب مثلا

$$y = y(x) \quad , \quad u = u(x) \ \ldots$$

إذا كان c كمية ثابتة فإن العلاقة $y = c$ ترمز إلى دالة قيمتها ثابتة وتساوى c مهما كانت قيمة المتغير x .

مجموعة قيم x التى تتعين عندها قيم الدالة y تبعاً للتعبير $f(x)$ تسمى **مجال الدالة** domain of the function كما تسمى مجموعة قيم y المناظرة **مدى الدالة** range of the function . فمثلا ، الدالة $y = \sin x$ معرفة لجميع قيم x

المحدودة ، وعلى ذلك فإن مجال هذه الدالة هو الفترة $-\infty < x < \infty$ في حين أن مدى الدالة هو الفترة $[-1,1]$.

يقال للدالة $y = f(x)$ إنهــا **متزايدة** increasing إذا كانت y تزداد بزيادة x . فإذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$ لجميع قيم x_1 , x_2 الواقعة في مجالها . كما تسمى الدالة **متناقصة** decreasing إذا تناقصت y كلما إزدادت x ، أى إنه إذا تحقق $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) > f(x_2)$ لجميع قيم x_1 , x_2 الواقعة فى مجالها .

إذا كانت كل قيمة للمتغير المستقل x فى مجال الدالة تعين قيمة واحدة للدالة فى مداها قيل أن الدالة **احادية القيمه** single-valued . أما إذا تعينت أكثر من قيمة واحدة للدالة عند نفس قيمة x فإن الدالة تكون فى هـذه الحالة **متعددة القيمه** multiple - valued .

مثال (١)

إذا كانت $f(x) = x^3 - 2x - 3$ فأوجد قيمة

$f(0), f(-1), f(-2), f(2), f(t)$ and $f[f(x)]$.

الحــل :

$$f(0) = 0^3 - 2(0) - 3 = -3.$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0.$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5.$$

$$f(2) = (2)\,2^2 - 2(2) - 3 = -3.$$

$$f(t) = t^3 - 2t - 3.$$

لإيجاد $f[f(x)]$ يلزمنا أن نتفهم معنى الأقواس . فالعلاقة التى تعرف f

تعنى أنه مهما كان التعبير الموجود بين القوسين فى ( ) f فإنه يعوض بكامله فى الطرف الأيمن . لذلك نجد أن

$$f\,[\,f(x)\,] = [\,f(x)\,]^2 - 2.\,[\,f(x)\,] - 3.$$

بالإضافة إلى ذلك فإن الطرف الأيمن يحتوى أيضا $f(x)$ التى يمكن التعويض عنها من التعريف فينتج أن

$$f\,[\,f(x)\,] = (x^2-2x-3)^2 - 2\,(x^2-2x-3) - 3$$
$$= x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x + 12.$$

مثال (٢)

فرق ما بين الدالتين

$$F(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad \text{and} \quad G(x) = x + 2$$

الحل : نظراً لأن المقدار x^2-4 يمكن تحليله إلى $(x+2)\ (x-2)$ فقد يتبادر لأول وهلة أن الدالتين هما نفس الشيء ، إلا أن مجال الدالة G هى كل محور x أى أن x يمكن أن تأخذ أية قيمة فى حين أن هناك صعوبة بالنسبة للدالة F عندما $x=2$ لأنه بتعويض هذه القيمة فان كل من البسط والمقام ينعدم. لذلك يمكن القول بأن الدالتين متطابقان لجميع قيم x فيما عدا عند $x=2$ حيث تكون $G(2) = 4$ بينما تكون F غير معرفة . ومن الممكن تعريف القيمة $F(2)$ على أنها 4 أو أية قيمة اختيارية أخرى . فاذا كتبنا

$$F(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad \text{and} \quad F(2) = 4$$

فان هذه الدالة تصبح مطابقة تماما للدالة G . وقد يبدو هذا غير ذى أهمية

إلا أننا سنرى فيما بعد أن هذه الحالة قد تصبح ذات أهميـــة كبرى فى بعض مواضيع حساب التفاضل والتكامل .

مثال (٣)

إذا كان $f(x) = x^2$ ، بين أن

$$f(x^2+y^2) = f[f(x)] + f[f(y)] + 2f(x)\,f(y).$$

الحـــل :

$$f(x^2+y^2) = (x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4,$$

$$f[f(x)] = f[x^2] = (x^2)^2 = x^4,$$

$$f[f(y)] = f[y^2] = (y^2)^2 = y^4,$$

$$2f(x)\,f(y) = 2x^2y^2.$$

وبالجمع ينتج أن

$$f[f(x)] + f[f(y)] + 2f(x)\,f(y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$$

وهذا يساوى تماماً $f(x^2+y^2)$.

مثال (٤)

أوجد مجال الدالة $\qquad y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

الحـل : تـكون الدالة معرفة إذا كان $x^2 - 1 > 0$, أى إذا كان $|x| > 1$

وعلى هذا يعطى مجال الدالة بالفترتين

$$-\infty < x < -1 \quad \text{and} \quad 1 < x < +\infty$$

أى أن المجال يتـكون من جميع قيم x التى لاتقع فى الفترة المغلقة $[-1,1]$.

١ – ٥ التمثيل البيانى للدوال

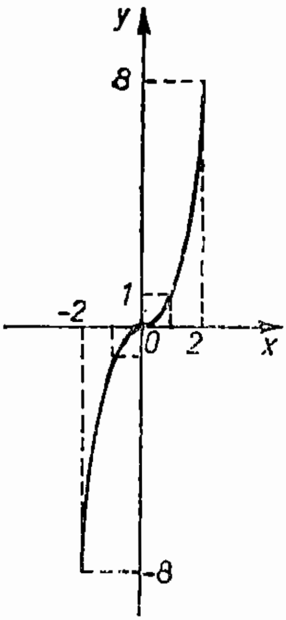
Graphical Representation of Functions

إذا أوجدنا لكل قيمة x فى مجال الدالة $y = f(x)$ قيمة الدالة المناظرة ورقمنا فى المستوى النقطة M التى احداثيها السينى هو قيمة x المفروضة واحداثيها الصادى هو القيمة $f(x)$ ، فإن المحل الهندسى للنقطة $M[x, f(x)]$ يسمى **منحنى الدالة** graph of the given function

ورسم منحنى دالة ما يرتكز على فحص كيفية تغيرها وسوف نستعرض طرق الفحص هذه فيما بعد . أما الآن فسنكتفى بالطرق الجبرية لتعيين خواص التغير فى الدالة وذلك تمهيداً لرسم منحنيها .

إذا أخذنا على سبيل المثال الدالة $y = x^3$ نجد أنها معرفة لجميع قيم x من $-\infty$ إلى $+\infty$ وأنها تكون موجبة لجميع قيم x الموجبة ، وسالبة إذا كانت x سالبة . من الواضح أن عملية تعيين جميع نقط المنحنى لقيم x الواقعة فى الفترة $-\infty < x < \infty$ تكون غير ممكنة عملياً . لذلك نفرض قيما متعددة للمتغير x ونحسب القيم المناظرة y تبعاً للعلاقة $y = x^3$ فنحصل على أزواج من القيم المتناظرة ، كل زوج منها يعين نقطة فى المستوى xy . ومن النقط الخاصة التى تساعد فى رسم المنحنى نقط تقاطعه مع المحورين ، ونحصل عليها بوضع $x = 0$ ونحسب قيمة y المناظرة وهى ما تسمى **بالمقطع الصادى** y intercept ثم نضع $y = 0$ ونحسب قيمة x المناظرة وهى ما تسمى **بالمقطع السينى** x intercept .

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8



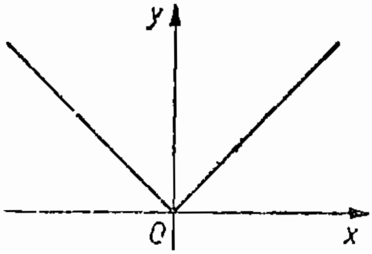
شكل (١ ــ ٢)

بتوقيع هذه النقط فى المستوى x y وبربطها بمنحنى نحصل على التمثيل البيانى لهذه الدالة كما فى شكل (١ - ٢) .

مثال (١)

ارسم منحنى الدالة $y = |x|$.

الحــل : نلاحظ أن مجال هذه الدالة هو محور x بأكمله أى أنها معرفة لجميع قيم x التى تقع فى الفترة $-\infty < x < \infty$. بالإضافة إلى ذلك فان y تكون دائماً موجبة لجميع قيم x السالبة والموجبة . وتمثل هذه الدالة بيانياً بمنصفى الربعين الأول والثانى كما فى شكل (١ - ٣) .



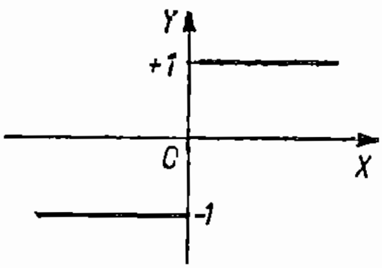
شكل (١ ـ ٣)

مثال (١)

ارسم الدالة $y = \frac{|x|}{x}$

الحل : تعرف هذه الدالة لجميع قيم x باستثناء عند $x = 0$.

ففى الفترة $-\infty < x < 0$ تكون $y = -1$ أما فى الفترة $0 < x < +\infty$ فإن $y = +1$. شكل(١-٤) يبين منحنى هذه الدالة وهو يتكون من المستقيمين $y = -1$ ، $y = +1$ والأول منهما لا يحتوى على النقطة الأخيرة بينما الآخر لا يحتوى على النقطة الأولى . وهذان المستقيمان يظهران كما لو كانا جزئين من مستقيم واحد انتزعت منه النقطة عند $x = 0$ ثم أزيح الجزءان موازيان لمحور x مسافة تساوى 1 . أحدهما تحت محور x والآخر فوقه .



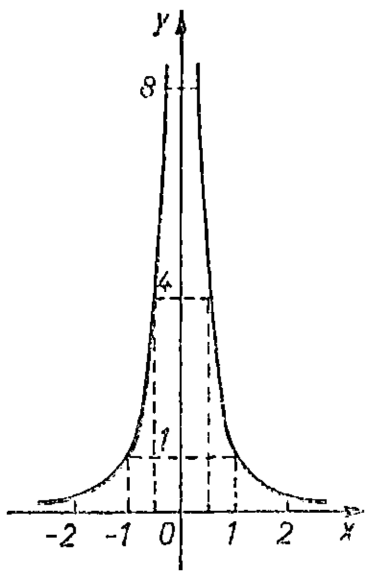
شكل (١ ـ ٤)

مثال (٣)

ارسم منحنى الدالة $y = \frac{1}{x^2}$

الحل : هذه الدالة معرفة لجميع قيم x فيما عدا $x = 0$ وهى موجبة دائماً . لذلك يقع منحنيها بأكمله فوق محور x ويتكون من فرعين أحدهما عن يسار محور y والفرع الآخر عن يمينه كما فى شكل (١ - ٥) .

