ارشادات وحلول

مقدمة الرياضة البحتة

تمارين ٤ ص ٥١

نقل نقطة الأصل وتغيير وحدة القياس

(١) باتخاذ ١٥٢٠٠ وسطا فرضيا نحصل على الآتى :

القيمة	الانحراف عن ١٥٢٠٠
١٤٣٧٢	٨٢٨ -
١٤٧٦٤	٤٣٦ -
١٤٩٥٣	٢٤٧ -
١٥١٢٣	٧٧ -
١٥٣٣٠	١٣٠
١٥٤٩٠	٢٩٠
١٥٦٠٠	٤٠٠
١٥٧٨٠	٥٨٠
١٥٩٢٠	٧٢٠
١٥٩٩٧	٧٩٧
١٥٣٣٠٩	١٥٨٨ — ٢٩١٧ = ١٣٢٩

$$\bar{س} = ١٥٢٠٠ + \frac{١٣٢٩}{١٠}$$

$$= ١٥٢٠٠ + ١٣٢٫٩$$

$$= ١٥٣٣٢٫٩$$

التحقيق : $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{١٥٣٣٢٩}{١٠} = ١٥٣٣٢٫٩$

(٢) باتخاذ ١٢٩٥٥٠ وسطا فرضيا نحصل على الآتى :

القيمة	الانحراف عن ١٣٩٥٥٠	الانحراف / ٥٠
١٣٩٤٥٠	-١٠٠	-٢
١٢٩٤٥٠	-١٠٠	-٢
١٢٩٥٠٠	-٥٠	-١
١٢٩٥٠٠	-٥٠	-١
١١٩٥٠٠	-٥٠	-١
١٣٩٥٥٠	٠	٠
١٣٩٥٥٠	٠	٠
١٣٩٦٥٠	٥٠	١
١٢٩٦٥٠	١٠٠	٢
١٣٩٦٥٠	١٠٠	٢
١٣٩٥٤٠٠		٥ − ٧ = − ٢

$\bar{س} = ١٣٩٥٥٠ + \frac{-٢}{١٠} \times ٥٠$

$= ١٣٩٥٥٠ - ١٠ = ١٣٩٥٤٠$

التحقيق : $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{١٣٩٥٤٠٠}{١٠} = ١٣٩٥٤٠$

(٣)

الأجر (س)	عدد العمال (ك)	مجموع الأجور (س×ك)	انحراف الاجر عن ٤٠ (ح)	ح × ك
٢٥	١٠	٢٥٠	— ١٥	— ١٥٠
٣٠	٢٠	٦٠٠	— ١٠	— ٢٠٠
٣٥	٢٥	٨٧٥	— ٥	— ١٢٥
٤٠	٣٠	١٢٠٠	٠	٠
٤٥	١٠	٤٥٠	٥	٥٠
٥٠	٥	٢٥٠	١٠	٥٠
المجموع	١٠٠	٣٦٢٥		١٠٠ — ٤٧٥ = — ٣٧٥

ا — مجموع أجور العمال = مجـ س × ك = ٣٦٢٥ قرشا

ب — مجموع أجور العمال = ٤٠ × ١٠٠ — ٣٧٥

= ٤٠٠٠ — ٣٧٥ = ٣٦٢٥

س	ك	ح	حَ = ح/٥	حَ×ك
٢٥	١٠	— ١٥	— ٣	— ٣٠
٣٠	٢٠	— ١٠	— ٢	— ٤٠
٢٥	٢٥	— ٥	— ١	— ٢٥
٤٠	٣٠	٠	٠	
٤٥	١٠	٥	١	١٠
٥٠	٥	١٠	٢	١٠
المجموع	١٠٠			٢٠ — ٩٥ = — ٧٥

حـ — مجموع أجور العمال = ٤٠ × ١٠٠ — ٧٥ × ٥ = ٣٦٢٥

(ء) مجـ س × ك = ١٠٠ × الوسط الفرضى + مجـ ح × ك

أو = ١٠٠ × الوسط الفرضى + (مجـ ح َ × ك) × ٥

تمارين ٥ ص ٦٦

النهـايات

(١) ١ (٢) ١ (٣) ١

(٤) $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$

∴ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} (س + ٣) = ٦$

(٥) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٢ + ٤س - ١٢}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س + ٦)(س - ٢)}{س - ٢}$

