الباب التاسع

المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى

FIRST—ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

٩ - ١ تعـاريف Definitions

المعادلة التفاضلية هى معـادلة تحوى الدالة المجهولة تحت علامة التفاضل أو التفاضلة . وإيجـاد العلاقة المباشرة بين الدالة المجهولة ومتغيرها المستقل يسمى حل (أوتكامل) المعادلة التفاضلية . فمثلا :

$$1)\quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x^2 y = \cos 2x$$

$$2)\quad m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2 x$$

رتبة order المعادلة التفاضلية هى رتبة أعلى مشتقة للدالة المجهولة موجودة فى المعادلة . أما درجة degree المعادلة التفاضلية فهى القوة المرفوعة إليهـــا المشتقة ذات أعلى رتبة بعد جعل جميع قوى المشتقات صحيحة .

وعلى هذا فالمعادلة الأولى من الرتبة الثانيه والدرجه الثانيه ، فى حـين أن المعادله الثانيه من الرتبه الثانيه والدرجه الأولى .

وحل solution المعادله التفاضليه هو الدالة التى إذا عوضت فى المعـــادلة التفاضلية تحققها تطابقياً .

المعـــادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى يمكن تمثيلها كالآتى :

$$F\left(x , y , \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \cdots (1)$$

وفيها تكون المشتقة من الدرجة الأولى .

وإذا حلت المعادلة بالنسبة إلى المشتقة فإنه يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f(x , y) \qquad \cdots (2)$$

وفى بعض الأحوال يكون من الأوفق كتابة المعادلة كالآتى :

$$M(x , y)\, dx + N(x , y)\, dy = 0 \qquad (3)$$

والصورة (2) للمعادله التفاضليه تمثل علاقة بين إحداثيى نقطة وميل المماس لمنحنى الحل عند هذه النقطه . فإذا علم الاحداثيان x ، y فإنه يمكن حساب ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطه ، وهـذا صحيح لجميع نقط المستوى xy . ومن الناحيه الهندسيه فإن الحـل العام complete solution للمـادله التفاضلية هو مجموعه من المنحنيات فى مستوى الاحداثيات تعتمد على ثابت إختيارى واحـد يمثل البارامتر لهذه المجموعه .

وعلى هذا فإن أى حل خاص للمعادلة يقابله أحد منحنيات هـذه المجموعة يمر بنقطه معينه من المستوى يحددها شرط بداية معلوم initial condition.

٩ - ٢ معادلات قابلة للفصل المتغيرين

Separable Equations

هى معادلات يمكن تحويلها إلى الصورة

$$X(x)\,dx = Y(y)\,dy$$

حيث الدالتان $X(x)$ ، $Y(y)$ متصلة .

وللحصول على الحل يكامل طرفى المعادلة الأخيرة

$$\int X(x)\,dx = \int Y(y)\,dy + C$$

حيث C ثابت إختيارى . وعلى هذا فإن العلاقه الأخيرة تعطى الحل العام للمعادلة التفاضلية وذلك لاحتوائه على الثابت الاختيارى C .

مثال (١)

حل المعادلة $x\,dx + y\,dy = 0$

الحل : من الواضح أن المتغيرين منفصلين فى هذه المعادلة ، نظراً لأن معامل dx يحوى x فقط ، فى حين أن معامل dy يحوى y فقط .

بالتكامل المباشر ينتج أن

$$\int x\,dx + \int y dy = C_1$$

or

$$x^2 + y^2 = C^2$$

وهو الحل العام للمعادلة ويمثل مجموعة من الدوائر متحدة المركز ومركزها

المشترك هو نقطة الأصل ونصف القطر هو C ($C \geqslant 0$) وتتغير قيمته من دائرة إلى أخرى .

وإذا طلب حل خاص بذاته للمعادلة التفاضلية فلابد من إعطاء شرط إضافى آخر فى المسألة كأن يطلب مثلا حل المعادلة التفاضليه الذى يحقق الشرط $y = 4$ عندما $x = 3$. بتعويض هـــذا الشرط فى الحـل العام نعين قيمة الثابت C المناظر لهـذا الحـل

$$3^2 + 4^2 = C^2 \qquad \therefore \quad C = 5$$

أى أن الحـل الخاص المطلوب فى هـــذه الحـاله هو الدائرة التى نصف قطـرها 5

مثال (٢)

حل المعادلة $x\,(1 + y^2)\,dx - y\,(1 + x^2)\,dy = 0$

الحـل : يمكن فصل المتغيرين بالقسمة على $(1 + y^2)\,(1 + x^2)$:

$$\frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

ثم بالضرب فى 2 والتكامل ينتج

$$\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + C_1$$

$$\therefore \quad \ln\,(1 + y^2) = \ln\,(1 + x^2) + \ln\,C$$

وقد وضع ثابت التكامل على صـــورة لوغاريتم حتى يمكن التخلص من اللوغاريتم فى المعادلة كلها :

$$\therefore \quad 1 + y^2 = C\,(1 + x^2) \qquad \cdots \quad (1)$$

والجدير بالملاحظة أن الحل العام للمعادلة التفاضلية ذات الرتبةالأولى يحتوى على ثابت إختيارى واحد فقط .

