الملحق الاول

المتباينـــات

INEQUALITIES

نفرض أن a ، b عددان حقيقيان . الرمز $a < b$ يعنى أن a أقل من b .
ويمكننا كتابة نفس المتبـــاينة فى الاتجاه العكسى أى $b > a$ ونقول أن b أكبر من a

وفيما يلى القواعد التى يجب إتباعها فى التعامل مع المتباينات .

اولا : If $a<b$ and $b<c$, then $a<c$.

إذا كان a أقل من b وكذلك b أقل من c فإن a تكون أقل من c .

ثانيا : If $a<b$, then $a+c < b+c$ and $a-c < b-c$

يمكن إضافة نفس العدد إلى طرفى متباينة أو طرحه من طرفيها فيكون الناتج فى كل حالة متباينة صحيحة فى نفس الاتجاه .

ثالثا : If $a<b$ and $c<d$, then $a+c < b+d$.

يمكن جمع المتباينات ذات الاتجاه الواحد .

والجدير بالملاحظة أن المتباينات لا يجوز طرحها فى جميع الحالات . فمثلا

$$2<5 \text{ and } 1<7$$

بالجمع ينتج أن $12 > 3$ وهى متباينة صحيحة فى حين أن الطرح يؤدى إلى متباينة غير صحيحة وهى أن (1) أقل من (2—) .

رابعـا :

If $a < b$, then :

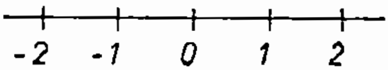
$ac < bc$, c positive number.

$ac > bc$, c negative number.

أى أن ضرب كلا من طرفى متباينة فى نفس العدد الموجب يحفظ الاتجـاه فى حين أن الضرب فى عدد سالب يغير إتجاه المتباينة . وحيث أن قسمة متباينة على عـــدد d لايساوى صفراً تؤدى إلى نفس النتيجه كضربها فى $\frac{1}{d}$ فـــان القاعدة الرابعه تطبق أيضا فى حاله القسمه كما فى الضرب .

المعنى البيانى للمتباينة :

نرسم محورا أفقياً ليمثل جميع الأعداد الحقيقيه . نختار على هذا المحور نقطه أصل مناسبة ونرتب الأعداد الموجبة عن يمينها والأعداد السالبـة عن يسارها كما فى شكل (١) . وهـــكذا فان كل عـدد حقيق تناظره نقطـة على المحور

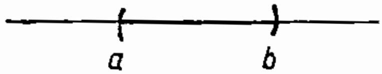


شكل (١)

وبالعكس تمثل كل نقطة أحد الأعداد الحقيقية . وعلى هذا فالمتباينه $a < b$ تعنى أن a تقع عن يسار b . وهذه النظرة الهندسية إلى المتباينات تسهل حل مسائلها .

الفترة Interval :

إذا كان a ، b عـــددين كما فى شكل (٢) فـان **الفتـرة المفتوحه** open

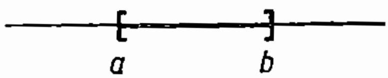


شكل (٢)

interval من a إلى b تعنى جميع الاعداد التى تكون أكبر من a وأصغر من b فى نفس الوقت ، أى أن الفترة المفتوحة تتكون من جميع الاعداد فيما بين a ، b .

يقع العدد x بين a ، b إذا كانت كلتا المتباينتين $a<x$ وكذلك $x<b$ صحيحة — والصورة المختصرة للتعبير عن ذلك هى $a < x < b$.

تتكون **الفترة المغلقة** closed interval من a إلى b من جميع النقط بين a ، b بما فى ذلك a ، b أيضاً كما فى شكل (٣) . نفرض أن العدد x



شكل (٣)

يساوى أو أكبر من a لذلك نكتب $x \geqslant a$ وتقرأ : x أكبر من أو تساوى a وبالمثل فإن $x \leqslant b$ تقرأ: x أقل من أو تساوى b ، وتعنى أن x يمكن أن تكون أقل من b ويمكن أن تكون b ذاتها . من هنا يمكن التعبير عن الفترة المغلقة من a إلى b بأنها تتكون من جميع النقط x بحيث يكون $a \leqslant x \leqslant b$.

يقال للفترة التى تحوى الطرف b ولا تحـوى a إنها **نصف مفتوحة من اليسار** half-open on the left . أى أنها تتكون من جميع النقط x بحيث يكون $a < x \leqslant b$.