وعندما تقترب x من الصفر من جهة القيم الموجبة أو من جهة القيم السالبة فإن y تزداد بلا حدود وبذلك يصعد المنحنى إلى أعلى فى اتجاه محور y مقترباً منه باستمرار . كذلك إذا ازدادت القيمة المطلقة للمتغير x بلا حدود فإن y تقترب من الصفر ويقترب فرعا المنحنى باستمرار من محور x .



شكل (١ ــ ٥)

١ ـ ٦ الدوال الصريحة والدوال الضمنية

Explicit and Implicit Functions

علمنا مما سبق أن الدالة هى ارتباط بين متغيرين x , y بحيث تعتمد قيمة y على قيمة x وقلنا أن y تسمى دالة x . فاذا أعطى الارتباط على الصورة الصريحة $y = f(x)$ ، أى أننا عبرنا عن y صراحة بدلالة x سميت الدالة y **دالة صريحة** explicit function لمتغيرها المستقل x . أما إذا كان الارتباط بين x , y على الصورة $F(x,y) = 0$ قيل أن y **داله ضمنيه** implicit function .

فمثلا $y = 3x^2 - 5$ دالة صريحة ، فى حين أن y المعطاة بالمعادلة $3 = \sin y - x y^3$ تكون دالة ضمنية . إلا أنه يمكن فى بعض الأحوال تحويل الصورة الضمنية إلى الصورة الصريحة . فاذا كان $x^2 - 3xy + 4x - 2y = 1$ فان $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{3x + 2}$ وهى صورة صريحة .

١ ـ ٧ التماثل ـ الدوال الزوجيه والدوال الفرديه

Symmetry - Even and odd Functions

وجدنا فى الأمثلة السابقة أن بعض منحنيات الدوال لها نوعاً من التماثل . فإذا علمنا مقدماً هذا التماثل لأمكننا رسم هذه المنحنيات بسهولة .

١) يكون المنحنى **متماثلا بالنسبه لمحور** x إذا تحقق الآتى : إذا وقعت النقطة (a , b) على المنحنى فإن النقطة $(a, -b)$ تقع أيضا على المنحنى . أى أننا إذا كتبنا $y -$ بدلا من y فى معادلة المنحنى فإن المعادلة الناتجة تكون مكافئة تماماً للمعادلة الأصلية .

٢) يكون المنحنى **متماثلا بالنسبه لمحور** y إذا تحقق الآتى : إذا وقعت

النقطة (a, b) على المنحنى فإن النقطة $(-a, b)$ تقع أيضا على المنحنى . فاذا كتبنا $-x$ بدلا من x فى معادلة المنحنى $y = f(x)$ فان المعادلة الناشئة تكافىء تماماً المعادلة الأصلية ، أى أن $f(-x) = f(x)$. ويقال للدالة $f(x)$ فى هـــذه الحالة إنها **داله زوجيه** even function .

٣) يكون المنحنى **متماثلا بالنسبه لنقطه الاصل** إذا تحقق الآتى : إذا وقعت النقطة (a, b) على المنحنى فان النقطة $(-a, -b)$ تقع أيضـاً على المنحنى . فإذا كتبنا $-x$ بدلا من x وكذلك $-y$ بدلا من y فى معادلة المنحنى فان المعادلة الناتجة تكافىء تماما معادلة المنحنى الأصلية ، أى أن $f(-y) = -f(x)$. ويقال للدالة $f(x)$ فى هذه الحالة إنها **داله فرديه** odd function .

وقواعد التماثل هذه تقلل كثيراً من الجهد المبذول فى التعـــرف على شكل المنحنيات قبل رسمها . فإذا كان المنحنى متماثلا بالنسبة لمحور y مثلا فانه يكفى رسم الجزء الواقع عن يمين محور y بعناية ثم نحصل على الجزء المتبقى كصورة للجزء الأول منعـكسة على مرآة موضوعة على محور y .

مثـــال

إختبر من حيث التماثل منحنيات الدوال الآتية :

i) $y = \frac{1}{8}(x^3 - 4x)$

ii) $y^2 = -4x^3$

iii) $9x^2 + 16y^2 = 144$

الحـل : i) $y = \frac{1}{8}(x^3 - 4x)$

بكتابة y — بدلا من y نجد أن

$$-y = \frac{1}{8}(x^3 - 4x) \quad \text{or} \quad y = -\frac{1}{8}(x^3 - 4x)$$

وهذه الصورة مختلفة عن الصورة الأصلية ، أى أنه لايوجد تماثل بالنسبة لمحور x . كذلك بوضع x — بدلا من x ، y — بدلا من y فى الدالة الأولى نجــد أن

$$-y = \frac{1}{8}\left[(-x)^3 - 4(-x)\right] = \frac{1}{8}(-x^3 + 4x)$$

$$= -\frac{1}{8}(x^3 - 4x)$$

$$\text{or } y = \frac{1}{8}(x^3 - 4x)$$

وهى نفس الصورة الأصلية . وعلى ذلك يكون المنحنى متماثلا بالنسبة لنقطة الأصل وتكون الدالة فردية .

$$y^2 = -4x^3 \quad \text{(ii}$$

بوضع y — بدلا من y نجد أن العلاقة الناتجة هى نفس العلاقة الأولى . وعلى ذلك فان المنحنى يكون متماثلا بالنسبة لمحور x .

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \quad \text{(iii}$$

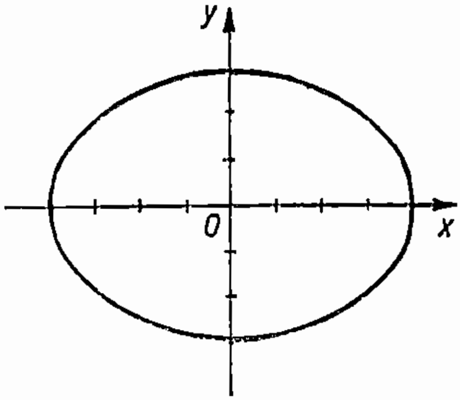
بكتابة y — بدلا من y نجد أن

$$9x^2 + 16(-y)^2 = 144 \quad \text{or} \quad 9x^2 + 16y^2 = 144$$

وهى نفس العلاقة الأصلية ، لذلك يكون منحنى الدالة متماثلا بالنسبة لمحور x . وبالمثل إذا وضعنا x — بدلا من x نحصل على العــلاقة الأصلية مرة

أخرى ، وهذا يعنى أن المنحنى متماثل أيضا بالنسبة لمحور y .

بوضع x — بدلا من x ، y — بدلا من y نحصل أيضـــا على العلاقة الأصلية وبذلك يكون المنحنى متماثلا بالنسبة لنقطة الأصل .



شكل (١ ـ ٦)

وشكل (١ - ٦) يبين المنحنى المطلوب وهو متماثل بالنسبة للمحورين وكذلك بالنسبة لنقطة الأصل ، ويسمى هذا المنحنى بالقطع الناقص .

ملاحظة : إذا تماثل منحنى ما بالنسبة إلى كل من المحورين فانه يكون بالتالى متماثلا بالنسبة إلى نقطة الأصل .

١ ـ ٨ الخطوط التقاربية Asymptotes

فى مثال (٣) بند ١ ـ ٥ وجدنا أن فرعى المنحنى يقتربان باطراد من محور y كلما اقترب | x | من الصفر . وفى الحقيقـــة تتناقص المسافة بين المنحنى ومحور y كلما صعد المنحنى إلى أعلى متجـــاوزاً كل الحدود . يسمى مثل هذا المستقيم **خطا تقاربيا راسيا** vertical asymptote للمنحنى ، وبالمثل فان محور x يسمى

خطا تقاربيا أفقيا horizontal asymptote ، نظراً لأن المسافة بين المنحنى ومحور x تقترب بانتظام من الصفر كلما ازداد $|x|$ بلا حدود . ومعرفة مواضع الخطوط التقاربية تساعد كثيراً فى رسم منحنيات الدوال . وسنعطى فيما يلى طريقة إيجاد الخطوط التقاربية :

لإيجاد الخطوط التقاربية الرأسية حل المعادلة بالنسبة إلى y (أى عبر عن y بدلالة x) . إذا كان الناتج عبارة عن خارج قسمة مقدارين يحتويان على x ، أوجد جميع قيم x التى ينعدم عندها المقام ولا ينعدم البسط فى نفس الوقت فإذا كانت a إحدى هذه القيم فان المستقيم الرأسى المار بالنقطة (a, o) يكون خطاً تقاربياً رأسياً . وعامة تعطى معادلة الخط التقاربى الرأسى من

$$x = \lim_{y \to \infty} x = a$$

ولتعيين الخطوط التقاربية الأفقية نحل معادلة المنحنى بالنسبة إلى x (أى نعبر عن x بدلالة y) ونوجد جميع قيم y التى ينعدم عندها المقام دون البسط . فاذا كانت b إحدى هذه القيم فان المستقيم الأفقى المار بالنقطة (o, b) يكون خطاً تقاربيا أفقياً . ويمكن الحصول على معادلته مباشرة من

$$y = \lim_{|x| \to \infty} y = b$$

مثال (١)

أوجد المقاطع والتماثل والمجال والمدى والخطوط التقاربية للمنحنى المعطى بالمعادلة $(x^2 - 4)\, y^2 = 1$ ثم ارسم المنحنى

الحـل : ا) المقاطع : القيمة $y = o$ لا تعطى مقاطع سينية ، فى حين $x = o$ تعطى $y^2 = -\frac{1}{4}$ وعلى ذلك ليس للمنحنى أية مقاطع .

ب) التماثل : المنحنى متماثل بالنسبة للمحورين (نظراً لظهور كل من x , y فى المعادلة على صورة x^2 ، y^2) وبالتالى فهو متماثل بالنسبة لنقطة الأصل .

حـ) المجال : بحل المعادلة المعطاة بالنسبة إلى y نجد أن

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

ويتـكون المجال من جميع قيم x التى تحقق $|x| > 2$ ، أى التى تقـع فى الفترتين $(-\infty, -2)$ ، $(2, +\infty)$.