$= ٢ + ٦ = ٨$

تمـارين ٧ ص ١١١

التباديل والتوافيق

(١) $^{٩}ل_{٣} = ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤$

$٧! = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥٠٤٠$

$^{١٠}ق_{٣} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٢٠$

$${}^{١٠}ق_{٧} = {}^{١٠}ق_{٣} = ١٢٠$$

$${}^{٥}ق_{١} = ٥ \quad ، \quad {}^{٥}ق_{٥} = ١ \quad ، \quad {}^{٥}ق_{٠} = {}^{٥}ق_{٥} = ١$$

(٢) الطرف الأيمن $= \frac{١}{٦!} + \frac{٦}{٦!} + \frac{٦ \times ٥}{٦!} = \frac{١ + ٦ + ٣٠}{٦!}$

$$= \frac{٣٧}{٦!}$$

(٣) $${}^{٩}ق_{٣} + {}^{٩}ق_{٢} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧}{٣ \times ٢ \times ١} + \frac{٩ \times ٨}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٩ \times ٨ \times ٧ + ٣ \times ٩ \times ٨}{٦}$$

$$= \frac{٩ \times ٨ \, (٧ + ٣)}{٦} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٣ \times ٢ \times ١}$$

$$= {}^{١٠}ق_{٣}$$

(٤) عدد الكلمات الممكن تكوينها من حرف الكلمة سوهاج يساوى

(أولا) $٥! = ١٢٠$ (ثانيا) ${}^{٥}ل_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

(٥) من حروف الكلمة سوهاج يمكن تكوين $٥! = ١٢٠$ تبديلا .

ومن هذه التبديلات $٣! = ٦$ يبدأ بالمقطع « ها »

« $٣! = ٦$ ينتهى بحرفى العلة .

(٦) عدد الطرق المطلوبة $= {}^{٢٠}ل_{٤} \times {}^{١٥}ل_{٣}$

$$= (٢٠ \times ١٩ \times ١٨ \times ١٧) \times (١٥ \times ١٤ \times ١٣)$$

(٧) عدد الطرق $= {}^{19}\text{ل}_{3} \times {}^{14}\text{ل}_{2}$

(٨) (أولا) إذا كانت اللجنة تحتوى على ٤ رجال وسيدتين يكون عدد الطرق مساويا ${}^{15}\text{ق}_{4} \times {}^{5}\text{ق}_{1}$

وإذا كانت اللجنة تحتوى على ٥ رجال وسيدة فإن عدد الطرق يساوى ${}^{15}\text{ق}_{5} \times {}^{5}\text{ق}_{2}$

وإذا كانت اللجنة تحتوى على ٦ رجال فان عدد الطرق يساوى ${}^{16}\text{ق}_{6}$

وعدد الطرق كلها يساوى مجموع النتائج السابقة

(ثانيا) تحتوى اللجنة على

(رجل معين) + ٣ رجال آخرين + (سيدة معينة) + سيدة أخرى

أو (رجل معين) + ٤ رجال آخرين + (سيدة معينة)

فيكون عدد الطرق الممكنة مساويا

$$\left({}^{14}\text{ق}_{3} \times {}^{4}\text{ق}_{1} \right) + {}^{14}\text{ق}_{4}$$

تمارين ٨ ص ١٢١

مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب

(١) (أولا) $\text{س}^{6} - 16\,\text{س}^{5} + 15\,\text{أ}^{2}\,\text{س}^{4} - 20\,\text{أ}^{3}\,\text{س}^{3} + 15\,\text{أ}^{4}\,\text{س}^{2}$
$- 6\,\text{أ}^{5}\,\text{س} + \text{س}^{6}$