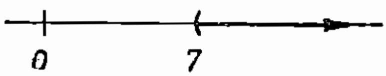
وبالمثل تسمى الفترة التى تحوى a ولا تحوى b فترة نصف مفتوحة من اليمين half-open on the right ونكتب $a \leqslant x < b$

ونستعمل الأقواس المستديرة والمربعة للدلالة على الفترات كما يلى :

(a,b) for the open interval : $a < x < b$,
[a,b] for the closed interval : $a \leqslant x \leqslant b$,
(a,b] for the interval half-open on the left : $a < x \leqslant b$,
[a,b) for the interval half-open on the right : $a \leqslant x < b$,

مثـــال

نفرض أننا نريد التعبير عن جميع الأعداد التى تزيد عن 7 ، لذلك نعتبرها فترة ممتدة إلى ما لا نهاية عن يمين النقطة التى تمثل هذا العدد كما فى شكل (٤) وبالطبع فإن ما لا نهاية ليست عدداً ولكننا نستعمل الرمز $(7, \infty)$ للدلالة



شكل (٤)

على جميع الأعداد أكبر من 7 . ويمكن القول بأن الأعداد المطلوبة تتكون من x بحيث يكون $7 < x < \infty$.

وبالمثل فان الرمز $(-\infty , 12)$ يعنى جميع الأعداد التى تقل عن 12 ، كما أن المتباينة المزدوجة $-\infty < x < 12$ هى طريقة أخرى لتمثيل جميع الأعداد x أقل من 12 .

فئة الحل Solution set :

معادلة الدرجة الأولى $3x + 7 = 19$ لها حل واحد هو $x = 4$. فى حين أن معادلة الدرجة الثانية $x^2 - x - 2 = 0$ لها حلان هما $x = 2, x = -1$.
كذلك المعادلة المثلثية $\sin x = \frac{1}{2}$ لها عدد لانهائى من الحلول هى

$$x = 30^\circ , 150^\circ , 390^\circ , 510^\circ , \cdots$$

أما حل متباينة ما تحتوى على مجهول واحد ، x مثلا ، فهو يتكون من جميع الأعداد التى تجعل هذه المتباينة صحيحة وتسمى هذه الأعداد فى مجموعها فئة الحل لهذه المتباينة .

مثال (١)

حل المتباينة $3x - 7 < 8$

الحل : أضف 7 إلى كل من طرفى المتباينة فينتج

$$3x - 7 + 7 < 8 + 7 \quad \text{or} \quad 3x < 15$$

وبقسمة الطرفين على 3 ينتج أن $x < 5$.

وهذا يعنى أن فئة الحل تتكون من جميع الأعداد فى الفترة $(-\infty, 5)$.

مثال (٢)

حل المتباينة $-7 - 3x < 5x + 29$

الحل : إطرح $5x$ من الطرفين فنجد أن $-7 - 8x < 29$

إضرب الطرفين فى (-1) واعكس إتجاه المتباينة فينتج أن $7+8x>-29$

إطرح 7 من الطرفين فتؤول المتباينة إلى $8x > -36$

ثم بالقسمة على 8 تحصل على الحل $x > -\frac{9}{2}$

ويمكن التعبير عن الحل على صورة فترة : جميع قيم x فى الفترة $(-\frac{9}{2}, \infty)$.

مثـال (٣)

أوجـــد قيمة x $(x \neq 0)$ من : $\frac{3}{x} < 5$

الحـل : هنا يظهر الاتجاه لضرب الطرفـين مباشرة فى x . ولـكن نظراً لأننا لا نعرف مقدماً إن كانت x موجبة أم سالبـــة لذا يجب أن نتصرف باحتراس ونعتبر كل حالة على حدة .

الحـالة الأولى : نفرض أن $0 < x$ فيحفظ الضرب فى x باتجاه المتباينة فنجد أن $3 < 5x$ وبالقسمة على 5 ينتج أن $\frac{3}{5} < x$. وهـذا يعنى أننـا يجب أن نبحث عن جميع الأعداد التى تحقق كلتا المتباينتين

$$x > 0 \quad \text{and} \quad x > \frac{3}{5} \; .$$

وواضح أن أى عدد أكبر من $\frac{3}{5}$ يكون موجباً وعلى ذلك يتكون الحل فى هذه الحالة من جميع قيم x فى الفترة $(\frac{3}{5}, \infty)$.