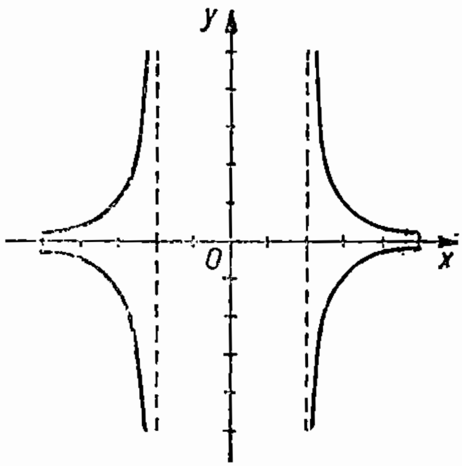
ى) المدى : بحل المعادلة المعطاه بالنسبة إلى x ينتج أن

$$x = \pm \frac{\sqrt{1 + 4y^2}}{y}$$

فيـكون المدى جميع القيم y فيما عدا $y = o$.

هـ) الخطوط التقاربية :

لإيجاد الخطوط التقاربية الرأسية نستعمل التعبير الموجود فى (حـ) . بوضع المقـام مساويا للصفر نحصل على المستقـيمين الرأسيين $x = 2$ ، $x = -2$ كخطين تقاربيين . ولإيجاد الخطوط التقاربية الأفقية نستعمل التعبير المبين فى (ى) ونضع المقام يساوى صفراً فنحصل على المستقيم $y = o$ (أى محور x) كخط تقاربى ، وشكل (١ - ٧) يبين المنحنى المطلوب .



شكل (١ ــ ٧)

مثال (٢)

أوجد المقاطع والتماثل والمجال والمــــدى والخطوط التقاربيــــة للمنحنى المعطى بالعلاقة $x^2 y = x - 3$ وارسم المنحنى .

الحـل :) المقاطع : بوضع $y = 0$ ينتج أن $x = 3$ ويـكون المقطع السينى هو 3 . وبوضع $x = 0$ لا ينتج مقطع صادى .

ب) التماثل : تفشل جميع إختبارات التماثل لهذا المنحنى .

حـ) المجال : بحل المعادلة فى y ينتج أن

$$y = \frac{x - 3}{x^2}$$

ويـكون المجال هو جميع قيم x فيما عدا $x = 0$.

ى) المدى : لحل المعادلة فى x نكتبها على الصورة $y\,x^2 - x + 3 = 0$
وهى معادلة من الدرجة الثانية فى x ويعطى حلها من

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12\,y}}{2\,y} \quad \text{if } y \neq 0 \,.$$

وحيث أن المعادلة الأصلية تبين أن $x = 3$ عندما $y = 0$ ، فان المدى
يتكون من جميع قيم y التى تحقق $y \leqslant \frac{1}{12}$ ، أى الفترة $\left]-\infty \,,\, \frac{1}{12}\right]$.

هـ) الخطوط التقاربيـــة : من (حـ) ينتج أن المستقيم $x = 0$ هو خط
تقاربى رأسى ، كما أنه من (ى) نجد أن المستقيم $y = 0$ هو خط تقاربى أفقى .

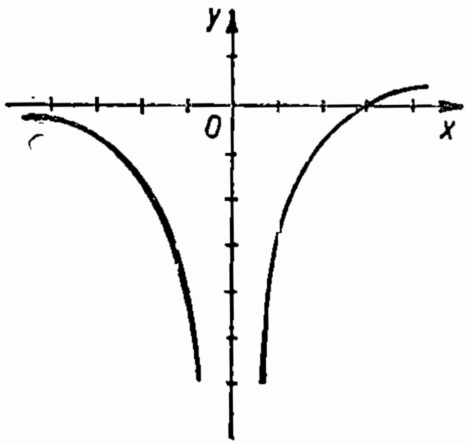
ولرسم المنحنى نكون الجدول الآتى :

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
y	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{\,}$ [illegible]	-4	-2	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{25}$

والمنحنى مرسوم فى شكل (١ - ٨) .

١ - ٩ الدوال العكسية Inverse Functions

اعتبر الدالة المتزايدة $y = f(x)$ المعـــرفة فى المنطقة $(a \,,\, b)$ حيث
$a < b$ ونفرض أن $x_1 \,,\, x_2$ هما قيمتان مختلفتان فى الفترة (a, b) . فاذا كان
$x_1 < x_2$ وكان $y_1 = f(x_1) \,,\, y_2 = f(x_2)$ فانه ينتج من تعريف الدالة
المتزايدة أن $y_1 < y_2$. وعلى ذلك فان كل قيمتين مختلفتين $x_1 \,,\, x_2$ تناظرهما



شكل (١ ـ ٨)

قيمتان مختلفتان للدالة y_1 , y_2 . وللعكس صحيح أيضا بمعنى أنه إذا كان $y_1 < y_2$ وكان $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ ، فمن تعريف الدالة المتزايدة ينتج أن $x_1 < x_2$. أى انه توجد علاقة تناظر واحد إلى واحد بين قيم x والقيم المناظرة y .

إذا اعتبرنا قيم y على أنها قيم متغير مستقل وقيم x كقيم دالة له فاننا نحصل على x كدالة y ، أى $x = \varphi(y)$. تسمى هذه الدالة الدالة العكسية للدالة $y = f(x)$ ومن الواضح أيضا أن الدالة $y = f(x)$ هى الدالة العكسية للدالة $x = \varphi(y)$.

وبطريقة مشابهة يمكن إثبات أن الدالة المتناقصة لها أيضا دالة عكسية .

ملاحظـات :

أ) إذا لم تـكن الدالة $y = f(x)$ متزايدة أو متناقصة فى فترة ما من مجالها فانه يمـكن أن يـكون لها دوال عـكسية متعددة .

ب) إذا كانت الدالتان $y = f(x)$, $x = \phi(y)$ عكسيتين فانهما تمثلان بيانيا بمنحن واحد . أما إذا رمزنا للمتغير المستقل فى الدالة العـكسية بالرمز x ولدالته بالرمز y أى كتبنا الدالة العـكسية على الصورة $y = \phi(x)$ ومثلنـا الدالتين بيانيا فى نفس مستوى الاحداثيات فاننا نحصل على منحنيين مختلفين . ومن الملاحظ أن المنحنيين يكونان متماثلين بالنسبة لمنصف زاوية الربع الأول . وللحصول على معادلة الدالة العـكسية فى الصورة الأخيرة نستبدل x مع y فى العلاقة الأصلية ، فاذا كانت الدالة الأصلية هى $y = f(x)$ فان الدالة العكسية تـكون $x = f(y)$ وبالتالى $y = \phi(x)$.

مثـــال

الدالة $y = x^2$ فى الفترة اللانهائية $(-\infty , +\infty)$. وهذه الدالة ليست بالمتزايدة أو بالمتناقصة وبالتالى ليس لها دالة عـكسية . أما إذا اعتبرنا المجال هو $[0 , +\infty)$ لأصبحت الدالـة متزايدة وتـكون $x = \sqrt{y}$ هى دالتهـا العـكسية . كما أن فى الفترة $(-\infty , 0]$ تـكون الدالة متناقصة وتصبح دالتها العـكسية هى $x = -\sqrt{y}$.

ونلاحظ فى هذا المثال أهمية إعطاء مجال الدالة بجانب الصورة الأصلية التى تعين الدالة .

١ – ١٠ الدوال النسبية الصحيحة أو كثيرات الحدود

Rational Integral Functions or Polynomials

تتكون الدوال النسبية الصحيحة أو كثيرات الحدود من الدالتين 1 (الدالة الثابتة) ، x (الدالة التطابقية) بالتطبيق المتتالى لعمليات الجمع والطرح والضرب. وتأخذ كثيرة الحدود الصورة العامة

$$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

حيث a_0 ، a_1 ، ... ، a_n ثوابت تسمى المعاملات ، n عدد صحيح موجب يسمى درجة كثيرة الحدود . ومن الملاحظ أن هذه الدالة معرفة لجميع قيم x أى فى الفترة اللانهائية $(-\infty, +\infty)$.

فمثلا $y = a x + b$ هى دالة خطية كما أن $y = a x^2 + b x + c$ هى دالة من الدرجة الثانية .

١–١١ الدوال النسبية وغير النسبية

Rational and Irrational Functions

تنشأ هذه الدوال من إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على الدالتين 1 ، x أى بزيادة عملية القسمة على العمليات الداخلة فى تكوين كثيرات الحدود . وعلى ذلك تكون الصورة العامة للدالة النسبية هى نسبة بين كثيرتى حدود أى

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$$

على سبيل المثال الدالة

$$y = \frac{3x^4 - 3x + 2}{5x^4 + x^2 - x} .$$

ومن الملاحظ هنا أن كثيرات الحدود تعتبر حالة خاصة من الدوال النسبية .

أما الدوال التى يدخل فى تكوينها عمليات أخرى غير المذكورة فإنها تسمى دوالا غير نسبية ، فمثلا

$$y = \frac{2x^3 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 - 5x^2}}$$

دالة غير نسبية نظراً لاستخدام عملية استخراج الجذور فى تكوينها .

١—١٢ الدوال الجبرية وغير الجبرية

Algebraic and Transcendental Functions

الدالة الجبرية هى أية دالة $y = f(x)$ تحقق معادلة على الصورة

$$P_0(x)\, y^n + P_1(x)\, y^{n-1} + \cdots + P_n(x) = 0$$

حيث $P_0(x)$, $P_1(x)$, ... , $P_n(x)$ كثيرات حدود معلومة ، فمثلا $y = x^{\frac{1}{3}}$ دالة جبرية لأنها تعرف فى الصورة الضمنية بالعلاقة $y^3 - x = 0$. كما أن الدالة

$$y = \frac{2x^3 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^3}}$$

تعتبر دالة جبرية نظراً لأنها تحقق المعادلة

$$(25x^4 + 10x^3 + 1)\, y^4 - (40x^6 + 8x^4 + 10x^5 + 2x)\, y^2 + (16x^8 - 8x^5 + x^2) = 0$$

ويمكن التحقق من ذلك بالتخلص من الجـــذور الموجودة فى التعريف بالتربيع .

وعلى ذلك فان الدالة الجبرية تنشأ من الدالتين 1 , x بإجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة واستخراج الجذور عليها . كما يلاحظ أن الدوال النسبيـة تعتبر حالة خاصة من الدوال الجبرية لايدخـل فى تكوينها عملية استخراج الجذور .

النهـايات Limits

١-١٣ نهـاية متتابعة من الأعداد

The Limit of a Sequence of Numbers

يقال للعدد a إنه نهاية المتتابعة ... , $x_1 , x_2 , \dots , x_n , \dots$

أى

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

عندما تؤول n إلى ما لا نهاية ، إذا تواجد لـكل $\varepsilon > 0$ $N = N(\varepsilon)$ (أى يعتمد على ε) بحيث أن $| x_n - a | < \varepsilon$ عندما $n > N$. أى أننـا إذا فرضنا أى عدد موجب ε مها كان صغيراً فانه يتواجد دائما حد x_n برقم N من المتتابعة بحيث تصبح القيمة المطلقة لفروق الحدود التالية له أقل من العدد المفروض .