وفى بعض المسائل يطلب تعيين حل بذاته ، يحقق شرطاً معلوماً . فى هــذه الحالة يعطى حال بداية على الصورة $y = y_0$ عنـدما $x = x_0$. بتعويض هذا الشرط فى الحل العام نحصل على معادلة لتعيين الثابت الاختيارى .

فى المثال الأخير نفرض أن حال البداية هو $y = 0$ عندما $x = 0$. بالتعويض فى الحل العام (1) نحصل على

$$1 = C$$

وعلى هذا فالحل المطلوب الذى يحقق الشرط المعطى هو

$$1 + y^2 = 1 + x^2$$

$$\text{or} \qquad y = \pm\, x$$

٩ ـ ٣ المعادلات المتجانسة

Homogeneous Equations

تسمى المعادلات التى على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

معادلات تفاضلية متجانسة ، حيث الطرف الأيمن دالة فى الكسر $\frac{y}{x}$ باعتباره كمتغير واحد . وهذا النوع من المعادلات يمكن إرجاعه إلى معادلة قابلة لفصل المتغيرين .

بإجراء التعويض

$$v = \frac{y}{x} \qquad \text{or} \qquad y = x\, v$$

نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

ويعطى التعويض فى المعادلة التفاضلية

$$x \frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

وهى معادلة قابلة لفصل المتغيرين

$$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

وبالتكامل

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \ln x + \ln C' = \ln C'x$$

$$\text{or} \qquad x = C\, e^{\int \frac{dv}{f(v) - v}}$$

وبعد إجراء التكامل فى الطرف الأيمن يستبدل المتغير v بقيمته $\frac{y}{x}$ فنحصل على حل المعادلة التفاضلية المتجانسة .

مثال (١)

حل المعادلة $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan \dfrac{y}{x}$

الحـل : يلاحظ أن الطرف الأيمن دالة الـكسر $\dfrac{y}{x}$ وعلى ذلك فإن المعادلة متجانسة . بتعويض

$$v = \frac{y}{x} \quad \text{or} \quad y = x\,v \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

فى المعادلة التفاضلية ينتج أن

$$x\,\frac{dv}{dx} + v = v + \tan v$$

or

$$\cot v \; dv = \frac{dx}{x}$$

$$\ln(\sin v) = \ln x + \ln C$$

$$\sin v = C\,x$$

$$\sin \frac{y}{x} = C\,x$$

$$\text{or} \qquad y = x \sin^{-1} C\,x$$

مثـال (٢)

حل المعادلة $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

الحـل : بقسمة كل من البسط والمقام فى الطـرف الأيمن على x^2 تتحـول المعادلة إلى الصورة المتجانسة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

بإجراء التعويض $v = \frac{y}{x}$ ينتج أن

$$y = x\,v \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = x\,\frac{dv}{dx} + v$$

$$x\,\frac{dv}{dx} + v = \frac{v}{1 + v^2}$$

$$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{-\,v^3}{1 + v^2}$$

وبفصل المتغيرين ينتج أن

$$-\,\frac{1 + v^2}{v^3}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\left(-\,\frac{1}{v^3} - \frac{1}{v}\right) dv = \frac{dx}{x}$$

وبالتكامل :

$$\frac{1}{2\,v^2} - \ln v = \ln x + \ln C$$

$$\frac{1}{2\,v^2} = \ln C\,v\,x$$

وباستبدال v بقيمته نحصل على الحل العام

$$\frac{x^2}{2\,y^2} = \ln C\,y$$

وهنا يتعذر الحصول على y كدالة صريحة فى x ، إلا أنه يمكن بسهولة التعبير عن x بدلالة y :

$$x = y \sqrt{2 \ln |C y|}$$

وقد أخذت القيمة المطلقة فى الطرف الأيمن حتى يكون الحل حقيقياً ، وبشرط أن يكون $|C y| \geqslant 1$ لتتواجد قيمة حقيقية للجذر التربيعى .

٩ - ٤ معادلات يمكن ارجاعها الى أحد النوعين السابقين

Equations Reducible to one of the Previous Types

المعادلات التى على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right) \quad \cdots \cdots \quad (1)$$

يمكن تحويلها إلى معادلات متجانسة أو معادلات قابلة لفصل المتغيرين تبعا لوضع المستقيمين

$$ax + by + c = o$$
$$AX + BY + C = O$$

اولا : المستقيمان متقاطعان

بنقل نقطة أصل الإحداثيات إلى نقطة التقاطع (h, k) باستخدام التحويل

$$X = x - h \qquad , \qquad Y = y - k$$

ينعدم الحدان الثابتان فى الطرف الأيمن من (1) ويظل معاملا المتغيرين بدون تغيير ، فى حين أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}.$$

تؤول المعادلة (1) إلى الصورة

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{AX + BY}\right)$$

or

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a + b\frac{Y}{X}}{A + B\frac{Y}{X}}\right) = F\left(\frac{Y}{X}\right)$$

وهى معادلة متجانسة .