الحالة الثانية : $0 < x$. الضرب فى x سيعكس إتجـاه المتباينة فنجد أن

$$3 \qquad 5x \quad \text{or} \quad \frac{3}{5} > x$$

نبحث الآن عن قيم x بحيث تتحقق كلتا المتباينتين $x < \frac{3}{5}$ ، $x < 0$

فيكون الحل فى هذه الحالة هو جميـع قيم x فى الفترة $(0 \; , \; \infty -)$.

شكل (٥)

ولتجميع النتيجة فى الحالتين نقول بأن فئة الحل تتكون من جميع الأعداد x التى لا تقـع فى الفترة المغلقة $[\frac{3}{5} , 0]$ شكل (٥) .

مثال (٤)

أوجد قيمة x $(x \neq -2)$ من : $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$

الحل : كما وجدنا فى مثال (٣) يجب أن نفرق بين الحالتين حسب ما إذا كان $(x+2)$ موجباً أو سالباً .

الحالة الأولى : $x + 2 > 0$.

بالضرب فى $3\,(x+2)$ ينتج أن : $6x - 9 < x + 2$

باضافة $(x - 9)$ إلى كل من الطرفين نجد أن :

$$5x < 11 \quad \text{or} \quad x < \frac{11}{5} .$$

وحيث أننا فرضنا أن $x + 2 > 0$ لذلك نجد أن x يجب أن تكون أكبر من $2-$ وأقل من $\frac{11}{5}$ ، أى أن فئة الحل تتكون من جميع قيم x فى الفترة $(-2, \frac{11}{5})$.

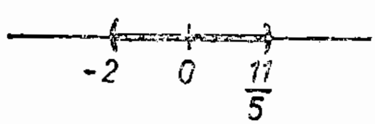
الحالة الثانية : $x + 2 < 0$.

لنضرب فى $3\,(x+2)$ ونعكس إتجاه المتباينة كما يلى : $6x - 9 > x + 2$

ومنها نحصل على : $5x > 11 \quad \text{or} \quad x > \frac{11}{5}$

فى هذه الحالة تكون x أقل من $2-$ وأكبر من $\frac{11}{5}$ وهذا محال .

بالجمع بين الحالتين نحصل على فئة الحل التى تتكون من جميع الأعداد فى الفترة $(\;\;2, \frac{11}{5})$ كما فى شكل (٦) .



شكل (٦)

الملحق الثانى

القيمـة المطلقـة

ABSOLUTE VALUE

تعرف القيمة المطلقة لعدد موجب a بأنهـا العدد الموجب نفسه . أما إذا كان العدد a سالباً فإن قيمته المطلقة تعرف بأنها العدد الموجب a — ، والقيمة المطلقة للصفر تساوى صفراً .

ويستعمل الرمز $|a|$ للدلالة على القيمة المطلقة للعدد a بذلك يمكن كتابة التعريف السابق هكذا :

$$|a| = a \qquad \text{if } a > 0,$$

$$|a| = -a \qquad \text{if } a < 0,$$

$$|0| = 0.$$

فمثلا :

$$|7| = 7, \quad |-13| = 13, \quad |2-5| = |-3| = 3.$$

وتخضع القيمة المطلقة للخواص الآتية :

اولا : القيمة المطلقة لمجموع جبرى من الأعداد لا يزيد عن مجموع القيم المطلقة لهذه الأعداد ، أى أن : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

ذلك لأنه إذا كان العددان كلاهما موجبين أو سالبين فإن مجموعهما يتكون بجمع قيمتيهما المطلقة ثم إعطاء المجموع الاشارة المشتركة للعددين . وعلى هذا

تكون القيمة المطلقة للمجموع مساوية لمجموع قيمتيهما المطلقة . فمثلا ، إذا كان

$$a = -3 \ , \ b = -7$$

فإن : $|(-3) + (-7)| = |-10| = 10$

ويكون أيضاً: $|-3| + |-7| = 3 + 7 = 10$

أى أن : $|(-3) + (-7)| = |-3| + |-7|$

أما إذا كان العددان مختلفى الاشارة فإن مجموعها يتكون بطرح القيمة المطلقة الصغرى من القيمة المطلقة الأكبر وإعطاء الفرق إشارة العدد ذى القيمة المطلقه الأكبر لذلك تكون القيمة المطلقة للمجموع أقل من مجموع القيمتين المطلقتين .