(ثانيا) $\text{س}^{4} + 4 \times 3\,\text{س}^{3} + 6 \times 3^{2}\,\text{س}^{2} + 4 \times 3^{3}\,\text{س} + 3^{4}$

$$= \text{س}^{4} + 12\,\text{س}^{3} + 54\,\text{س}^{2} + 108\,\text{س} + 81$$

(ثالثا) $(٣م)^{٥} - ٥ \times ٢ \times (٣م)^{٤} + ١٠ \times ٢^{٢} \times (٣م)^{٣} =$

$١٠ \times ٢^{٣} \times (٣م)^{٢} + ٥ \times ٢^{٤} \times (٣م) - ٢^{٥}$

$= ٢٤٣م^{٥} - ٨١٠م^{٤} + ١٠٨٠م^{٣} - ٧٢٠م^{٢} + ٢٤٠م - ٣٢$

(٢) $ح_{٥} = ق^{٨}_{٤} \left(\frac{١}{س}\right)^{٤} س^{٤}$

$$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$$

$= ٧٠$

(٣) $ح_{ر+١} = ق^{٨}_{ر} \left(-\frac{١}{س}\right)^{ر} (س)^{٨-٢ر}$

$= (-١)^{ر} \times ق^{٨}_{ر} \times س^{٨-ر}$

فلكى يكون الحد خاليا من س يلزم أن تكون $٨ - ٢ر = ٠$

أى $ر = ٤$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو $ح_{٥} = ٧٠$

(٥) <u>أولا</u> :

$ح_{٨} = ق^{١٠}_{٧} \left(-\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٧} (٢ س)^{٨}$

$ح_{٩} = ق^{١٠}_{٨} \left(-\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٨} (٢ س)^{٧}$

ثانيا : $ح_{٥} = ق^{٨}_{٥} \left(\frac{١}{س}\right)^{٥} س^{٣} = ق^{٨}_{٣} \times \frac{١}{س^{٢}}$

تمارين ٩ ص ١٢٩

مفكوك ذات الحدين بأى أس

(١) $$(١ + س)^{\frac{١}{٣}} = ١ + \frac{١}{٣} س + \frac{\frac{١}{٣}(\frac{١}{٣} - ١)}{١ \times ٢} س^{٢}$$

$$+ \frac{\frac{١}{٣}(\frac{١}{٣} - ١)(\frac{١}{٣} - ٢)}{١ \times ٢ \times ٣} س^{٣} \ldots$$

$$= ١ + \frac{١}{٣} س - \frac{١}{٩} س^{٢} + \frac{٥}{٨١} س^{٣} \ldots$$

ويكون المفكوك صحيحا إذا كانت $|س| < ١$.

(٢) $$(١ - س)^{\frac{١}{٢}} = ١ + \frac{١}{٢}(-س) + \frac{\frac{١}{٢}(\frac{١}{٢} - ١)}{١ \times ٢}(-س)^{٢}$$

$$+ \frac{\frac{١}{٢}(\frac{١}{٢} - ١)(\frac{١}{٢} - ٢)}{١ \times ٢ \times ٣}(-س)^{٣} \ldots$$

$$= ١ - \frac{١}{٢} س - \frac{١}{٨} س^{٢} - \frac{١}{١٦} س^{٣} \ldots$$

ويكون المفكوك صحيحا عندما $|س| < ١$.

(٣) $$(١ - س)^{-\frac{١}{٢}} = ١ - \frac{١}{٢}(-س) = ١ + \frac{١}{٢} س \ldots$$

ويكون المفكوك صحيحا عندما $|س| < ١$.

(٤) $\sqrt{٠٫٩٧} = (١ - ٠٫٠٣)^{\frac{١}{٢}}$

$$= ١ + \tfrac{١}{٢}(-٠٫٠٣) + \frac{\frac{١}{٢}(\frac{١}{٢}-١)}{٢ \times ١}(-٠٫٠٣)^{٢}$$

$$\frac{\frac{١}{٢}(\frac{١}{٢}-١)(\frac{١}{٢}-٢)}{٣\times٢\times١}(-٠٫٠٣)^{٣} \ldots$$

$$= ١ - ٠٫٠١٥ - \tfrac{١}{٨} \times ٠٫٠٠٠٩ - \tfrac{١}{١٦} \times ٠٫٠٠٠٠٢٧ \ldots$$