ثانيا : المستقيمان المتوازيان

فى هذه الحالة تكون معاملات المتغيرين متناسبة أى

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = k$$

وتكتب المعادلة التفاضلية (1) كالآتى

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{(ax + by) + c}{K(ax + by) + C}\right) = F(ax + by)$$

وبإجراء التحويل

$$z = ax + by$$

تؤول المعادلة التفاضلية إلى معادلة قابلة لفصل المتغيرين .

مثال (١)

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

الحـل : بحل المعادلتين

$$x - y + 1 = o \quad \text{and} \quad x + y - 3 = o$$

نوجد نقطة تقـاطـع هذين المستقيمين ، أى $h = 1$ ، $k = 2$.

ثم نضـع

$$x = X + 1 \quad \text{and} \quad y = Y + 2$$

وتتحول المعادله المعطاه إلى الصورة

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

وهى معادلة متجانسة . بالتعويض

$$v = \frac{Y}{X} \quad \text{or} \quad Y = v X , \quad \frac{dY}{dx} = X \frac{dv}{dX} + v$$

تتحول إلى معادلة قابلة لفصل المتغيرين :

$$X \frac{dv}{dX} + = \frac{1 - v}{1 + v}$$

$$X \frac{dv}{dX} = \frac{1 - 2v - v^2}{1 + v}$$

$$\frac{1 + v}{1 - 2v - v^2} dv = \frac{dX}{X}$$

بالضرب فى (2 —) والتكامل

$$\ln (1 - 2v - v^2) = -2 \ln X + \ln C_1$$

$$X^2(1 - 2v - v^2) = C_1$$

$$X^2 - 2XY - Y^2 = C_1$$

or

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C$$

مثال (٢)

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

الحل :

فى هذه الحاله يتوازى المستقيمان

$$2x + y - 1 = 0 \text{ and } 4x + 2y + 5 = 0$$

إذ لهما نفس الميل . بوضع

$$z = 2x + y \quad \text{and} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

تؤول المعادلة المعطاة إلى

$$\frac{dz}{dx} - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

or

$$\frac{dz}{dx} = \frac{5z+9}{2z+5}$$

وهى معادلة قابلة لفصل المتغيرين

$$\frac{2z+5}{5z+9}\ dz = dx$$

or

$$\left[\frac{2}{5} + \frac{7}{5(5z+9)}\right] dz = dx$$

وبالتكامل ينتج

$$\frac{2}{5} z + \frac{7}{25} \ln (5z+9) = x + C$$

ثم نعوض عن z بقيمتها

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25} \ln (10x + 5y + 9) = x + C_1$$

ويكون الحل العام هو

$$10y - 5x + 7 \ln (10x + 5y + 9) = C$$

٩ ـ ٥ المعادلات التفاضلية التامة

Exact Differential Equations

تسمى المعادلة

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \quad \cdots \qquad (1)$$

معادلة تفاضلية تامة إذا كان طرفها الأيسر تفاضلة كليـــة (تامه) لدالة ما $u(x, y)$ ، أى أن

$$du(x, y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

وفى هذه الحالة يمكن كتابة (1) على لصورة

$$du(x, y) = 0$$

وبالتالى يكون حلها الكامل هو

$$u(x, y) = C. \qquad (2)$$

وإذا كان الطرف الأيسر فى المعادلة (1) هو التفاضلة التامة للدالة $u(x,y)$ فلا بد ان يتحقق

$$M\,dx + N\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

ومن هـذا ينتج

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ and } N = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3)$$

بتفاضل طرفى المعـادله اليسرى بالنسبة إلى y واليمنى بالنسبة إلى x نجد أن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \ \partial x} \quad \text{and} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \ \partial y}$$

وباعتبار المشتقتين الجزئيتين من الرتبة الثانية متصلة ، لذلك

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \ \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \ \partial y}$$

ومن ذلك نستنتج أن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{4}$$

وهذا هو الشرط اللازم والكافى لكى تكون المعادلة (1) تامه .

ولإيجاد الدالة u التى تعين الحل (2) نعتبر المعادله اليسرى من المجموعة (3) ، أى

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M (x , y)$$

بالتكامل بالنسبة إلى x ينتج

$$u = \int_{x_0}^{x} M (x,y) \ dx + \varphi (y) \tag{5}$$

حيث x_0 هو الاحداثى السينى لأية نقطة فى مجال تواجد الحل . وعندما نكامل بالنسبة إلى x فإننا نعتبر y ثابتا وعلى هنا فإن ثابت التكامل ربما يعتمد على y وقد رمز له بالداله $\varphi (y)$. وعلينا أن نختار $\varphi (y)$ بحيث تتحقق المعادله الثانيه من المجموعة (3) . لذلك نفاضل المعادله الاخيرة بالنسبه إلى y ونكافىء الناتج بالداله $N (x , y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\, dx + \varphi'(y) \equiv N(x, y)$$

وبالتعويض من (4) ينتج

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\, dx + \varphi'(y) \equiv N(x, y)$$

that is

$$\Big| N(x, y) \Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y)$$

or

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) \quad N(x, y)$$

ومن تكافؤ الطرفين نستنتج أن

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

or

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C$$

وبالتعويض فى (5) نوجد u :