فمثلا ، تكون القيمة المطلقة لمجموع عددين

$$|(-7) + (+3)| = |-4| = 4$$

فى حين أن مجموع القيمتين المطلقتين لهذين العددين هى

$$|-7| + |+3| = 7 + 3 = 10$$

أى أن $|(-7) + (+3)| < |-7| + |+3|$

ويمكن تعميم هذه النظرية لأى مجموعه من الأعداد أى أن :

$$|a + b + \cdots + k| \leqslant |a| + |b| + \cdots + |k|.$$

ثانيا : القيمة المطلقة للفرق بين عددين تكون أكبر من أو تساوى الفرق بين القيمتين المطلقتين لهذين العددين ، أى أن

$$|a - b| \geqslant |a| - |b| \quad \text{or} \quad |a - b| \geqslant |b| - |a|.$$

بفرض أن $a - b = c$ فإنه يكون $a = b + c$ ومن الخاصية السابقة

نجد أن $|a| \leqslant |b| + |c|$ ومنها نستنتج أن

$$|c| \geqslant |a| - |b| \quad \text{or} \quad |a - b| \geqslant |a| - |b|$$

ومن المعروف أن القيمة المطلقة لعدد ما لا تتغير إذا غيرنا إشارة العدد .
وعلى ذلك فإن $|a - b| = |b - a|$ ولكن فى المتباينة الأخيرة
إذا بدلنا a مع b ينتج أن $|b - a| \geqslant |b| - |a|$

وعلى هذا فان المتباينة الأخيرة تكون صحيحة أيضاً فى الصورة

$$|a - b| \geqslant |b| - |a|$$

والجدير بالملاحظة أن الفرق $|b| - |a|$ or $|a| - |b|$
يمكن أن يكون سالباً .

ثالثا : القيمة المطلقة لحاصل ضرب تساوى حاصل ضرب القيم المطلقة ، أى أن

$$|a.b| = |a| . |b| .$$

رابعا : القيمة المطلقة لخــارج قسمه تساوى خارج قسمة القيمة المطلقة للمقسوم على القيمة المطلقة للمقسوم عليه ، أى أن

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} .$$

خامسا : القيمة المطلقة لقــوة ذات أس صحيح موجب تساوى نفس القوة للقيمة المطلقة للاساس ، أى أن : $|a^n| = |a|^n$

والخاصية الثالثة والرابعة والخامسه تلى مباشرة من تعريف القيمة المطلقة .

مثال (١)

أوجد قيمة x من $|x - 7| = 3$.

الحل : تبعاً لتعريف القيمة المطلقة فإن هذه المعادلة تعنى أن

$$x - 7 = 3 \quad \text{or} \quad -3$$

لأنه فى كلتا الحالتين تـكون القيمة المطلقة تساوى 3 . فإذا كان $x - 7 = 3$ فإن $x = 10$. أما إذا كان $x - 7 = -3$ فإن $x = 4$. لذلك توجد قيمتان للمجهول x تحققان المعادلة المعطاه ، أى أن $x = 4,\ x = 10$.

مثال (٢)

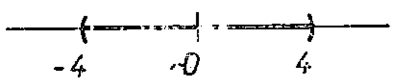
حل المعادلة $|2x - 6| = |4 - 5x|$.

الحل : هناك احتمالان وهما :

$$2x - 6 = 4 - 5x \text{ and } 2x - 6 = -(4 - 5x).$$

بحل كل من هاتين المعادلتين نحصل على الحلين $-\frac{2}{3}$, $x = \frac{10}{7}$

ملاحظة : حيث أن $|x|$ يمثل « بعد » x عن نقطة الأصل ، لذلك فإن الشرط $|x| < 4$ يكون مكافئاً للشرط بأن يكون x أى عدد فى الفـترة الممتدة من -4 إلى $+4$ ، شكل (٧)



شكل (٧)

وإذا استعملنا رمز الفترة فإن هذا الشرط يعنى أن x يجب أن يقع فى

الفترة $(-4, 4)$. وأحياناً تستعمل علاقة مثل $|x| < 4$ للدلاله على الفترة $(-4, 4)$ • وإذا استعملنا المتباينات بدون علامة القيمة المطلقة فإن العلاقة

$$-4 < x < 4$$

تكون مكافئة للمتباينة $|x| < 4$. وبطريقة مشابهه فإن المتباينه $|x - 3| < 5$ تعنى أن $x - 3$ يجب أن يقع فى الفترة $(-5, 5)$ ويمكن أيضاً كتابة ذلك على الصورة $-5 < x - 3 < 5$ أى أن x يجب أن يحقق كلتا المتباينتين فى العلاقة الأخيرة . بإضافة 3 إلى كل طرف من أطراف المتباينه المزدوجه الأخيرة نحصل على $-2 < x < 8$ وهذا يعنى أن x يجب أن يقع فى الفترة $(-2, 8)$ كما فى شكل (٨) .