مثال (١)

أثبت أن

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

الحـل : تتـكون المتتابعة فى هذا المثال من الأعداد

$$1 , \frac{3}{2} , \frac{5}{3} , \frac{7}{4} , \frac{9}{5} , \frac{11}{6} , \dots \dots , \frac{2n+1}{n+1} , \dots$$

أى أن فى هذا المثال يكون

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1} , a = 2$$

تـكون الفرق $x_n - a$ ، أى

$$\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}.$$

ولـكى تـكون القيمة المطلقة لهذا الفرق أقل من ε يجب أن يـكون

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

أى

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$$

ومعنى هذا أنه لـكل عدد ε يوجد عدد $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ بحيث يتحقق لجميع قيم $n > N$ الآتى

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon.$$

وعلى هذا فان العدد 2 هو نهاية المتتابعة $x_n = \frac{2n-1}{n-1}$ وبالتـــالى تـكون العلاقة الأصلية صحيحة .

مثال (٢)

أثبت أن نهاية المتتابعة

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

عندما يؤول $n \to \infty$ هى الوحدة . لأى قيم $n > N$ تتحقق المتباينة $|x_n - 1| < \varepsilon$ حيث ε عدد اختيارى موجب ؟

أوجد N عندما : ا) $\varepsilon = 0.1$ ، ب) $\varepsilon = 0.01$ ، حـ) $\varepsilon = 0.001$

الحل : لكى نثبت أن نهاية المتتابعة x_n هى الوحدة يكفى أن نثبت أن $|x_n - 1|$ تؤول إلى الصفر عندما $n \to \infty$.

$$\left|x_n - 1\right| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

وعندما تؤول $n \to \infty$ يؤول هذا المقدار إلى الصفر .

ولحساب قيمة N نضع المقدار الأخير أقل من ε :

$$\left|x_n - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{or} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N$$

ا) فى حالة $\varepsilon = 0.1$ تكون $N = 9$ ؛ أى أنه إعتباراً من الحد العاشر فى المتابعة تكون القيمة المطلقة لفرق كل حد عن النهاية 1 أقل من 0.1

ب) فى حالة $\varepsilon = 0.01$ تكون $N = 99$

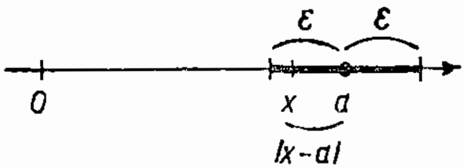
حـ) فى حالة $\varepsilon = 0.001$ تكون $N = 999$

١—١٤ نهاية متغير The Limite of a Variable

يقال للعدد الثابت a إنه نهاية المتغير x إذا أمكن لكل عدد صغير موجب ε تعيين قيمة للمتغير x بحيث تحقق جميع قيمه التالية المتباينة $|x - a| < \varepsilon$.

فاذا كان العدد a هو نهاية المتغير x ، يمكننا القول بأن x يقترب من نهايته a ونكتب

$$x \to a \quad \text{or} \quad \lim x = a$$



شكل (١ ــ ٩)

شكل (١ - ٩) يوضح المعنى الهندسي لنهاية متغير . نفرض جواراً صغيراً مركزه النقطة التي تمثل النهاية a ونصف قطره ε . فيكون معنى اقتراب x من نهايته a أنه أثناء تغير x نصل إلى قيمة له بحيث أن جميع النقط التي تناظر قيمه التالية تقع جميعها في الجوار المفروض .

والجدير بالملاحظة أنه إذا كان متغير ما يؤول إلى نهاية فان هذه النهـــاية تـكون واحدة ، بمعنى أن مثل هذا المتغير لا يمكن أن يكون له أكثر من نهـاية واحدة ، ذلك لأنه إذا كان

$$\lim x = a \quad \text{and} \quad \lim x = b \ , \ a < b$$

فان على x أن يحقق في نفس الوقت كلتا المتباينتين

$$| x - a | < \varepsilon \quad \text{and} \quad | x - b | < \varepsilon$$

وذلك لـكل قيمة إختيارية صغيرة ε . ولكــن هذا مستحيل إذا اخترنا $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ أى أقل من نصف المسافة بين النهايتين . كذلك لا يجب أن يتبادر إلى ذهننا أن كل متغير له نهاية .

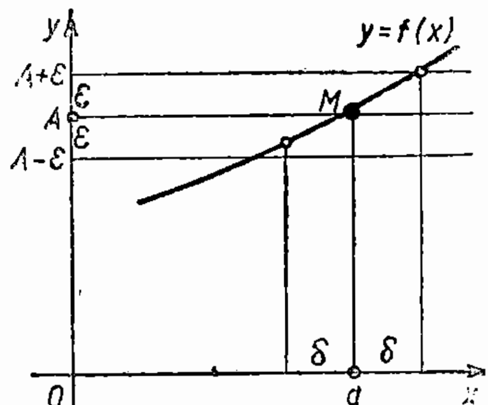
تعريف : يقال للمتغير x إنه يقترب من ما لا نهاية ∞ إذا أمكن لـكل عدد موجب مفروض M مهما كبر أن نجد قيمة للمتغير x بحيث أنه إبتداء من هذه القيمة تحقق جميع قيمه التاليـــة المتباينة $| x | > M$ ونـكتب في هذه الحالة $x \to \infty$.

١ ـ ١٥ نهاية دالة The Limit of a Function

نفرض أن $y = f(x)$ هى دالة معرفة فى جوار ما للنقطة $x = a$. يقال للدالة $f(x)$ أنها تقترب من النهاية A عندما يقترب x من a إذا تحقق الآتى : لكل عدد موجب ε (مهما صغر) يمكن إيجاد عدد موجب $\delta(\varepsilon)$ (يعتمد على ε) بحيث أنه لجميع قيم x التى تحقق المتباينة $|x-a| < \delta$ يكون $|f(x)-A| < \varepsilon$.

ويكتب هذا التعريف على الصورة

$$f(x) \to A \quad \text{as} \quad x \to a \quad \text{or} \quad \lim_{x \to a} f(x) = A$$



شكل (١ ـ ١٠)

وشكل (١ - ١٠) يوضح هذه النهاية على منحنى الدالة $y = f(x)$ كما يلى .
حيث أن المتباينة $|x-a| <$ يترتب عليها المتباينة $|f(x)-A| < \varepsilon$ فمعنى هذا أن كل النقط x التى لا تبعد عن النقطة a بأكثر من δ تقابلها نقط M على منحنى الدالة تقع جميعها فى الشريط الأفقى الذى عرضه 2ε ويحدده المستقيمان $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$.

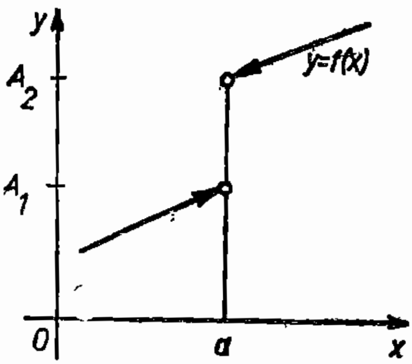
ملاحظة (١) : إذا اقتربت الدالة $f(x)$ من النهاية A_1 حينما يقترب x من عدد معين a بحيث يأخذ x قيما أقل من a فقط فإننا نكتب

$$\lim_{x \to \varepsilon -} f(x) = A_1$$

ونسمى A_1 نهاية الدالة $f(x)$ عن يسار النقطة a . أما إذا أخذ x قيماً أكبر من a فقط فإننا نكتب

$$\lim_{x \to a +} f(x) = A_2$$

ونسمى A_2 نهاية الدالة عن يمين النقطة a ، وشكل (١-١١) يوضح الحالتين.



شكل (١ – ١١)

من الممكن إثبات أنه إذا تواجدت النهايتان عن اليمين وعن اليسار وكانتا متساويتين أى $A_1 = A_2 = A$ فإن A تكون النهاية عند a بالمعنى الذى ذكرناه فى أول هذا البند .

ملاحظة (٢) : ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند النقطة a حتى تتواجد نهايتها عندما $x \to a$ ذلك لأننا عند ما نبحث عن النهاية نعتبر

قيم الدالة عند النقط التى تقع فى جوار a والتى تختلف عنها . والمثال التالى يوضح هذه الملاحظة .

مثـال

أثبت أن $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

الحل : فى هذا المثال نجد أن الدالة $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ غير معرفة عند $x = 2$.

والمطلوب الآن إثبات أنه لأية قيمة اختيارية ε نوجد δ بحيث تتحقق المتباينة

$$\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| < \varepsilon$$

إذا تحقق $| x-2 | < \delta$. ولكن عندما $x \neq 2$ فإن المتباينـــة الأولى تكافىء المتباينة

$$\left| \frac{(x-2)\ (x+2)}{x-2} - 4 \right| = | (x+2) - 4 | < \varepsilon$$

or $$| x-2 | < \varepsilon$$

وهكذا لأى عدد ε إختيارى تتحقق المتباينة الأولى إذا تحققت المتبـاينة الأخيرة $(\delta = \varepsilon)$ وهذا يعنى أن الدالة المعطاة تكون نهايتها 4 عندما $x \to 2$.

تعريف : تقترب الدالة $f(x)$ من النهاية A عندما $x \to \infty$ إذا أمكن لكل عدد صغير موجب اختيارى ε تعيين عدد موجب N بحيث تتحقق المتباينـــة $| f(x) - A | < \varepsilon$ لجميع قيم x التى تحقق $| x | > N$.

مثـال

أثبت أن $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x} \right) = 1$

الحل : نختار عدداً صغيراً موجباً ε . والمطلوب الآن تحقيق المتباينة

$$\left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

بشرط أن $N < | x |$ تعيين N حسب اختيار ε . والمتباينـة الأخيرة تتحقق إذا كان

$$\left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| = \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

or

$$| x | > \frac{1}{\varepsilon} = N$$

وهذا يعنى أن

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 .$$

١ ـ ١٦ الدوال التى تؤول الى ما لا نهايه والدوال المقيدة

Functions that Approach Infinity and Bounded Functions

تقترب الدالة $f(x)$ من ما لا نهاية عندما $x \to a$ ، أى أنها تصبح لانهائية القيمة عند ما $x \to a$ ، إذا أمكن لـكل عدد موجب M (مهما كبر) إيجاد عدد $\delta > 0$ بحيث يـكون $| f (x) | > M$ لجميع قيم x التى تختلف عن a والتى تحقق الشرط $| x - a | < \delta$. ونـكتب

$$\lim_{x \to a} f (x) = \infty$$

or

$$f(x) \longrightarrow \infty \quad \text{as} \quad x \longrightarrow a$$

إذا اقتربت $f(x)$ من ما لانهاية عندما $a \longleftarrow x$ متخذة فى أثناء اقترابها قيماً موجبة فقط أو سالبة فقط فإننا نستعمل على الترتيب الصورتين المناسبتين لذلك وهما

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$$

مثال (١)

أثبت أن $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

الحل : لأية قيمة $0 < M$ نجد أن

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M$$

بشرط أن

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M} \,, \qquad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta$$

ونلاحظ هنا أن الدالة المعطاة تأخذ قيماً موجبة فقط .