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + C_1$$

حيث (x_0 , y_0) هى نقطة يتواجد فى جوارها حل للمعادلة التفاضلية .
بمساواة التعبير الأخير بثابت نحصل على الحل (2) :

$$\int_{x_0}^{x} M (x , y) dx + \int_{y_0}^{y} N (x_0 , y) dy = C$$

والجدير بالذكر أنه كان من الممكن أيضا الوصول إلى نفس الحل باستخدام المعادلة الثانية فى (3) أى

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N$$

ثم التكامل بالنسبة إلى y وإضافة الثابت على صورة دالة فى x أى $\psi (x)$ ونكمل الحل بطريقة مماثلة لما سبق ونصل إلى الحل العام للمعادلة التفاضلية على الصورة

$$\int_{y_0}^{y} N (x, y) dy + \int_{x_0}^{x} M (x , y_0) dx = C$$

مثال (١)

حل المعادلة التفاضلية $(x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy = 0$

الحل : بمقارنة هذه المعادلة بالصورة (1) نجد أن :

$$M = x + y + 1 \qquad , \qquad N = x - y^2 + 3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه نستنتج أن المعادلة المعطاة تامـة .

ولنختر الآن المعادلة اليسرى من (3) ، أى أننا سنتبع الطريقـــة الأولى الوصول إلى الحل :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = x + y + 1$$

$$u = \frac{1}{2} x^2 + xy + x + \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \phi'(y) = N$$

$$\therefore \; x + \phi'(y) = x - y^2 + 3$$

$$\therefore \; \phi'(y) = - y^2 + 3$$

وبالتكامل ينتـج أن

$$\phi(y) = - \frac{1}{3} y^3 + 3 y + C_1$$

$$\therefore u = \frac{1}{2} x^2 + xy + x - \frac{1}{3} y^3 + 3 y + C_1$$

فيـكون الحـل العـام على الصورة

$$3 x^2 + 6 xy + 6x - 2 y^3 + 18 y = C$$

وكان من الممكن الوصول إلى نفس الحل باتباع الطريقة الثانية كالآتى :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x - y^2 + 3$$

بالتكامل بالنسبة إلى y ينتج أن

$$u = xy - \frac{1}{3} y^3 + 3y + \psi (x)$$

نفاضل بالنسبة إلى x ونكافىء الناتج بالداله M :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \psi' (x) = M$$

$$y + \psi' (x) = x + y + 1$$

$$\therefore \quad \psi' (x) = x + 1$$

وبالتكامل

$$\psi (x) = \frac{1}{2} x^2 + x + C_2$$

$$\therefore \quad u = xy - \frac{1}{3} y^3 + 3y + \frac{1}{2} x^2 + x + C_2$$

وعلى هذا يكون الحل العام هو

$$6 x y - 2y^3 + 18y + 3x^2 + 6x = C$$

كما سبق إيجاده .

مثال (٢)

حل المعادلة

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

الحـل : نختبر المعادلة إن كانت تامة :

$$M = \frac{2x}{y^3} \quad ; \quad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

المعادلة تامة .

$$\because \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$$

$$\therefore \quad u = \int \frac{2x}{y^3}\,dx + \phi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \phi(y)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى y مع ملاحظة أن

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}$$

نجـد أن

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \phi'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}$$

$$\therefore \quad \phi'(y) = \frac{1}{y^2} \;, \quad \phi(y) = -\frac{1}{y} + C_1$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1$$

ويكون الحل الكامل للمعادلة الأصلية هو

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

العامل المكامل :

Integrating Factor

بالرجوع إلى المعادلة التفاضلية فى المثال السابق وضرب طرفيها فى y^4 نحصل على المعـــادلة

$$2x\,y\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0 \qquad \dots \dots \quad (1)$$

وهى معادلة غير تامة ، نظراً لأن :

$$M = 2x\,y \qquad ; \qquad N = y^2 - 3x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \qquad ; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} \quad - 6x$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

فاذا نظرنا إلى المسأله بطريقة عكسية وأعتبرنا أن المعادلة المعطاة هى المعادله (1) وهى غير تامة ، فإنه بضرب طرفى هذه المعادله فى $\frac{1}{y^4}$ تؤول إلى معادله المثال السابق وهى تامة . ومعنى هذا أن المعادلة غير التامة يمكن ضربها فى داله معينة فتتحول إلى معـــادلة تامة . تسمى هذه الدالة بالعامل المكامل لهـذه المعادله .

فيما يلى سنبين طريقة إيجـاد العامل المـكامل فى بعض الحالات الخاصة نظراً لصعوبة إيجـاد العامل المكامل فى الحالة العامة كما سيأتى شرحه .