شكل (٨)

مثال (٣)

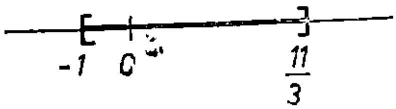
أوجد قيم x من المتباينة : $|3x - 4| \leqslant 7$

الحل : نكتب المتباينة على الصورة المكافئة $-7 \leqslant 3x - 4 \leqslant 7$

بإضافة 4 إلى كل طرف نجد أن $-3 \leqslant 3x \leqslant 11$

وبالقسمة على 3 ينتج أن $-1 \leqslant x \leqslant 11/3$

فتتكون فئة الحل من جميع الأعداد x التى تقع فى الفترة المغلقة $[-1, 11/3]$ كما فى شكل (٩) .



شكل (٩)

مثال (٤)

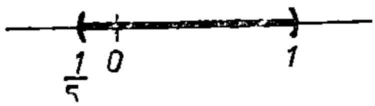
أوجد قيم x إذا كان $|2 - 5x| < 3$

الحل : الصورة المكافئة لهذه المتباينة هي $-3 < 2 - 5x < 3$

بطرح 2 من كل طرف ينتج أن $-5 < -5x < 1$

وبالقسمة على 5— وعكس اتجاه كل من المتباينتين نجد أن $1 > x > -\frac{1}{5}$

وتتكون فئة الحل من قيم x في الفترة المفتوحة $(-\frac{1}{5}, 1)$ كما في شكل (١٠) .



شكل (١٠)

مثال (٥)

حل المتباينة $\left|\frac{2x - 5}{x - 6}\right| < 3$

الحل : باتباع الطريقة السابقة نجد أن $-3 < \frac{2x - 5}{x - 6} < 3$

ولكي نضرب الآن في $6 - x$ يجب أن نفرق بين حالتي ما إذا كان $6 \quad x$ موجباً أو سالباً .

الحالة الأولى : $x - 6 > 0$ فى هذه الحالة يحافظ الضرب فى $x - 6$ على اتجاه المتباينتين فينتج أن $-3(x-6) < 2x - 5 < 3(x-6)$ — المتباينة اليسرى تنص على أن

$$-3x + 18 < 2x - 5 \quad \text{or} \quad \frac{23}{5} < x$$

أما المتباينة اليمنى فتعطى

$$2x - 5 < 3x - 8 \quad \text{or} \quad 13 < x$$

وعلى ذلك ففى الحالة الأولى يكون لدينا المتباينات الثلاث

$$x - 6 > 0 \quad \text{and} \quad \frac{23}{5} < x \quad \text{and} \quad 13 < x$$

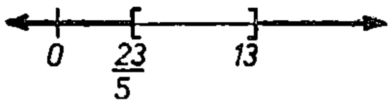
ويلاحظ هنا أنه إذا تحققت المتباينة اليمنى فان المتباينتين السابقتين تتحققان تلقائيا ، ى أن الحل ى الحالة الأولى يتكون من جميع قيم x فى الفترة $(13, \infty)$.

الحالة الثانية : $x - 6 < 0$. بالضرب فى $x - 6$ ينعكس الاتجاه فى كل من المتباينتين الأصليتين ونحصل على

$$-3(x-6) > 2x - 5 > 3(x-6)$$

والمتباينتان الأخيرتان تنصان على أن $x < \frac{23}{5}$ ، $x < 13$ والمتباينات الثلاث $x - 6 < 0$ ، $\frac{23}{5} > x$ ، $13 > x$ تتحقق جميعها إذا كان $x < \frac{23}{5}$. لذلك فان الحل فى الحالة الثانية يتكون من جميع الأعداد فى الفترة $\left(-\infty, \frac{23}{5}\right)$

وعلى هذا فانه يمكن القول بأن فئة الحل لهذه المسألة تتكون من جميع الأعداد التى لا تقع فى الفترة المغلقة $\left[\frac{23}{5}, 13\right]$ كما فى شكل (١١).



شكل (١١)

مثال (٦)

أوجد أكبر قيمة يمكن أن يصل اليها المقدار x^3-2 إذا قيدت x بالفترة $[-4, 4]$

الحل : من الخاصية الأولى نجد أن

$$|x^3-2| \leqslant |x^3| + |-2| = |x^3| + 2$$

ومن الخاصية الخامسة ينتج أن $|x^3-2| \leqslant |x|^3 + 2$

وحيث أن x مقيد بالفترة $[-4,4]$ حسب الفرض فان $|x|$ تكون دائماً أقل من أو تساوى 4 وعلى ذلك نجد أن $|x^3 - 2| \leqslant 4^3 + 2 = 66$ طالما كان x أى عدد فى الفترة $[-4, 4]$.