مثال (٢)

أثبت أن $\lim_{x \longrightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$.

الحل : لأية قيمة $0 < M$ نجد أن

$$\left| -\frac{1}{x} \right| > M$$

بشرط أن يتحقق

$$| x | = | x - 0 | < \frac{1}{M} = \delta \ .$$

والدالة المعطاة هنا تكون موجبة إذا كانت x سالبة والعكس بالعكس وعلى هذا يمكننا أن نكتب

$$\lim_{x \to 0-} \left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to 0+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

ملاحظه (١) : إذا إقتربت الدالة $f(x)$ من ما لا نهاية عندما $x \to \infty$ فإننا نكتب

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

وهناك ثلاث حالات أخرى ألا وهى :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

فمثلا :

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

ملاحظه (٢) : من الجائز ألا تقترب الدالة $y = f(x)$ من نهاية محدودة أو من ما لا نهاية عندما $x \to a$ أو $x \to \infty$.

مثال (١)

الدالة $y = \sin x$ معرفة فى المنطقة اللانهائية $(-\infty , +\infty)$ إلا أنها

لاتقترب من نهاية محدودة أو من ما لا نهاية عندما $x \longrightarrow +\infty$ مثلاً .

مثال (٢)

الدالة $y = \sin \frac{1}{x}$ معرفة لجميع قيم x فيما عدا $y = 0$. وهـذه الدالة لاتقترب من نهاية محدودة أو من ما لا نهاية عندما $x \longrightarrow 0$.

تعـاريف :

١) يقال للدالة $y = f(x)$ لإنها مقيـدة bounded فى فترة معينــة لمتغيرها المستقل x إذا تواجد عدد موجب M بحيث تتحقق لجميع قيم x فى الفـــترة المذكورة المتباينة $M \leqslant |f|$. فإذا لم يتواجد مثل هذا العدد M فإن الدالة تسمى غير مقيدة unbounded فى الفترة المعطاة .

٢) نسمى الدالة $f(x)$ مقيدة عندما $x \longrightarrow a$ إذا وجد جوار ما مركزه a تـكون فيه الدالة مقيدة .

٣) تسمى الدالة $y = f(x)$ مقيدة عندما $x \longrightarrow \infty$ إذا وجد عدد $N > 0$ بحيث تـكون الدالة $f(x)$ مقيدة لجميع قيم x التى تحقق المتباينة $|x| > N$.

وتعتمد جميع هذه التعاريف على الحقيقة القائلة بأنه إذا كان

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = A$$

حيث A عدد محدود فان الدالة $f(x)$ تـكون مقيدة عندما $x \longrightarrow a$.

وواضح من تعريف الدالة المقيدة أنه إذا كان

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{or} \quad \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

فان الدالة $f(x)$ تكون غير مقيدة .

كذلك يمكن إثبات أنه إذا كان $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$ فان الدالة $y = \frac{1}{f(x)}$ تكون مقيدة عندما $x \to a$.

١ – ١٧ النظريات الأساسية للنهايات

Basic Theorems of Limits

سنعتبر فى هذا البند مجموعات من الدوال التى تعتمد على نفس المتغير المستقل x حيث $x \to a$ أو $x \to \infty$. وسنجرى الإثبت فى إحدى هاتين الحالتين حيث أننا أثبتنا فيما سبق أنهما متشابهتان .

أولا : إذا كان $f(x) \to A_1$ عندما $x \to a$ وكذلك $f(x) \to A_2$ عندما $x \to a$ فان $A_1 = A_2$.

ثانيا : إذا كان c ثابتاً وكان $f(x) = c$ لجميع قيم x فانه لأى عدد a يكون $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$. والإثبات ينتج مباشرة من تعريف النهاية .

ثالثا : إذا كان a عدداً حقيقياً وكان $f(x) = x$ لجميع x فان

$$\lim_{x \to a} f(x) = a .$$

أى أنه للدالة الخاصة $f(x) = x$ يمكن الحصول على النهاية بالتعويض المباشر عن x بالقيمة a .

رابعا : نفرض أن عدداً $h > 0$ بحيث أن $f(x) = g(x)$ لجميع قيم x التى تحقق $0 < |x - a| < h$. فاذا كان

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

فانه ينتج مباشرة أن

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

وهذا يعنى أنه فى الحالة التى يتعذر فيها إيجاد نهاية $f(x)$ بالتعويض المباشر نحاول ايجاد دالة أبسط $g(x)$ بحيث أن $g(x) = f(x)$ عندما $0 < | x-a | < h$ ثم نحسب نهاية $g(x)$.

فمثلا الدالتان

$$f(x) = \frac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)} \qquad \text{and} \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{3}$$

متطابقتان فيما عدا عند $x = 4$. وعلى هذا يكون

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} g(x) = \frac{4}{3}$$

خامسا : إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتى x ، كان

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{and} \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

فإن

$$\lim_{x \to a} [\, f(x) + g(x) \,] = A + B$$

ذلك لأنه حسب الفرض يمكن جعل $| f(x) - A |$ وكذلك $| g(x) - B |$ صغيرة كما نشاء كلما كان x قريباً قرباً كافياً من a . وعلى هذا فإن $| f(x) + g(x) - A - B |$ يمكن جعله صغيراً إذا كان x على مقربة من a .

ويمكن تعميم هذه النظرية لأى عدد من الدوال فنقول :

نهاية مجموع جبرى لعدد محدود من الدوال تساوى نفس المجموع الجبرى لنهايات هذه الدوال ، أى أن

$$\lim_{x \to a} (f_1 + f_2 + \dots + f_n)$$

$$= \lim_{x \to a} f_1 + \lim_{x \to a} f_2 + \dots + \lim_{x \to a} f_n$$

مثـال

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x}$$

$$= 1 + 0 = 1$$

سادسا : إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ هما دالتا x بحيث أن

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{and} \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

فإن

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = A \cdot B$$

ويلاحظ هنا أنه يمكن تعميم النظرية لحاصل ضرب أى عدد محدود من الدوال .

مثـال

إذا كان

$$\lim_{x \to a} f(x) = A , \quad \lim_{x \to a} g(x) = B , \quad \lim_{x \to a} h(x) = C$$

فأوجد قيمة

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) + h(x) \right]$$

الحـل : نعرف أولا الدالة $F(x)$ على أنهـا حاصل ضرب الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$. فيـكون

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = A . B$$

وبحساب نهاية المجموع $F(x) + h(x)$ نجد أن

$$\lim_{x \to a} [F(x) + h(x)] = A . B + C$$

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) + h(x) \right] = A . B + C$$

سابعا : إذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ دالتى x وكان

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad , \quad \lim_{x \to a} g(x) = B \quad \text{and} \quad B \neq 0$$

فإن

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} .$$

ومن الضرورى هنا ذكر أن $B \neq 0$ حتى يـكون للتعبير $\frac{A}{B}$ معنى .

ولإثبات هذا نفرض أنه قرب النهاية يـكون

$$f = A + \varepsilon \qquad \text{and} \qquad g = B + \eta$$

حيث ε ، δ هما متناهيتان فى الصغر تؤولان فى النهاية إلى الصفر عندما $x \longrightarrow a$ ، لذلك يكون

$$\frac{f}{g} = \frac{A+\varepsilon}{B+\delta} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A+\varepsilon}{B+\delta} - \frac{A}{B} \right)$$

$$= \frac{A}{B} + \frac{\varepsilon B - \delta A}{B(B+\delta)}$$

والمقدار $\frac{A}{B}$ كمية ثابتة فى حين أن المقدار $\frac{\varepsilon B - \delta A}{B(B+\delta)}$ متناهية فى الصغر تؤول إلى الصفر كلما اقتربت x من a قرباً كافيـاً ، وبالتالى ينتج المطلوب .

مثال (١)

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \lim_{x \longrightarrow 1} (3x+5) \,/\, \lim_{x \longrightarrow 1} (4x-2)$$

$$= \frac{3 \times 1 + 5}{4 \times 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4$$

مثال (٢)

أوجد قيمة $\lim_{x \longrightarrow 2} \sqrt{\frac{x^4-16}{x^3-8}}$

الحـل : نلاحظ أن التعويض المباشر يبين أن الدالة غير معرفة عند $x = 2$.
فاذا رمزنا للكمية تحت الجذر بالرمز $f(x)$ فعندما $x \neq 2$ نجد أن

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

فإذا وضعنا

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 + 2x + 4}$$

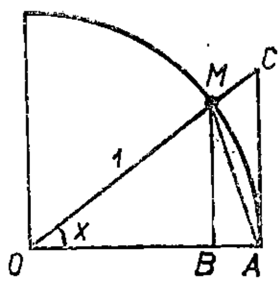
لوجدنا أن $g(x)$ معرفة لجميع قيم x . كما نلاحظ أيضاً أن $f(x) = g(x)$ باستثناء عند $x = 2$. على هذا تكون النهاية المطلوبة مساوية

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 + 2x + 4}} = \sqrt{\frac{32}{12}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

١ — ١٨ بعض النهايات المشهورة

أولا : نهاية الدالة $\frac{\sin x}{x}$ عندما $x \to 0$

هذه الدالة غير معرفة عند $x = 0$ لأن كل من البسط والمقام ينعدم عند هذه النقطة . لإيجاد هذه النهاية نرسم دائرة نصف قطرها الوحدة كما فى شكل (١ - ١٢) ونرمز للزاوية المركزية MOB بالرمز x حيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$. من الرسم ينتج مباشرة أن مساحة المثلث MOA أقل من مساحة القطاع MOA وهذه بدورها أقل من مساحة المثلث COA .