نفرض أن المعادلة المعطاة هى

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad \dots \dots \quad (2)$$

حيث الطرف الأيسر ليس تفاضلة تامة . بضرب طرفى هـذه المعادلة فى عامل مكامل $\mu\,(x\,,\,y)$ تتحول إلى المعادلة

$$\mu\ M\ dx + \mu\ N\ dy = 0$$

ولـكى تصبح هذه المعادلة تامة يجب أن يتحقق الشرط الآتى :

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(\mu\ M) = \frac{\partial}{\partial x}\,(\mu\ N)$$

that is,

$$\mu\ \frac{\partial M}{\partial y} + M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\ \frac{\partial N}{\partial x} + N\,\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

or

$$M\ \frac{\partial \mu}{\partial y} - N\ \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\ \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

بالقسمه على μ يمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة

$$M\ \frac{\partial}{\partial y}\,(\ln\ \mu) - N\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\ln\ \mu) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad \cdots \quad (3)$$

من الواضح أن أية داله $(x\,,\,y)\,\mu$ تحقق هذه المعادلة تـكون عاملا مكاملا للمعادلة (2) . والمعادلة (3) معادلة تفاضلية جزئية فى الداله المجهولة μ التى تعتمد على المتغيرين x ، y . وعامة يـكون إيجاد $(x\,,\,y)\,\mu$ من المعادلة (3) أكثر صعوبة من حل المعادلة التفاضلية الأصلية . إلا أنه فى بعض الحالات الخاصة يمـكن تعيين $(x\,,\,y)\,\mu$.

فمثلا ، نفرض أن المعـــادلة (2) تقبل عاملا مكاملا يعتمد على y فقط .
لذلك يكـــون

$$\frac{\partial}{\partial x}(\ln \mu) = 0$$

وتتحول المعادلة (3) لتعيين μ إلى المعادلة التفاضلية العادية

$$\frac{d}{dy}(\ln \mu) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad \cdots \cdots \quad (4)$$

ومنها نعين $\ln \mu$ بالتكامل بالنسبه إلى y ومن ثم تتعين μ . ومن الواضح أن هذا يكون ممـكناً إذا كان الطرف الأيمن فى المعادلة (4) لا يعتمد على x . ويعتبر هذا شرطاً لوجود عامل مكامل μ (y) للمعـادلة (2) .

بالمثـل ، إذا كان μ داله x فقط فإن

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln \mu) = 0$$

وتأخـذ المعادلة (3) الصورة

$$\frac{d}{dx}(\ln \mu) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad \cdots \quad (5)$$

فإذا كان الطرف الأيمن فى هذه المعادلة دالة x فقط ، فبالتكامل يمـكن الحصول على العامل المكامل μ كدالة x .

وخلاصة القول ، فإن الطرف الأيمن فى كل من (4) ، (5) يعـــين نوع دالة العامل المكامل . لذلك نقسم الفرق $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ أولا على M فإن كان

الناتج دالة y كان من الممكن إيجاد عامل مكامل $\mu\ (y)$ للمعـادلة التفاضلية .
وإذا لم يتحقق هذا نقسم هذا الفرق على N ونختبر الناتج إن كان دالة فى x .
وفى هذه الحالة يتواجد عامل مكامل $\mu\ (x)$ للمعادلة التفـاضلية .

فيما عدا هاتين الحالتين يصعب إيجاد العامل المكامل كداله فى كل من x ، y .

مثـال (١)

حل المعـادلة التفاضلية $(x^4 + x^2 y^2 + x)\ dx + y\ dy = 0$

الحل : فى هذه المعادلة يـكون

$$M = x^4 + x^2 y^2 + x \quad ; \quad N = y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2\ y \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

وهذا يعنى أن المعادلة المعطاة غير تامة . ولنحاول الآن إيجـاد العـــامل المكامل μ بحيث يعتمد على أحد المتغيرين x أو y فقط .

إذا كان μ يعتمد على y فقط ، فإن الطرف الأيمن فى (4) يجب أن يـكون دالة y :

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\frac{2x^2\ y}{x^4 + x^2\ y^2 + x}$$

وهذا غير صحيـح :

أما إذا كان μ يعتمد على x فقط ، وجب أن يـكون الطرف الأيمن فى (5) داله x فقط :

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{2x^2\,y}{y}=2x^2$$

وهذه دالة فى x فقط . وعلى هـذا تقبل المادلة المعطاه عاملا مكاملا كدالة x فقط . وتعطى المعادلة (5) :

$$\frac{d}{dx}(\ln\mu)=2x^2$$

$$\ln\mu=\tfrac{2}{3}x^3$$

or

$$\mu=e^{\frac{2}{3}x^3}$$

ويلاحظ هنا عـــدم إضافة ثابت تكامل ، نظراً لأننا نبحث عن أية دالة تحول المعادلة الأصلية إلى معادلة تامة وليس الحل العام للمعادلة (5) .

بضرب المعادله الأصلية فى العامل المكامل μ نجد أن

$$(x^4+x^2y^2+x)\,e^{\frac{2}{3}x^3}\,dx+y\,e^{\frac{2}{3}x^3}\,dy=0$$

وهى معادله تفاضلية تامة . ومن الواضح أن تكامل الحد الثانى فيهـا أسهل للوصول إلى u :

$$u=\int y\,e^{\frac{2}{3}x^3}\,dy$$

$$u=\tfrac{1}{2}y^2\,e^{\frac{2}{3}x^3}+\phi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^2\,y^2\,e^{\frac{2}{3}x^3}+\phi'(x)$$