مثال (٧)

أوجد عدداً موجباً M بحيث يحقق $|x^3 - 2x^2 + 3x - 4| \leqslant M$ لجميع قيم x فى الفترة $[-3, 2]$.

الحل : من الخاصية الأولى يمكن كتابة

$$|x^3 - 2x^2 + 3x - 4| \leqslant |x^3| + |-2x^2| + |3x| + |4|$$

$$= |x^3| + |2x^2| + |3x| + 4$$

ومن الخاصيتين الثالثة والخامسة نجـــد أن

$$|x^3| + |2x^2| - |3x| + 4 = |x|^3 + 2|x|^2 + 3|x| + 4$$

وحيث أن $|x|$ لا يمكن أن تتخطى 3 لذلك فإن

$$|x|^3 + 2|x|^2 + 3|x| + 4 \leqslant 27 + 2.9 + 3.3 + 4 = 58.$$

من ذلك نستنتج أن العدد M الذى نبحث عنه هو 58 . على أن هذا التقدير ليس هو الأحسن لأنه باستخدام طرق حساب التفاضل يمكن الحصول على قيمة أفضل ألا وهى $M = 22$.

مثال (٨)

أوجد عدداً M بحيث يحقق $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| \leqslant M$ إذا كان x مقيداً بالفترة $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

الحل : نحن نعلم من الخاصية الرابعة أن $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = \frac{|x+2|}{|x-2|}$

إذا أمكننا حساب أصغر قيمة ممكنة للمقام وأكبر قيمة ممكنة للبسط فانه يمكن تبعاً للخاصية الرابعة تقدير أكبر قيمة ممكنة للتعبير كله .

بالنسبة للبسط نجد أن

$$|x+2| \leqslant |x| + |2| \leqslant \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} .$$

كما نلاحظ أن المقام يكون أصغر ما يمكن عند ما تكون x أقرب ما يمكن

من 2 . وهـذا يتأتى عند ما $x = \frac{3}{2}$ وعلى هذا

$$| x - 2 | \geq \left| \frac{3}{2} - 2 \right| = \frac{1}{2}$$

من هذا نستنتج أنه إذا كان x فى الفترة $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ فان

$$\left| \frac{x + 2}{x - 2} \right| \leq \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = 7$$

مثال (٩)

أوجد تقديرا لأكبر قيمة ممكنة للمقدار $\left| \frac{x^2 + 2}{x + 3} \right|$ إذا كان x مقيدا بالفترة $[-4, 4]$.

الحل : يمكن تقـديـر البسط بسهولة نظـرا لأن

$$| x^2 + 2 | \leq | x |^2 + 2 \leq 4^2 + 2 = 18.$$

أما بالنسبة للمقام فعلينا أن نوجد أصغر قيمة للمقدار $| x + 3 |$ إذا وقع x فى الفترة $[-4, 4]$. من الوهلة الأولى نرى أن المقدار الأصلى يكون غير معرف عندما $x = -3$ لأن المقام ينعدم فى هذه الحالة ويجب استبعاد القسمة على صفر دائماً . بالاضافة إلىذلك إذا كان x عددا قريباً من -3 فان المقام يكون قريباً من صفر فى حين يقترب البسط من 11 ويكون خارج القسمة عددا كبيرا. لذلك نجد فى هذا المثال أن المقدار الأصلى ليس له قيمة كبرى محدودة فى الفترة $[-4, 4]$.

مثال (١٠)

أوجد عدداً M بحيث يكون $M \geqslant \left|\frac{x+2}{x} - 5\right|$ ، علماً بأن x مقيد بالفترة $(1,4)$.

الحل : هناك طريقتان لحل هذه المسألة .