$$= ١ - ٠{,}٠١٥$$

$$- ٠{,}٠٠٠١٢٥$$

$$- ٠{,}٠٠٠٠٠١٦٩$$

$$= ١ - ٠{,}٠١٥١٢٦٦٩ = ٠{,}٩٨٤٨٧٣٣١$$

$= {,}٩٨٤٨٧$ مقربا إلى خمسة أرقام عشرية

(٥) $$(١+\text{س})^{\frac{٢}{٥}} = ١ + \tfrac{٢}{٥}\text{س} + \frac{\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٢}}{٢ \times ١}\text{س}^{٢} + \frac{\frac{٥}{٢}\times\frac{٣}{٢}\times\frac{١}{٢}}{٣\times٢\times١}\text{س}^{٣} \ldots$$

$$= ١ + \tfrac{٥}{٢}\text{س} + \tfrac{١٥}{٨}\text{س}^{٢} + \tfrac{٥}{٢٦}\text{س}^{٣} \ldots)$$

$$\therefore (١ - \text{س})^{\frac{٥}{٢}} = ١ - \tfrac{٥}{٢}\text{س} + \tfrac{١٥}{٨}\text{س}^{٢} - \tfrac{٥}{١٦}\text{س}^{٣} \ldots)$$

بالطرح

$$(١+\text{س})^{\frac{٥}{٢}} - (١ - \text{س})^{\frac{٥}{٢}} = ٢(\tfrac{٥}{٢}\text{س} + \tfrac{٥}{١٦}\text{س}^{٣} \ldots$$

$$= ٥\text{س} + \tfrac{٥}{٨}\text{س}^{٣} \ldots$$

(٦) $\sqrt{١,٠٢٥} = (١ + ٠,٠٢٥)^{\frac{١}{٢}}$

$$= ١ + \tfrac{١}{٢} \times ٠,٠٢٥ + \frac{\frac{١}{٢}(\frac{١}{٢}-١)}{١ \times ٢}(٠,٠٢٥)^{٢}$$

$$\frac{\frac{١}{٢}(\frac{١}{٢}-١)(\frac{١}{٢}-٢)}{١ \times ٢ \times ٣}(٠,٠٢٥)^{٣}$$

والجواب ١,٠١٢

(٧) الحد الأوسط هو $ح_{٧} = ق^{١٢}_{٦} (٣)^{٦} س^{٦}$

تمارين ١٠ ص ١٤٣

المتسلسلة الأسية والمتسلسلة اللوغاريتمية

(١) $هـ^{٢س} = ١ + \frac{٢س}{١!} + \frac{(٢س)^{٢}}{٢!} + \frac{(٢س)^{٣}}{٣!} + \frac{(٢س)^{٤}}{٤!} + \cdots$

$$هـ^{-٢س} = ١ - \frac{٢س}{١!} + \frac{(٢س)^{٢}}{٢!} - \frac{(٢س)^{٣}}{٣!} - \frac{(٢س)^{٤}}{٤!} + \cdots$$

بالجمع

$$هـ^{٢س} + هـ^{-٢س} = ٢\left(١ + \frac{٤س^{٢}}{٢!} + \frac{١٦س^{٤}}{٤!} + \cdots\right)$$

(٢) $هـ^{٣س} = ١ + \frac{٣س}{١!} + \frac{(٣س)^{٢}}{٢!} + \frac{(٣س)^{٣}}{٣!} + \frac{(٣س)^{٤}}{١} +$

$$\text{هـ}^{-\text{٣س}} = \text{١} - \frac{\text{٣س}}{\text{١}!} + \frac{(\text{٣س})^{\text{٢}}}{\text{٢}!} - \frac{(\text{٣س})^{\text{٣}}}{\text{٣}!} + \frac{(\text{٣س})^{\text{٤}}}{\text{٤}} - $$