وحيث أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M = (x^4 + x^2 y^2 + x) e^{\frac{2}{3} x^3}$$

$$\therefore \varphi'(x) = (x^4 + x) e^{\frac{2}{3} x^3}$$

وبالتكامل بالتجزىء نحصل على

$$\varphi(x) = \int x^4 e^{\frac{2}{3} x^3} dx + \int x e^{\frac{2}{3} x^3} dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int x^2 d\left(e^{\frac{2}{3} x^3}\right) + \int x e^{\frac{2}{3} x^3} dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[x^2 e^{\frac{2}{3} x^3} - 2 \int x e^{\frac{2}{3} x^3} dx\right] + \int x e^{\frac{2}{3} x^3} dx$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 e^{\frac{2}{3} x^3}$$

وعلى هذا تعطى الدالة u من

$$u = \tfrac{1}{2} y^2 e^{\frac{2}{3} x^3} + \varphi(x)$$

$$u = \tfrac{1}{2} (x^2 + y^2) e^{\frac{2}{3} x^3}$$

ويكون الحل الكامل للمعادله التفاضلية هو

$$(x^2 + y^2) e^{\frac{2}{3} x^3} = C$$

ملحوظة : سنترك للقارىء تحقيق أن $\frac{1}{x^2 + y^2}$ هو أيضاً عامل مكامل يعتمد على كل من x ، y ولكنه يؤدى إلى نفس الحل .

مثال (٢)

حل المعادله $(y + xy^2)\,dx - x\,dy = 0$

الحل : فى هذه المسأله نجد أن

$$M = y + xy^2 \quad , \quad N = -x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادله غير تامة .

نحاول الآن البحث عن عامل مكامل كدالة فى y فقط .

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-1-1-2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y}$$

من هذا نستنتج أن المعادله المعطاة تقبل عاملا مكاملا يعتمد على y فقط ،
ولنوجد هـذا العامل :

$$\frac{d}{dy}(\ln \mu) = -\frac{2}{y}$$

$$\ln \mu = -2 \ln y$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{y^2}$$

بضرب طرفى المعادلة الأصلية فى العامل المكامل μ ينتج أن

$$\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2}\, dy = 0$$

وهى معادله تفاضلية تامة ، بحلها نحصل على الحل الكامل :

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C_1 = 0$$

or

$$y = -\frac{2x}{x^2 + C}.$$

٩ ـ ٦ المعادلات الخطية ذات الرتبة الاولى

Linear Equations of the First Order

المعادله التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى هىمعادله خطية (أى من الدرجة الأولى) فى الدالة المجهوله ومشتقتها . الصورة القياسية لهذه المعادله هى

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x) \qquad \cdots \quad (1)$$

حيث $P(x)$ ، $Q(x)$ دالتان معلومتان متصلتان فى المتغير x .

يمكن حل هذه المعادلة بتحويلها إلى معادلة تامة . لذلك نضرب المعادلة (1) فى عامل مكامل $\mu = \mu(x)$:

$$(\mu P y - \mu Q)\, dx + \mu\, dy = 0 \qquad \cdots \quad (2)$$

ومنها نستنتج أن

$$M = \mu\, Py - \mu\, Q \qquad , \qquad N = \mu$$

المعادلة (2) تصبح تامة إذا تحقق

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

that is

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\mu\,(x)\Big\} = \frac{\partial}{\partial y}\Big\{\mu\,(x)\;P\,(x)\;y - \mu\,(x)\;Q\,(x)\Big\}$$

or

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu\;P \qquad \cdots \quad (3)$$

وبفصل المتغيرين نحصل على العامل المكامل :

$$\frac{d\mu}{\mu} = P\;dx$$

$$\ln \mu = \int P\;dx$$

$$\mu = e^{\int P\,dx}$$

بالتعويض من (3) فى المعادلة (2) تصير الأخيرة عد الصورة

$$\mu\;dy + y\;d\mu = \mu\;Q\;dx$$

i.e. $d\,(\mu y) = \mu\;Q\;dx$

وبالتكامل نحصل على حل المعادلة (1) :

$$\mu y = \int \mu Q \, dx + C \qquad \cdots \quad (4)$$

مثـال (١)

حل المعادلة $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^4$

الحـل : المعادلة المطاه معادله خطية . لتحويلهـا إلى الصورة القياسية (1) نقسم طرفيهـا على $(x+1)$:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$$

ومنهـا ينتج أن

$$P(x) = -\frac{2}{x+1} \quad , \quad Q(x) = (x+1)^3$$

يعطى العـامل المـكامل مـن

$$\mu = e^{\int P \, dx} = e^{-2\int \frac{dx}{x+1}} = e^{-2 \ln (x+1)}$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{1}{(x+1)^2}$$

ونحصل على حل المعادلة الأصلية من (4) مباشرة :

$$\mu\, y = \int \mu\, Q\, dx + C$$

$$\frac{y}{(x+1)^2} = \int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}\, dx + C$$

$$= \int (x+1)\, dx + C$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 + x + C$$

$$\therefore \quad y = (x+1)^2 \left(\tfrac{1}{2} x^2 + x + C\right)$$

مثال (٢)