الطريقة الأولى : من مبادىء الجبر الأولية نجد أن $\frac{x+2}{x} - 5 = \frac{-4x+2}{x}$

ويمكننا أن نكتب $\left|\frac{x+2}{x} - 5\right| = \frac{|-4x+2|}{|x|} \leqslant \frac{4|x|+2}{|x|}$

وحيث أن $|x| < 4$ لذلك $4|x| + 2 < 18$ فى حين أن المقام

$|x|$ لا يمكن أن يقل عن 1 . من ذلك ينتج أن $\left|\frac{x+2}{x} - 5\right| < 18$

الطريقة الثانية : من الخاصيتين الأولى والرابعة نجد أن

$$\left|\frac{x+2}{x} - 5\right| \leqslant \left|\frac{x+2}{x}\right| + |-5| = \frac{|x+2|}{|x|} + 5$$

وحسب الفترة المقيد بها x فان

$$|x+2| < 6 \quad \text{and} \quad |x| > 1$$

لذلك نجد أن $\left|\frac{x+2}{x} - 5\right| \leqslant 11$

فى هذا المثال نجد أن بعض الطرق الجبرية تعطى تقديرات أدق مما تعطية الطرق الأخرى .

الملحق الثالث

تحليل كسر نسبي إلى كسوره الجزئية

DECOMPOSITION OF A RATIONAL FRACTION INTO PARTIAL FRACTIONS

فيما يلي سنبين كيفية تحليل أي كسر نسبي صحيح على الصورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

إلى كسوره الجزئية . ذلك على فرض أن معاملات كثيرتي الحدود في البسط والمقام حقيقية وأن الكسر لا يمكن إختصاره (أي لا توجد عوامل مشتركة في البسط والمقام) .

القاعدة الأولى : نفرض أن $x = a$ هو جذر للمقام مكرر k مرة ، أي أن $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$ حيث $Q_1(a) \neq 0$. في هذه الحالة يمكن تمثيل الكسر الأصلي على الصورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

وحيث أن $\frac{P_1(a)}{Q(a)}$ كسر صحيح غير قابل للاختصار ، فإنه يمكن تطبيق هذه القاعده عليه مرة أخرى بالنسبة للجذور الحقيقية الأخرى لمقامه $Q_1(x)$

القاعدة الثانية : نفرض أن أحد عوامل المقام $Q(x)$ من الدرجة الثانية (غير قابل للتحليل إلى عوامل من الدرجة الاولى) ومكرر l مرة ، أي أن $Q(x) = (x^2+px+q)^l Q_2(x)$ بحيث أن كثيرة الحدود $Q_2(x)$ لا تقبل القسمة على (x^2+px+q) . في هذه الحالة يمكن تمثيل الكسر الاصلي على الصورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}$$

$$+ \cdots + \frac{M_l x+N_l}{(x^2+px+q)^l} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

حيث $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ كسر نسبي صحيح .

الطريقة :

فى تحليل الكسر النسبي الصحيح $\frac{P(x)}{Q(x)}$ إلى كسوره الجزئية نحلل المقام $Q(x)$ إلى عوامله الأولية (وسنكتفى بعوامل الدرجة الاولى والثانية فقط) ونطبق القاعدتين الاولى والثانية فى فرض الكسور الجزئية المناظرة لكل عامل فإذا كان

$$Q(x) = (x-a)^k (x-a)^l \cdots (x^2+px+q)^m \cdots (x^2+rx+s)^n ,$$

أمكن تمثيل الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ على الصورة :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A^k}{(x-a)^k} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B^l}{(x-b)^l} +$$

$$+ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots\cdots$$

$$+ \dots + \frac{M_m x + N_m}{(x^2+px+q)^m} +$$

$$+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots +$$

$$+ \frac{L_1 x + S_1}{x^2 + rx + s} + \frac{L_2 x + S_2}{(x^2+rx+s)^2} +$$

$$+ \dots + \frac{L_n x + S_n}{(x^2+rx+s)^n} \, .$$

وتتعين المعاملات المفروضة A_1 , A_2 , … , B_1 , B_2, … ،من المتطابقة الاخيرة بتوحيد المقام فى الطرف الأيمن ومكافئة كثيرة الحدود التى نحصل عليها فى البسط الأيمن بكثيرة الحدود فى بسط الكسر الأصلى . ونتيجة لهذا التكافؤ تساوى معاملات نفس قوة x فى طرفى المتكافئة فنحصل على مجموعة من المعادلات، بحلها نحصل على المعاملات A , A_2 .. . .

بالإضافة إلى ذلك ، يمكن الأستفادة من تكافؤ كثيرتى الحدود فى بسطى الطرفين (بعد توحيد مقام الطرف الأيمن) لتعين المعاملات المجهولة ، بأن نساوى قيمتيهما العددية لجميع قيم x . فبتعويض قيم مناسبة للتغير x فى طرفى المتكافئة نحصل على عدد من المعادلات تكفى لتعين المعاملات .