شكل (١-١٢)

$$\Delta\ MOA = \tfrac{1}{2}\ OA\ .\ MB = \tfrac{1}{2}\ .\ 1\ .\ \sin x = \tfrac{1}{2}\ \sin x$$

$$\text{Sector } MOA = \tfrac{1}{2}\ (OA)^2\ x = \tfrac{1}{2}\ .\ 1^2\ .\ x = \tfrac{1}{2}\ x$$

$$\Delta\ COA = \tfrac{1}{2}\ OA\ .\ AC = \tfrac{1}{2}\ .\ 1\ .\ \tan x = \tfrac{1}{2}\ \tan x$$

بعد اختصار $\frac{1}{2}$ تؤول المتباينة التى تربط هذه الكميات بعضهـــا ببعض إلى الصورة

$$\sin x < x < \tan x$$

وبقسمة جميع الحدود على $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

or

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

وقد استنتجنا هذه المتباينة على فرض أن $0 < x$. فإذا لاحظنا أن

$$\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x} \text{ and } \cos(-x) = \cos x$$

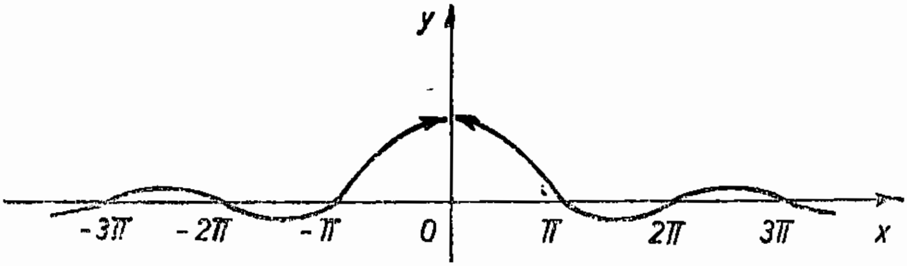
فانه ينتج أن المتباينة تكون صحيحة أيضا لقيم x السالبة . وحيث أن

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

فان الدالة $\frac{\sin x}{x}$ تقع بين كميتين لهما نفس انهاية (الوحـدة) . وعلى هذا يكون

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

ويبين شكل (١ - ١٣) منحنى الدالة $y = \frac{\sin x}{x}$



شكل (١ـ١٣)

نتيجـة :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 .$$

من هذا نستنتج أنه إذا كانت الزاوية x صغيرة فان كل من $\sin x$, $\tan x$ يكون قريباً جداً من x (مقاسة بالتقدير الدائرى) كلما اقتربت الزاوية من الصفر قرباً كافيـاً .

مثال (١)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin k x}{x} = \lim_{x\to 0} k \frac{\sin k x}{k x}$$

$$= k \lim_{kx\to 0} \frac{\sin k x}{x k} = k \cdot 1 = k$$

مثال (٢)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}$$

$$=1\times 0=0$$

مثال (٣)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{\beta x}}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

ثانيا : النهاية $\lim_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1}$

وهذه النهاية صحيحة لجميع قيم n النسبية الموجبة والسالبة .

لإثبات هذه النهاية نفرض أن $y=x-a$ فعندما $x\longrightarrow a$ فان $y\longrightarrow 0$.

بالتعويض فى الدالة الأصلية ينتج أن

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{1}{y}\left[(a+y)^n-a^n\right]$$

$$=\frac{a^n}{y}\left[\left(1+\frac{y}{a}\right)^n-1\right]$$

وتبعاً لنظرية ذى الحدين نجد أن

$$\left(1+\frac{y}{a}\right)^n = 1+n\frac{y}{a}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{y^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{y^3}{a^3}+\dots$$

وبالتعويض فى العلاقة السابقة ينتج أن

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{a^n}{y}\left[n\frac{y}{a}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{y^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{y^3}{a^3}+\dots\right]$$

$$= n\,a^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\,y+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}\,y^2+\dots$$

فإذا اقتربت x من a تؤول y إلى الصفر فنحصل على

$$\lim_{\substack{x\to a\\(y\to 0)}}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n\,a^{n-1},$$

مثال (١)

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=1\Big/\lim_{x\to 8}\frac{x^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{x-8}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{3}\times 8^{\frac{1}{3}-1}}=3\times 8^{\frac{2}{3}}=12$$

or :

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{\substack{x\to 8\\(\sqrt[3]{x}\to 2)}}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$=3\times 2^{3-1}=12$$

مثال (٢)

أوجد قيمة

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

الحــل : نضع $y^6 = 1 + x$ فنجد أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1}$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}$$

١–١٩ العدد e واللوغاريتمات الطبيعية أو النبيرية

The Number e and the Natural or Napierian Logarithms

نعتبر المقدار $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ حيث n متغير متزايد يأخذ القيم 1, 2, 3...

وسنثبت الآن أن المقدار $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ له نهاية عندما $n \to \infty$ وهذه تقع بين 2 ، 3 باستخدام نظرية ذى الحدين نجد أن

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$+ \dots .. + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \dots \quad (1)$$

من هذا يتضح أن $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ يزداد كلما ازداد n .

ومن الملاحظ أن

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1, \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) < 1, \dots$$

فبالتعويض فى المفكوك الأخير ينتج

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

وحيث أن

$$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}, \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

فإنه يمكن كتابة المتباينة

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \underset{\frown}{1} + \underset{\frown}{\tfrac{1}{2}} + \underset{\frown}{\frac{1}{2^2}} + \dots + \underset{\frown}{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

والحدود التى تحتها قوس فى متوالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 1 .

لهذا ينتج أن

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left[1 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left[2 - (\tfrac{1}{2})^{n-1}\right] < 3$$

or

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$$

ولـكن من المفـكوك (1) ينتج أن

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \geqslant 2$$

وعلى هذا تتحقق المتباينة

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$$

وهذا يثبت أن المقدار $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ مقيد . وحيث أن المقدار متزايد أيضا ، لذا وجب وجود نهاية له عندما $n \longrightarrow \infty$ ويرمز لهذه النهاية بالحرف e .

$$e = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

هذا العـــدد غير نسبي ، أى لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{p}{q}$ حيث q, p عددان صحيحان . والقيمة التقريبية لهذا العدد حتى عشرة أرقام عشرية هى

$$e = 2.7182818284$$

ومن الممكن اثبات أن الدالة $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ تقترب من النهاية e عندما تقترب x من ما لا نهاية ، أى أن

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

وإذا كتبنا $u = \frac{1}{x}$ فانه عندما $x \longrightarrow \infty$ نجد أن $u \longrightarrow 0$ ويمكن كتابة النهاية السابقة على الصورة

$$\lim_{u \longrightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e.$$

مثال (١)

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{5}$$

$$= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5} = e \times 1 = e$$

مثال (٢)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} . \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$= e.\ e.\ e$$

$$= e^3$$

مثال (٣)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{x}$$

نضع $x = 2y$ فعندما $x \to \infty$ تؤول y أيضا إلى ∞ .

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2$$

مثال (٤)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4}$$

وبوضع $y = x - 1$ (حيث $y \to \infty$ عندما $x \to \infty$) نجد أن

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^{y+4}$$

$$= \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^{y} \cdot \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{4}{y}\right)^{4}$$

$$= e^4, 1 \qquad \text{(كما فى مثال ٣)}$$

$$= e^4$$

اللوغاريتمات الطبيعية أو النبيرية

تعرف اللوغاريتمات التى أساسها العدد 10 باللوغاريتمات العادية أو العشرية Common or decimal logarithms وتنسب أحيـــانا إلى العالم الأنجليزى بريجز Briggs . ويرمز لهذه اللوغاريتمات بالرمز log فيكتب لوغاريتم العدد n للاساس 10 على الصورة log n .

واللوغاريتمات التى أساسها العدد ... $e = 2.71828$ تسمى باللوغاريتمات الطبيعية أو النبيرية نسبة للعالم الرياضى نبير Napier الذى وضعها . ويكتب لوغاريتم العدد n للاساس e على الصورة $\ln n$. وهذا النوع من اللوغاريتمات جداول تشبه جداول اللوغاريتمات العشرية .

لايجاد العلاقة بين هذين النوعين من اللوغاريتمات نعود إلى التعـريف الأساسى للوغاريتم . يعرف لوغاريتم العدد n للاساس a بأنه **الأس** الذى يرفع إليه الأساس حتى تسارى القوة الناتجة العدد n . فاذا كانت b , a , n أعداداً موجبة فمن تعريف اللوغاريتم ينتج أن

$$n = b^{\log_b n} \quad , \quad b = a^{\log_a b}$$

بالتعويض عن b من العلاقة الثانية فى العلاقة الأولى نجد أن

$$n = \left(a^{\log_a b} \right)^{\log_b n}$$

or

$$n = a^{\left(\log_a b \,.\, \log_b n \right)}$$

ولكن

$$n = a^{\log_a n}$$

بالمقارنة تنتج العلاقة المطلوبة وهى

$$\log_a n = \log_b n \,.\, \log_a b$$

ويمكن تطبيق هذه العلاقة للتحويل من اللوغاريتمات العشرية إلى اللوغاريتمات الطبيعية بأن نضع $a = e$ ، $b = 10$ فينتج

$$\log_e n = \log_{10} n \cdot \log_e 10$$

ولوغاريتم 10 للاساس e هو عدد ثابت يساوى 2.303 تقريبا . فإذا استعملنا الرموز المعتادة للدلالة على كل نوع من اللوغاريتمات فإن العلاقة الأخيرة تؤول إلى

$$\ln n = 2.303 \log n$$

وبالمثل يمكن التحويل من اللوغاريتمات الطبيعية إلى العشرية إما بقسمة طرفى المعادلة الأخيرة على 2.303 أو بوضع $a = 10$ ، $b = e$ فى العلاقة الأصلية فنحصل على

$$\log_{10} n = \log_e n \cdot \log_{10} e$$

or

$$\log n = 0.4343 \ln n$$

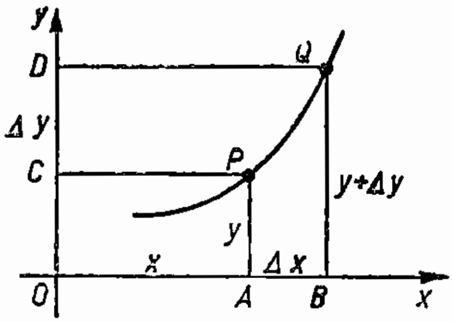
حيث العدد 0.4343 هو لوغاريتم e للاساس 10 .

١ — ٢٠ الزيادة فى المتغير المستقل وفى الدالة

Increment of the Argument and Function

نأخذ قيمتين إختياريتين للمتغير المستقل x فى مجال الدالة $y = f(x)$ ونسمى الأولى القيمة الإبتدائية والثانية القيمة المتغيرة . وفى مناقشتنا الآتية سنفترض أن القيمة الابتدائية ثابتة وهى التى تناظرها النقطة A على محور x كما فى شكل (١ — ١٤) . ويرمز عادة للقيمة المتغيرة بالرمز $x + \Delta x$ وتناظرها النقطة B فى الشكل .

Δx هى الكمية التى تغير بها المتغير المستقل x فى انتقاله من القيمة الأولى إلى الثانية ، ويطلق عليها اسم الزيادة فى المتغير المستقل .