بالطــــرح

$$\text{هـ}^{\text{٣س}} - \text{هـ}^{-\text{٣س}} = \text{٢}\left(\frac{\text{٣}}{\text{١}!}\,\text{س} + \frac{\text{٢٧}}{\text{٣}!}\,\text{س}^{\text{٣}} + \frac{\text{٢٤٣}}{\text{٥}!}\,\text{س}^{\text{٥}} + \cdots\right)$$

$$(\text{٣})\quad \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{١}+\text{س}) = \text{س} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} - \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} \cdots\cdots$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(-\text{س}) = -\text{س} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} - \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} \cdots\cdots$$

بالطــــرح

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{١}+\text{س})\ \ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{١}-\text{س}) = \text{٢}\left(\text{س} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٥}}}{\text{٥}} + \cdots\right)$$

مع ملاحظة أن الطرف الأيمن $= \text{لو}_{\text{هـ}} \dfrac{\text{١}+\text{س}}{\text{١}-\text{س}}$

بوضع س $= \dfrac{\text{١}}{\text{هـ}}$ نجد أن

$$\frac{\text{١}+\text{س}}{\text{١}-\text{س}} = \frac{\text{١}+\frac{\text{١}}{\text{هـ}}}{\text{١}-\frac{\text{١}}{\text{هـ}}} = \frac{\text{هـ}+\text{١}}{\text{هـ}-\text{١}}$$

وحيث أن:

$$\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١ + \text{س}}{١ - \text{س}} = ٢ \left(\text{س} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \cdots \right)$$

$$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{هـ} + ١}{\text{هـ} - ١} = ٢ \left[\frac{١}{\text{هـ}} + \frac{١}{٣} \left(\frac{١}{\text{هـ}} \right)^{٣} + \frac{١}{٥} \left(\frac{١}{\text{هـ}} \right)^{٥} + \cdots \right]$$

$$(٤) \quad \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٣ + ١}{٣ - ١} = ٢ \left[\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} \left(\frac{١}{٣} \right)^{٣} + \frac{١}{٥} \left(\frac{١}{٣} \right)^{٥} + \cdots \right]$$

$$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٤}{٢} = ٢ \left[\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{١٥١٢} + \cdots \right]$$

$$= ٢ \left(٠٫٣٣٣٣٣٣ + ٠٫٠١٢٥٥٧ + ٠٫٠٠٠٨٢٣ \cdots \right)$$

$$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ = ٠٫٦٩٣٢٢٦$$

$$\text{لو}_{١٠} ٢ = ٠٫٤٣٤٢٩ \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٢$$

$$= ٠٫٤٣٤٢٩ \times ٠٫٦٩٣٢٢٦$$

$= ٠٫٣٠١٠$ مقربا إلى أربعة أرقام عشرية .

وهذا الجواب يتفق مع جـــداول اللوغاريتمات المعتادة .

$$(٥) \quad \text{لو}_{\text{هـ}} ٨ = \text{لو}_{\text{هـ}} ٢^{٣} = ٣ \ \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ = ٣ \times ٠٫٦٩٣٢٢٦$$

$$= ٢٫٠٧٩٦٧٨$$

بوضع م = ١٠ ؛ ن = ٨ فى المتساوية ٢١ (ص ٢١١) نجد أن

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\ ١٠ = ٢ \left[\frac{٢}{١٨} + \frac{١}{٣}\left(\frac{٢}{١٨}\right)^{٣} + \frac{١}{٥}\left(\frac{٢}{١٨}\right)^{٥} + \cdots \right]$$

∴ لو$_{\text{هـ}}$ ١٠ − لو$_{\text{هـ}}$ ٨ = ٠٫٢٢٢٤٥٢ (بالاختصار)

∴ لو$_{\text{هـ}}$ ١٠ = ٢٫٠٧٩٦٧٨ + ٠٫٢٢٢٤٥٢ = ٢٫٣٠٢١٣٠

∴ ١ ÷ لو$_{\text{هـ}}$ ١٠ = $\frac{١}{٢٫٣٠٢١٣٠}$ = ٠٫٤٣٤٣ مقربة إلى أربعة أرقام عشرية .