مثال

حلل الكسر $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ إلى كسوره الجزئية .

الحــل :

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3\,(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-2}$$

بتوحيد المقام ومكافأة البسطين نجد أن

$$x^2 + 2 = A\,(x+1)^2\,(x-2) + B\,(x+1)\,(x-2) + C\,(x-2) + D\,(x+1)^3 \quad \cdots (1)$$

بترتيب قوى x فى الطرف الايمن ينتج

$$x^2 + 2 = (A+D)x^3 + (B+3D)\,x^2 + (-3A - B + C + 3D)\,x + (-2A - 2B - 2C + D)$$

بمساواة معاملات x^3 ، x^2 ، x^1 ، x^0 (الحد المطلق) فى الطرفين نحصل على مجموعة المعادلات الآتية لتعيين المعاملات :

$$0 = A + D$$
$$1 = B + 3D$$
$$0 = -3A - B + C + 3D$$
$$2 = -2A - 2B - 2C + D$$

وبحلها نجد أن

$$A = -\frac{2}{9}\ , \ B = \frac{1}{3}\ , \ C = 1\ , \ D = \frac{2}{9}\,.$$

وقد كان من الجائز تعيين بعض المعاملات مباشرة بتعويض قيما مناسبة عن x فى المتطابقة (1) . فمثلا بوضع فى الطرفين :

$$x = -1 : \qquad 3 = -3C \qquad \therefore\ C = -1,$$

$$x = \ \ 2 : \qquad 6 = \ \ 27D \qquad \therefore\ D = {}^{2}/_{9}$$

فإذا أضفنا إلى هاتين المعادلتين معادلتين أخريين (بمساواة معاملات قوى x المتماثلة فى الطرفين أو تعويض قيمتين أخريين فى الطرفين) نحصل على أربع معادلات فى المعاملات المجهولة الأربعة .

بذلك تكون نتيجة تحليل الكسر الأصلى إلى كسوره الجزئية هى :

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3\,(x-2)} = -\frac{2}{9\,(x+1)} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{9\,(x-2)}$$

الملحق الرابع

جدول بقوانين التفاضل الأساسية

TABLE OF BASIC DIFFERENTIATION FORMULAE

Function الدالة	Derivative المشتقة
constant	0
x	1
$u \pm v$	$u' \pm v'$
$c\, u$	$c\, u'$
$u\, v$	$u'\, v + u\, v'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - u\, v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
$\dfrac{c}{v}$	$-\dfrac{c}{v^2}\, v' \quad (v \neq 0)$
u^{v}	$v\, u^{v-1}\, u' + u^{v} \ln u . v'$
$y = f(u)\,,\ u = g(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = f(x)\,,\ x = g(y)$	$\dfrac{dy}{dx} = 1 \Big/ \dfrac{dx}{dy}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Function الدالة	Derivative المشتقة
$\tan x$	$\sec^3 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^3 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{cosec}^{-1} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Function الدالة	Derivative المشتقة
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
$\coth x$	$-\operatorname{cosech}^2 x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{cosech} x$	$-\operatorname{cosech} x \coth x$
$\sinh^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2} \quad (\lvert x \rvert < 1)$
$\coth^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2} \quad (\lvert x \rvert > 1)$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (\lvert x \rvert < 1)$
$\operatorname{cosech}^{-1} x$	$-\frac{1}{\lvert x \rvert \sqrt{1+x^2}}$
$x = f(t) : y = g(t)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$

الملحق الخامس

جدول التكاملات الاساسية

TABLE OF BASIC INTEGRALS

Integrand موضوع التكامل	Integral التكامل
1	$x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$
$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\cot x + C$
$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
$\operatorname{cosec} x \cot x$	$-\operatorname{cosec} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x + C$

Integrand موضوع التكامل	Integral التكامل
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1}x+C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$
$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\sec^{-1}x+C$
$\sinh x$	$\cosh x+C$
$\cosh x$	$\sinh x+C$
$\text{sech}^2 x$	$\tanh x+C$
$\text{cosech}^2 x$	$-\coth x+C$
$\text{sech}\, x\tanh x$	$-\text{sech}\, x+C$
$\text{cosech}\, x\coth x$	$-\text{cosech}\, x+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\sinh^{-1}x+C$ or $\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\cosh^{-1}x+C$ or $\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\tanh^{-1}x+C$ or $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$ or $\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C$
$\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$-\text{sech}^{-1}x+C$

فهرس الكتاب