شكل (١ — ١٤)

و Δx تساوى الفرق بين القيمة الثانية والقيمة الأولى لهذا المتغير .

أمثلة

١) إذا تغير x من 3.0 إلى 3.1 فإن الزيادة

$$\Delta x = 3.1 - 3.0 = 0.1$$

٢) إذا تغير x من 5 إلى 4.8 تكون الزيادة

$$\Delta x = 4.8 - 5 = -0.2$$

والإشارة السالبة هنا تعنى أن Δx هى نقصان وليست زيادة .

٣) إذا تغير x من -1 إلى -0.98 تكون الزيادة

$$\Delta x = -0.98 - (-1) = 0.02$$

والقيمتان x , $x + \Delta x$ للمتغير المستقل تناظرهما قيمتان محددتان للدالة : القيمة الابتدائية y والقيمة المتغيرة $y + \Delta y$.

Δy هى الكمية التى تتغير بها قيمة الدالة عندما يتغير x بمقدار Δx ، وتسمى Δy بالزيادة فى الدالة وتساوى الفرق بين القيمة الثانيـــة للدالة وقيمتها الأولى .

نوقع الآن النقطتين $P(x, y)$ ، $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ على منحنى الدالة $y = f(x)$ كما فى شكل (١ - ١٤) فيكون

$$\Delta x = AB = OB - OA.$$

$$\Delta y = CD = OD - OC.$$

والمعنى البيانى للزيادة Δy فى الدالة هو الفـــرق بين الاحداثيين الرأسيين للنقطتين على منحنى الدالة المناظرتين لقيمتى x المتغيرة والابتدائية .

الزيادة فى الدالة Δy يمكن أن تكون موجبة أو سالبة حسب ما إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متزايدة أو متناقصة على الترتيب . فتكون Δy موجبة إذا وقعت النقطة D فوق النقطة الثابتة C وتكون سالبـة إذا وقعت النقطة D تحت النقطة C .

مثال (١)

أوجد التغير فى مساحة المربع y إذا تغير طول الضلع x بمقدار Δx .

الحل : مساحة المربع هى $y = x^2$ فإذا كان طول ضلـــع المربع هو $x + \Delta x$ فان مساحته تصبح $y + \Delta y$ وتكون

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

وبطرح القيمة الابتدائية للمساحة من القيمة المتغيرة نجد أن

$$\Delta\ y = (x + \Delta\ x)^2 - x^2$$

or

$$\Delta\ y = 2\ x.\ \Delta\ x + (\Delta\ x)^2.$$

فمثلا إذا زاد طول الضلع من 3 إلى 3.1 من الأمتار فإن المساحة تزداد بمقدار $(\Delta\ x = 0.1\ m\ ,\ x = 3m)$

$$\Delta\ y = 2 \times 3 \times 0.1 + 0.1^2 = 0.61\ m^2$$

مثال (٢)

أوجد الزيادة $\Delta\ y$ فى الدالة $y = \frac{1}{x}$ التى تناظر زيادة اختيارية $\Delta\ x$ فى المتغير المستقل x .

الحل : عندما يأخذ المتغير المستقل القيمة x ، تأخذ الدالة القيمة

$$y = \frac{1}{x}\ ,$$

وعندما يكون المتغير المستقل مساويا $x + \Delta\ x$ تصبح الدالة

$$y + \Delta\ y = \frac{1}{x + \Delta\ x}.$$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية نحصل على الزيادة فى الدالة

$$\Delta\ y = \frac{1}{x + \Delta\ x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta\ x}{x\ (x + \Delta\ x)}$$

$$= - \frac{\Delta\ x}{x\ (x + \Delta\ x)}$$

وكمثال عددى نفرض أن x تتغير من 4 إلى 4.5 فيكون

$$x = 4\ ,\ x + \Delta\ x = 4.5 \text{ and } \Delta\ x = 0.5$$

وتكون الزيادة فى الدالة هى

$$\Delta y = - \frac{0.5}{4 \times 4.5} = - \frac{1}{36}$$

وهذا يعنى أن الدالة تتناقص فى هذه الحالة بمقدار $\frac{1}{36}$.

نوجد الآن تعبيراً يعطى عامة الزيادة فى دالة $f(x)$ نتيجة لتغير مقـــداره Δx فى متغيرها المستقل x . القيمة الابتدائية للدالة هى

$$y = f(x)$$

وقيمتها المتغيره هى

$$y + \Delta y = (x + \Delta x) .$$

وبالطرح نحصل على الزيادة فى الدالة

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

١ — ٢١ اتصال الدوال

Continuity of Functions

تعريف (١) : يقال للدالة $f(x)$ إنها **متصلة** continuous عندما $x = x_0$ (أو عند النقطة x_0) إذا كان:

ا) الدالة معرفة عند النقطة x_0 ، أى يتواجد عدد معين $f(x)$

ب) توجد نهاية محدودة $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

حـ) هذه النهاية تساوى قيمة الدالة عند النقطة x_0 ، أى أن

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

والشرط (ب) يعنى أن نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من x_0 سواء من جهة اليسار أو جهة اليمين تكون دائما واحدة .

إذا وضعنا $y = f(x)$ وكذلك $x = x_0 + \Delta x$ حيث $0 \to \Delta x$ عندما $x \to x_0$ فان النهاية السابقة يمكن كتابتها على الصورة

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \{ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \} = 0$$

أى أن الدالة $f(x)$ تكون متصلة عند النقطة x_0 إذا كانت كل زيادة متناهية فى الصغر للمتغير x يناظرها زيادة متناهية فى الصغر فى الدالة . هذا يعنى أنه لكل $0 < \varepsilon$ تتواجد $0 < \delta$ بحيث يكون

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$$

إذا كان

$$| x - x_0 | < \delta$$

(δ ، ε متناهيتان فى الصغر) .

والمعنى البيانى لإتصال الدالة عند نقطة معينة هو أن يكون منحنيها متصلا عند هذه النقطة .

تعريف (٢) : إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة عند كل نقطة فى مجالها (a, b) حيث $a < b$ ، قيل إنها **متصلة فى هذه الفترة .**

إذا كانت الدالة معرفة عند $x = a$ وكان $\lim_{x \to a+} f(x) = (a)$

قيل أن $f(x)$ عند $x = a$ متصلـة عن اليمين Continuous on the right

إذا كانت الدالة معرفـة عند $x = b$ وكان $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

قيل أن $f(x)$ عند $x = b$ متصلـة عن اليسار Continuous on the left .

فإذا كانت الدالة $f(x)$ متصـلة عند كل نقطة فى الفـترة (a , b) وكانت متصـلة عند نقطتى نهاية الفترة عن يمين a وعن يسار b على الترتيب قيـل لمن الدالة $f(x)$ متصلـة فى الفترة المغلقة $[a,b]$.

مثال (١)

الدالة $y = f(x) = x^2$ متصـلة فى أية فترة مغلقة .

الحـل : الدالة المعطاة معرفة عند جميع النقط x فى أية فترة $[a , b]$ نظراً لأنه إذا كانت x_0 أية نقطة فى هذه الفترة فإن

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$$

كما أن

$$\lim_{x \to a+} x^2 = a^2 \quad , \quad \lim_{x \to b-} x^2 = b^2$$

مثال (٢)

أثبت أن الدالة $y = \sin x$ متصـلة عند أية قيمة x .

الحـل :
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x$$

وحيث أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ and } \left| \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leqslant 1$$

فإنه لجميع قيم x يكون

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \Delta y = 0$$

وعلى هذا فإن الدالة $\sin x$ متصلة عندما $-\infty < x < +\infty$.

مثال (٢)

أثبت أن الدالة $y = \frac{\sin x}{x}$ متصلة عند أية قيمة x .

الحـل : سبق لنا فى بند (١ - ١٨) وأثبتنا أن هذه الدالة معرفة عند $x=0$ ذلك لأن

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

وعلى هذا فهى معرفة لجميع قيم x . الزيادة فى الدالة هى

$$\Delta y = \frac{\sin (x + \Delta x)}{x + \Delta x} - \frac{\sin x}{x}$$

$$= \frac{x [\sin (x + \Delta x) - \sin x] - \Delta x \sin x}{x (x + \Delta x)}$$

$$= \frac{2x \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} - \Delta x \sin x}{x (x + \Delta x)}$$

$$= \frac{\Delta x}{x (x + \Delta x)} \left[x \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin . \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} - \sin x \right]$$

$$= \frac{\Delta x}{x + \Delta x} \left[\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} - \frac{\sin x}{x} \right]$$

وعندما $x \neq 0$ فمن الواضح أن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

أما عند $x = 0$ فإن

$$\Delta y = \cos \frac{\Delta x}{2} . \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} - 1$$

وهى تؤول أيضاً إلى الصفر عندما $\Delta x \to 0$

لذلك تكون الدالة $\frac{\sin x}{x}$ متصلة لجميع قيم x ويكون منحنيها متصلا في جميع نقطة وهو مبين بشكل (١ - ١٣) .

نقط عدم الاتصال لدالة ما :

يقال للدالة $f(x)$ إنها **غير متصلة** discontinuous عند النقطة $x = x_0$ إذا لم يتحقق عند هذه النقطة شرط الاتصال الذى ذكرناه فى أول هذا البند . تسمى هذه النقطة **نقطة عدم اتصال** point of discontinuity للدالة $f(x)$ ويكون منحنى الدالة غير متصل (مكسوراً) عند هذه النقطة .

مثال (١)

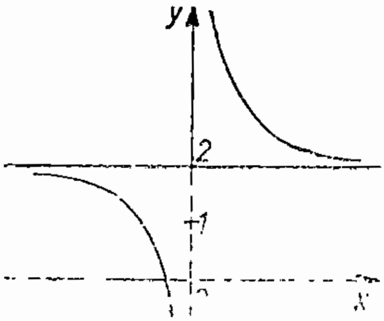
الدالة $f(x) = \frac{|x|}{x}$ شكل (١ - ٤) لها عند $x = 0$ النهاية $1-$ على اليسار والنهاية $1+$ على اليمين وعلى هذا فالنقطة $x = 0$ هى نقطة عدم اتصال للدالة . ويلاحظ أن المنحنى غير متصل عند هذه النقطة .

مثال (٢)

الدالة $y = \frac{1}{x^2}$ شكل (١ - ٥) تكون لا نهائية عندما $x = 0$ وبالتالى فهى غير معرفة عند هذه النقطة . وعلى هذا فإن الدالة تكون غير متصلة عند $x = 0$. ويلاحظ أن منحنى الدالة يكون مفتوحا من أعلى عند هذه النقطة .

مثال (٣)

الدالة $y = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$ لها عند $x = 0$ النهـــاية $-\infty$ على اليسار والنهاية $+\infty$ على اليمين كما فى شكل (١ - ١٥) .