تمارين ١١ ص ١٧٠

المحددات

(١)

ا — قيمة المحدد = ٥ $\begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix}$ - (-١) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٧ \end{vmatrix}$

= ٥ (-٨ - ٧) + (-٦ - ٢) + (٢١ - ٨)

= -٧٥ - ٨ + ١٣

= -٧٠

ب — الصف الأول به عامل مشترك ٣

« الثانى « « « ٧

« الثالث « « « ١١

قيمة المحدد $= ٣ \times ٧ \times ١١ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$$= ٢٣١ \left[\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \right]$$

$$= ٢٣١ \left[(٣-٤) - (٣-٢) + (٢-١) \right]$$

$$= ٢٣١ \left[(-١) - (١) + (١) \right]$$

$$= ٢٣١ \times -١ = -٢٣١$$

حـ ـ قيمة المحدد $= ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$

$$= ٢ (٤-١) + (-٦-١) + ٣ (-٣-٢)$$

$$= ٢ \times ٣ - ٧ + ٣ \times (-٥) = ٦-٧-١٥ = -١٦$$

(٢) $\triangle = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & -٢ & -١ \\ ٢ & -٣ & ١ \end{vmatrix}$

$$= -١٦$$

$$= ٣ \begin{vmatrix} -٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٧ & ١ & ٢ \\ -١ & -٢ & -١ \\ ٤ & -٣ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٧ \begin{vmatrix} -٢ & -١ \\ -٣ & ٤ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} + ٤ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٧(-٢-٣) + ١ \times ٧ + ٤ \times ٣$$

$$= -٣٥ + ٧ + ١٢$$

$$= -١٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & ٧ & ٢ \\ ١ & -١ & -١ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٣ \begin{vmatrix} -١ & -١ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ -١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(-١+٤) - ١(٧-٨) + ٢(-٧+٢)$$

$$= ٣ \times ٣ - (-١) + ٢ \times (-٥)$$

$$= ٩ + ١ - ١٠ = \text{صفر}$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٧ \\ ١ & -٢ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= ٣ \begin{vmatrix} -٢ & -١ \\ -٣ & ٤ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ١ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٧ \\ -٢ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(-٨-٣) - (٤ + ٢١) + ٢(-١ + ١٤)$$

$$= (٣ \times -١١) - ٢٥ + ٢ \times ١٣$$

$$= -٣٣ - ٢٥ + ٢٦ = -٣٢$$

$$\therefore س = \frac{-١٦}{-١٦} = ١ \qquad ، \quad ص = \frac{صفر}{-١٦} = صفر$$

$$ع = \frac{-٣٢}{-١٦} = ٢$$

(٣)

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & -١ & -٢ \\ ٣ & -٥ & ٦ \end{vmatrix}$$

$$= ١\begin{vmatrix} -١ & -٢ \\ -٥ & ٦ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٥ & ٦ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & -٢ \end{vmatrix}$$

$$= (-٦-١٠) - ٢(٦ + ١٠) + ٣(-٢ + ٢)$$

$$= (-١٦) - (٢ \times ١٦) + (٣ \times ٠)$$

$$= -١٦ - ٣٢ + ٠ = -٤٨$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٣ & -١ & -٢ \\ -٨ & -٥ & ٦ \end{vmatrix}$$

$$= صفر \begin{vmatrix} -١ & -٢ \\ -٥ & ٦ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٥ & ٦ \end{vmatrix} + (-٨)\begin{vmatrix} ١ & \\ -١ & - \end{vmatrix}$$

$$= \text{صفر}(-٦-١٠) - ٣(٦+١٠) - ٨(-٢+٢)$$

$$= \text{صفر}(-١٦) - (٣ \times ١٦) - ٨(\text{صفر})$$

$$= \text{صفر} - ٤٨ - \text{صفر} = -٤٨$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٣ & -٢ \\ ٣ & -٨ & ٦ \end{vmatrix}$$

$$= ١\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ -٨ & ٦ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ -٨ & ٦ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix}$$

$$= (١٨-١٦) - ٢(٠+١٦) + ٣(٠-٦)$$

$$= ٢ - ٣٢ - ٣٨ = -٤٨$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ٣ & -٥ & -٨ \end{vmatrix}$$

$$= ١\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ -٥ & -٨ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ -٥ & -٨ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= (٨+١٥) - ٢(-٨-٠) + ٣(٣-٠)$$

$$= ٢٣ + ١٦ + ٩ = ٤٨$$

والجواب : $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ١$ ، $\text{ع} = -١$