حل المعادلة $\frac{dy}{dx} - y \cot x = 2x \sin x$

الحل : المعادلة المعطاة معادلة خطيه فى صورتها القياسية :

$$P(x) = -\cot x \quad ; \quad Q(x) = 2x \sin x$$

العامل المكامل المناظر هو

$$\mu = e^{\int P\, dx} = e^{-\int \cot x\, dx} = e^{-\ln \sin x}$$

$$\mu = \operatorname{cosec} x$$

ويعطى الحل العام للمعادلة المعطاه من

$$\mu y = \int \mu\, Q\, dx + C$$

$$y \operatorname{cosec} x = \int 2x \sin x \operatorname{cosec} x \, dx + C$$

$$= \int 2x \, dx + C$$

$$= x^2 + C$$

$$\therefore \; y = (x^2 + C) \sin x$$

٩ ـ ٧ معـادلة برنولى Bernoulli's Equation

عديد من المعـادلات التفاضلية يمكن إرجاعهـا إلى معادلات خطية بإجراء تحويل مناسب المتغيرات . ولنعتبر على سبيل المثال معادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$$

حيث $P(x)$ ، $Q(x)$ دالتـان متصلتان فى x ، كما أن $n \neq o$ أو $n = 1$ (وإلا أصبحت المعادلة خطية) .

تسمى هذه المعادلة بمعادلة برنولى التى يمكن حلها كالآتى :

بقسمة جميع حدود المعادلة على y^n ينتج

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P\, y^{-n+1} = Q \quad \cdots \quad (1)$$

وبأجراء التحويل

$$z = y^{-n+1} \qquad \ldots \qquad (2)$$

نجـــد أن

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)\, y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

بالتعويض فى المعادلة (1) :

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)\, Pz = (-n+1)\, Q$$

وهى معادله خطية .

بحل المعادله الأخيرة بالنسبة إلى z ثم استبدال الأخرة من التعويض (2) بدلالة y نصل إلى الحل العام لمعادله برنولى .

مثال

حل المعادله

$$\frac{dy}{dx} + x\, y = x^3\, y^3$$

الحل : بقسمه جميع الحدود على y^3 :

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + x\, y^{-2} = x^3$$

باجراء التعويض

$$z = y^{-2}\,, \quad \frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

تتحول المعادلة التفاضلية الاخيرة إلى

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$$

وهى معادله خطيه ، يعطى عاملها المكامل من

$$\mu = e^{\int -2x\, dx} = e^{-x^2}$$

ويكون حلها هو

$$\mu z = \int \mu\,(-2x^3)\,dx + C$$

$$e^{-x^2} z = \int -2\,x^3 e^{-x^2} dx + C$$

وبالتكامل بالتجزىء والتعويض عن z نجد أن

$$e^{-x^2} y^{-2} = \int x^2\, d\,(e^{-x^2}) + C$$

$$= x^2 e^{-x^2} - \int e^{-x^2}\, d\,(x^2) + C$$

$$= x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C$$

بالضرب فى e^{x^2} :

$$y^{-2} = x^2 + 1 + C\,e^{x^2}$$

or

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + C\,e^{x^2}}}$$

٩ - ٨ معادلة ريكاتى Riccati's Equation

هى معادله على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y + Q(x)\, y^2 = R(x) \qquad \cdots\cdots (1)$$

حيث $P(x)$ ، $Q(x)$ ، $R(x)$ دوال معلومه فى x .

ليس من السهل عامه إيجاد حل هذه المعادله ، إلا أنه إذا علم أى حل خاص لهذه المعادله ، أمكن تحويلها إلى معادله برنولى بفرض أن الحل العام

$$y = y_1 + z \qquad \cdots\cdots (2)$$

حيث $y_1(x)$ هو الحل الخاص المعلوم ، أى أن

$$\frac{dy_1}{dx} + P\, y_1 + Q\, y_1^2 = R \qquad \cdots (3)$$

بتعويض الفرض (2) فى المعادلة (1) ينتج أن

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + P\,(y_1+z) + Q\,(y_1+z)^2 = R$$

وبأخذ (3) فى الأعتبار تؤول المعادلة الأخيرة إلى

$$\frac{dz}{dx} + [P + 2Q\, y_1]\, z = -Q\, z^2$$

وهى معادلة برنولى التى يعطى حلها الدالة المجهولة z فى الحل العام (2) للمعادلة الأصلية .

مثال

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

اذا علمت أن $\frac{1}{x}$ هو حل خاص لهذه المعادلة .

الحل :

فى هذا المثال $y_1 = \frac{1}{x}$ • بوضع

$$y = z + \frac{1}{x}$$

نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2}$$

and hence

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} = (z + \frac{1}{x})^2 - \frac{2}{x^2}$$

or

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = z^2$$

وهى معادلة برنولى .