شكل (١ ـ ١٥)

١ ـ ٢٢ بعض خواص الدوال المتصلة

Certain Properties of Continuous Functions

اولا : يمكن إستبدال عملية إيجاد نهاية دالة متصلة بإيجاد قيمتهـــا عند نهاية متغيرها .

فإذا كان $\lim_{x \to a} x = a$ يـكون

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a)$$

أى أننا نوجد نهاية $f(x)$ عندما $x \to a$ بأن نعوض القيمة النهائيـــة للمتغير x فى التعبير الذى يعرف الدالة .

ثانيا : الدالة $f(x)$ التى تكون إثابتة فى جوار النقطة a تكون متصلة عند هذه النقطة .

ثالثا : إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين متصلتين عند $x = a$ فإن

$$f(x) + g(x) \quad , \quad f(x) - g(x),$$

$$k\, f(x) \quad , \quad k \text{ any number} ,$$

$$f(x) \cdot g(x) ,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} , \; g(a) \neq 0 ,$$

تكون أيضاً دوالا متصلة عند $x = a$.

ونتيجة لذلك فان كثيرات الحدود

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots \cdots + a_n$$

تكون دوالا متصلة عند جميع قيم x . كذلك تكون الدوال النسبية

$$\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots \cdots + b_m}$$

متصلة عند جميع قيم x فيما عدا عند تلك القيم التى ينعدم عندها المقام .

رابعا : إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة فى الفترة $[a , b]$ ، $(a \leqslant x \leqslant b)$
فانه توجد على الأقل نقطة واحدة فى هذه الفترة $x = x_0$ بحيث تحقق قيمـــة

الدالة عند هذه النقطة المتباينة $f(x_1) \geqslant f(x)$ ، حيث x هى أية نقطة أخرى فى الفترة . كذلك توجد على الأقل نقطة واحدة $x = x_2$ فى الفترة $[a , b]$ بحيث تحقق قيمة الدالة عند هذه النقطة المتباينة $f(x_2) \leqslant f(x)$. وتسمى $f(x_1)$ القيمة العظمى ، $f(x_2)$ القيمة الصغرى للدالة $f(x)$ فى الفترة $[a, b]$.

ويمكن تلخيص هذه الخاصية كالآتى : الدالة $f(x)$ المتصلة فى الفترة $a \leqslant x \leqslant b$ تأخذ فى هذه الفترة قيمتيها العظمى والصغرى .

خامسا : نفرض أن الدالة $y = f(x)$ متصلة فى الفترة $[a, b]$ وأن قيمتيها عند نهايتى الفترة a , b مختلفتا الإشارة . توجد على الأقل نقطة واحدة $x = c$ بين a , b تنعدم عندها الدالة :

$$f(c) = 0 \, , \; a < c < b.$$

وهذه الخاصية تعنى بيانياً أن منحنى الدالة الذى يصل النقطتين $[a , f(a)]$ ، $[b , f(b)]$ ، حيث $f(a) < 0$ ، $f(b) > 0$ أو $f(a) > 0$ ، $f(b) < 0$ ، لابد وأن يقطع محور x مرة واحدة على الأقل .

مثال

الدالة $f(x) = x^3 - 2$ حيث $f(1) = -1$ ، $f(2) = 6$ هى دالة متصلة فى الفترة $[1, 2]$. لذلك توجد نقطة فى هذه الفترة تنعدم عندها الدالة . وفى الحقيقة $f(x) = 0$ عندما $x = \sqrt[3]{2}$

سادسا : نفرض أن $f(x)$ دالة معرفة ومتصلة فى الفترة $[a, b]$. إذا كانت قيمتا الدالة عند نهايتى الفترة مختلفتين ، أى $f(a) = A$ ، $f(b) = B$

فإنه لأية قيمة اختيارية C بين العددين A ، B توجد على الأقل نقطة واحدة $x = c$ بين a , b تأخذ الدالة عندها القيمة C ، أى $f(c) = C$.

وتعتبر الخاصية الخامسة حالة خاصة من الأخيرة حيث تكون القيمتان A , B مختلفتى الاشارة ، $C = 0$.

نتيجة : إذا كانت الدالة $y = f(x)$ متصلة فى فترة ما وكانت لها قيمة عظمى وأخرى صغرى فإنها تأخذ فى هذه الفترة (مرة واحدة على الأقل) أية قيمة تقع بين القيمتين العظمى والصغرى .

تمارين

١) إحسب لكل دالة من الدوال الآتية القيم المبينة بجانبها :

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;

$f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$?

b) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; $f(-\frac{3}{4})$, $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$, $\frac{1}{f(x)}$?

c) $f(x) = \cos^{-1}(\log x)$; $f(\frac{1}{10})$, $f(1)$, $f(10)$?

d) $f(x) = x^2 + 1$;

$f(4), f(\sqrt{2}), f(a+1), f(a)+1, f(a^2), [f(a)]^2, f(2a)$?

e) $\varphi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$; $\varphi(\frac{1}{x})$ and $\frac{1}{\varphi(x)}$?

f) $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$; $\psi(2x)$ and $\psi(0)$?

g) $\varphi(x) = x^2 - 2$; $\varphi(x) + 4$ and $\varphi(x+4)$?

h) $F(x) = \frac{1}{x^2} + 1$; $F(x-2)$?

٢) إذا كان $F(x) = \frac{2x}{5} + \frac{5}{2x}$ فاثبت أن $F(\frac{5}{2}) = -F(-\frac{5}{2})$

٣) إذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$ فاثبت أن $f(x+h) - f(x) = -\frac{h}{x^2+xh}$

٤) إذا كان $\varphi(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$ فاثبت أن $\varphi(a)+\varphi(b) = \varphi(\frac{a+b}{1+ab})$

٥) إذا كانت $f(x) = \log x$, $\varphi(x) = x^2$ فأوجد $f[\varphi(a)]\,,\ \varphi[f(a)]$ ؛

٦) أوجد مجال الدوال الآتية :

$$y = \sqrt{4-x^2}\ ,\quad y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}\ ;\quad y = \sqrt{3+x} + \sqrt{x-1}\ ;$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\ ;\quad y = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}\ ;\quad y = \sqrt{x-x^2}\ ;$$

$$y = \sqrt{2+x-x^2}\ ;\quad y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}\ ;\quad y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x}\right)\ ;$$

$$y = |\,x-1\,|\ .$$

٧) أكتب الدوال الآتية فى الصورة الصريحة وأوجد مجال كل منها :

a) $x^2 - \cos^{-1} y = \pi$;

b) $10^x + 10^y = 10$;

c) $x + |\,y\,| = 2\,y$.

٨) أى من الدوال الآتية زوجية وأيها فردية :

a) $f(x) = \frac{1}{2}\,(a^x + a^{-x})$;

b) $f(x) = \log\,(x + \sqrt{1+x^2})$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

d) $f(x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$;

e) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$.

٩) بين نوع التماثل لكل من الدوال الآتية :

$y = x^2 - 4$; $y = 4 - x^2$; $y^2 = 3x$; $y^2 = -3x$;

$4x^2 + y^2 = 64$; $xy = 4$; $y^2 - 2x\,y = 4$; $y = x + \frac{1}{4}x^3$;

$y^2 = 4x^3$; $y^4 - 4y^2 = x^2 + 4x$; $y^4 - 4y^2 + x^2 = 0$.

١٠) أوجد لكل من منحنيات الدوال الآتية المقطعين والتماثل والمجال والمدى والخطوط التقاربية (الرأسية والأفقية) :

$y^2 = 2x - 4$; $x\,y = 6$; $x^2\,y = 8$; $y^2\,(x+1) = 4$;

$y\,(x^2-1) = 1$; $x^2\,(y^2-4) = 4$; $y^2\,(x-1)\,(x-3) = 4$;

$x\,(y^2-4) = 2y$; $5y\,(x-1)\,(x-3) = 2\,(5x+3)$.

١١) أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية على الصورة $y = g(x)$.

a) $y = 2x + 3$; b) $y = x^2 - 1$; c) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

d) $y = \log \frac{x}{2}$; e) $y = \tan^{-1} 3x$.

١٢) أوجد قيمة كل من النهايات الآتية عندما $n \to \infty$:

a) $\lim \left(\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

b) $\lim \frac{(n+1)\;(n+2)\;(n+3)}{n^3}$

c) $\lim \left[\frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right]$

d) $\lim \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$

e) $\lim \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

f) $\lim \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}\right)$

g) $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

h) $\lim \dfrac{n \sin n!}{n^2 + 1}$

١٣) أوجد قيمة النهايات الآتية :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}},$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x+3)^3 (3x-2)^2}{x^5+5};$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}; \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x}{x^3 - 4x + 4};$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}, \quad \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right);$$

$$\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}, \quad \lim_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x},$$

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x}),$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x(x+a)}-x\right],$$

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2},$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi-3x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x},$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x, \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x,$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

١٤) أوجد التغير فى حجم مكعب إذا تغير حرفه x بمقدار x Δ حيث

$\Delta x = 0.1\ m,\ x = 2m$.

١٥) أحسب الزيادة فى الدالة $y = x^3 - 2x + 5$ إذا تغير x من 2 إلى 2.01

١٦) أحسب الزيادة فى الدالة $y = \frac{2}{x-1}$ عندما تكون قيمة كل من المتغير x والزيادة فيه Δx اختيارية .

١٧) أوجد الزيادة فى الدالة $y = \log x$ لأية قيمة موجبة x إذا أعطينا قيمة اختيارية للزيادة Δx .

١٨) الدوال $f(x)$ الآتية ليست معرفة عند $x = 0$. عرف قيمة $f(0)$ بحيث تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 0$:

a) $f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ (n is a positive integer)

b) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ c) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

d) $f(x) = x \cot x$

١٩) أثبت أن الدوال الآتية متصلة عند أية قيمة حقيقية $x = c$:

a) $y = \frac{2x}{x^2+1}$ b) $y = \sqrt{x}\ (x \geqslant 0)$

c) $y = \cos x$ d) $y = x^3$

٢٠) اختبر الدوال الآتية من حيث اتصالها :

a) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ b) $y = \dfrac{1+x^3}{1+x}$

c) $y = \sin \dfrac{\pi}{x}$ d) $y = x \sin \dfrac{\pi}{x}$

٢١) أوجد نقط عدم الاتصال للدوال الآتية :

a) $y = \dfrac{1}{x}$ b) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

c) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ d) $y = \dfrac{x+7}{x^2+10x+21}$

e) $y = \dfrac{2x-3}{6x^3-23x+21}$ f) $y = \dfrac{x-1}{x\,(x+1)\,(x^2-4)}$

g) $y = 1 + 2^{1/x}$