(٤) بطرح الصف الأول من الصف الثاني . وبطرح الصف الثاني من الصف الثالث ينتج أن

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٣-٩ & ٢-٤ & ٥-٧ \\ ٩-١٥ & ٤-٦ & ٧-٩ \end{vmatrix} = \quad \text{المحدد}$$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٦ & ٢ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} =$$

∴ الصفان (٢) ، (٣) متطابقان

∴ المحدد = صفراً .

(٥)

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٩ & ٧ \end{vmatrix} ٦ + \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ١٥ & ٩ \end{vmatrix} م - \begin{vmatrix} ٩ & ٧ \\ ١٥ & ٩ \end{vmatrix} ٢ = \quad \text{المحدد}$$

$$(٢١-٤٥)٦ + (٢٧-٧٥)م - (٨١-١٠٥)٢ =$$

$$م ٤٨ - ١٩٢ = ١٤٤ + م ٤٨ - ٤٨ =$$

$$\text{صفر} = م ٤٨ - ١٩٢ \therefore$$

$$٤ = \frac{١٩٢}{٤٨} = م \therefore$$

(٦)

المعادلات بعد ترتيب حدودها هى :

$$-\text{س} - ٢\,\text{ص} + \text{ع} = -٣$$
$$٥\,\text{س} - \text{ص} - \text{ع} = \text{صفر}$$
$$-٢\,\text{س} + ٤\,\text{ص} - \text{ع} = ٣$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} -١ & -٢ & ١ \\ ٥ & -١ & -١ \\ -٢ & ٤ & -١ \end{vmatrix} = -١ \quad \text{بالاختصار}$$

$$\triangle_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٢ & -٢ & ١ \\ ٠ & -١ & -١ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{vmatrix} = -١ \quad \text{بالاختصار}$$

$$\triangle_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} -١ & -٢ & ١ \\ ٥ & ٠ & -١ \\ -٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = -٢ \quad \text{بالاختصار}$$

$$\triangle_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} -١ & -٢ & -٢ \\ ٥ & -١ & ٠ \\ -٢ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -٣ \quad \text{بالاختصار}$$

الأجوبة س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

تمارين ١٣ ص ٢٠٠

القطع المكافىء

والقطع الزائد القائم

(١) أولا : ص = -٣ س — ٤

س	-٣	-٢	-١	٠	١
ص	٥	٢	-١	-٤	-٧

والمنحنى خط مستقيم

ثانيا : التصويب ص = ٢ س^{٢}

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	
ص	١٨	٨	٢	٠	٢	٨	١٨	

والمنحنى قطع مكافىء رسهعند نقطة الأصل وموجود بأكله فوق محور السينات

ثالثا : ص = — ٣ س^{٢}

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	
ص	-٢٧	-١٢	٣	٠	-٣	-١٢	-٢٧	

والمنحنى قطع مكافىء رأسه عند نقطة الأصل وموجود بأكله تحت محور السينات

رابعاً : ص = $\frac{٤}{س}$

س	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	-٠,١	١	٢	٣	٤	٥
ص	-٠,٨	-١	-١,٣	-٢	-٤	-٤٠	٤	٢	١,٣	١	٠,٨

والمنحنى قطع زائد قائم فرعاه فى الربعين الأول والثالث .