بقسمة هذه المعادلة على z^3

$$z^{-3}\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z^{1}=1$$

وتعويض

$$u=z^{1}\quad,\quad\frac{du}{dx}=z^{-2}\frac{dz}{dx}$$

تؤول المعادلة الى

$$\frac{du}{dx}+\frac{2}{x}u=1$$

وهى معادله خطيه ، عاملها المكامل هو

$$\mu=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=x^2$$

وحلها يعطى من

$$x^2u=\int -x^2dx+C_1=-\frac{1}{3}x^3+C_1$$

or

$$u=-\frac{1}{3}x+\frac{C_1}{x^3}$$

وحيث أن :

$$z=\frac{1}{u}=\frac{3x^3}{C-x^3}$$

فإن الحل العام للمعادلة الأصلية يكون

$$y = \frac{1}{x} + z$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3\,x^2}{C - x^3}$$

تمارين

حل المعادلات التفاضلية الآتية :

1) $\tan y \, dx - \cot x \, dy = 0.$

$$[\sin y \cos x = C]$$

2) $x y \dfrac{dy}{dx} = 1 - x^2.$

$$[x^2 + y^2 = \ln C x^2]$$

3) $(1 + e^x)\ y \dfrac{dy}{dx} = e^x$, $y = 1$ when $x = 0.$

$$\left[2 e^{\frac{1}{2} y^2} = \sqrt{e}\,(1 + e^x)\right]$$

4) $x(\ln x - \ln y)\, dy - y\, dx = 0.$

$$[x = y e^{cy + 1}]$$

5) $\dfrac{dx}{dt} = e^{x/t} + \dfrac{x}{t}$.

$$[\ln t = C - e^{-x/t}]$$

6) $(x - y)\, y\, dx - x^2\, dy = 0.$

$$[x = C e^{x/y}]$$

7) $(y^2 - x^2) \dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0.$

$$[y = C(x^2 + y^2)]$$

8) $xy^2\, dy = (x^3 + y^3)\, dx.$

$$[y = x \sqrt[3]{3 \ln C x}]$$

9) $(4x^3 + 3xy + y^3)\, dx + (4y^3 + 3xy + x^2)\, dy = 0.$

$$[(x^2 + y^2)^3 (x + y)^2 = C]$$

10) $(12x + 5y - 9)\,dx + (5x + 2y - 3)\,dy = 0.$

$$[\,6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 3y = C\,]$$

11) $(2x + 2y - 1)\,dx + (x + y - 2)\,dy = 0.$

$$[\,(x + y + 1)^3 = C\,e^{2x + y}\,]$$

12) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}\,.$

$$[\,3x - 4y + 1 = C\,e^{x - y}\,]$$

13) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 3}{1 - x + y}\,.$

$$[\,x^2 + 2xy - y^2 - 6x - 2y = C\,]$$

14) $(4y + 2x + 3)\dfrac{dy}{dx} - 2y - x - 1 = 0.$

$$[\,8y + 4x + 5 = C\,e^{4x - 8y - 4}\,]$$

15) $(2x + 3y - 1)\,dx + (4x + 6y - 5)\,dy = 0.$

$$[\,x + 2y + 3\ln(2x + 3y - 7) = C\,]$$

16) $(1 + x + y)\dfrac{dy}{dx} = 1 - 3x - 3y.$

$$[\,3x - y + 2\ln(x + y - 1) = C\,]$$

17) $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy - \cos x = 0.$

$$[\,(x^2 - 1)\,y - \sin x = C\,]$$

18) $(y^2 - x)\dfrac{dy}{dx} - y + x^2 = 0.$

[$y^3 + x^3 - 3xy = C$]

19) $3x\, y^2 \dfrac{dy}{dx} + y^3 - 2x = 0.$

[$y^3 = x + \dfrac{C}{x}$]

20) $y\, dx - x\, dy = x^2\, y\, dy$

[$\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y}{x} = C$]

21) $(x^2 - y)\, dx + (x^2\, y^2 + x)\, dy = 0.$

[$3\,(x^2 + y) + xy^3 = C\,x$]

22) $\dfrac{y}{x}\, dx + (y^3 - \ln x)\, dy = 0.$

[$\dfrac{1}{y} \ln x + \frac{1}{2}\, y^2 = C$]

23) $x\,\dfrac{dy}{dx} + y = x^3.$

[$y = \dfrac{C}{x} + \frac{1}{4}\, x^3$]

24) $\dfrac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$

[$x = Ce^{-3t} + {}^1/_5\, e^{2t}$]

25) $y \sin x + \dfrac{dy}{dx} \cos x = 1.$

[$y = C \cos x + \sin x$]

26) $\dfrac{dx}{dt} = x + \sin t.$

$$\left[x = C e^{t} - \tfrac{1}{2} (\cos t + \sin t) \right]$$

27) $\dfrac{dx}{dt} - x \cot t = 4 \sin t.$

$$[x = (4t + C) \sin t]$$

28) $y = x \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{y}.$

$$\left[y = Cx + \frac{1}{C} \right]$$

29) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3y}{x} + x^3 y^2 = 0.$

$$\left[y = \frac{7x^3}{x^7 + C} \right]$$

30) $x \dfrac{dy}{dx} - y^2 \ln x + y = 0.$

$$\left[y = \frac{1}{1 + Cx + \ln x} \right]$$

31) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3.$

$$[y^2 (x^2 + 1 + C e^{x^2} = 1]$$

32) $y - \cos x \dfrac{dy}{dx} = y^2 \cos x (1 - \sin x).$

$$\left[y = \frac{\tan x + \sec x}{\sin x + C} \right]$$

33) $y(1 + xy)\, dx - x\, dy = 0.$

$$\left[\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C \right]$$