(٢) المعادلة ص + ١ = ٢ (س - ٢)^{٢} تصبح صہ = ٢سہ^{٢}

(٣) المعـادلة ص = $\frac{٥}{س + ٤}$ تصبح صہ = $\frac{٥}{سہ}$

(٤) المعادلة ص = ٢ − ٤ س + س^{٢}

هى ص = س^{٢} - ٤ س + ٤ - ٢

= (س - ٢)^{٢} - ٢

أى ص + ٢ = (س - ٢)^{٢}

وبنقل نقطة الأصل إلى النقطة (٢ ، - ٢) فإن المعادلة تصبح

صہ = سہ^{٢}

(٥) المعادلة ص - ٦ = $\frac{٢}{س + ٥}$ تصبح صہ = $\frac{٢}{سہ}$

تمارين ١٧ ص ٢٦٢

التفاضل

١ — (أولا) $\frac{ى}{ى س}$ (٥ س^{٢}) = ٥ × ٢ س$^{٢ - ١}$ = ١٠ س

(ثانيا) $\frac{ى}{ى س}$ ($\frac{١}{س}$) = $\frac{ى}{ى س}$ (س$^{-١}$) = − ١ س$^{-١ - ١}$

= - ١ س$^{- ٢}$ = - $\frac{١}{س^{٢}}$

٢ — (أولا) $\frac{ى}{ى س}$ (٥ س^{٣} - ٤ س^{٢} + س - ٧)

$$= ٥ \times ٣ س^{٣-١} - ٤ \times ٢ س^{٢-١} + ١ - ٠$$

$$= ١٥ س^{٢} - ٨ س + ١ \quad .$$

(ثانيا) $\frac{ى}{ىس}\left[(س^{٣} + ٥ س^{٢})(٦ س^{٥} - ٤ س^{٤})\right]$

$$= (س^{٣} + ٥ س^{٢}) \cdot \frac{ى}{ىس}(س^{٥} - ٤ س^{٤})$$

$$+ (٦ س^{٥} - ٤ س^{٤}) \cdot \frac{ى}{ىس}(س^{٣} + ٥ س^{٣})$$

$$= (س^{٣} + ٥ س^{٢})(٣٠ س^{٤} - ١٦ س^{٣})$$

$$+ (٦ س^{٥} - ٤ س^{٤})(٣ س^{٢} + ١٠ س)$$

(ثالثا) $\frac{ىص}{ىس} = \frac{ى}{ىس}\left[(٢س+١)(٣س+٢)(٤س+٣)\right]$

$$= (٣س+٢)(٤س+٣) \cdot \frac{ى}{ىس}(٢س+١)$$

$$+ (٢س+١)(٤س+٣) \cdot \frac{ى}{ىس}(٣س+٢)$$

$$+ (٢س+١)(٣س+٢) \cdot \frac{ى}{ىس}(٤س+٣)$$

$$= ٢(٣س+٢)(٤س+٣) + ٣(٢س+١)(٤س+٣)$$

$$+ ٤(٢س+١)(٣س+٢)$$

(رابعا) $\frac{ى}{ىس} \frac{٢س - ٥}{٢س + ١}$

$$= \frac{٢\,(٣س+١)-٣\,(٢س-٥)}{(٣س+١)^{٢}}$$

(خامساً) $\frac{ى}{ىس}\,(٤س^{٣}-٣س+٦)^{٥}$

$$= ٥\,(٤س^{٣}-٣س+٦)^{٤}\cdot(١٢س^{٢}-٣)$$

(سادسا) $\frac{ى}{ىس}\sqrt{٢س^{٥}+٣}=\frac{١}{٢\sqrt{٢س^{٥}+٣}}\times ١٠س^{٤}$

(سابعا) $\frac{ى}{ىس}\left(هـ^{٣س+١}+هـ^{٣س-١}\right)$

$$=٣هـ^{٣س+١}-٢هـ^{٣س-١}$$

(ثامنا) $\frac{ى}{ىس}\,لو_{هـ}(س^{٢}-٣س+٥)=\frac{٢س-٣}{س^{٢}-٣س+٥}$

٢ - نفرض أن الدالة = ص

$$لو\,ص = لو\,(٤س-٥)+\tfrac{١}{٢}\,لو\,(٣س+١)$$

بأخذ المعامل التفاضلى الأول بالنسبة إلى س لكل من الطرفين ينتج أن

$$\frac{١}{ص}\cdot\frac{ىص}{ىس}=\frac{٤}{٤س-٥}+\frac{٣}{٢\,(٣س+١)}$$

وبضرب كل من الطرفين فى ص ينتج أن

$$\frac{ء ص}{ء س} = (٤ س - ٥) \sqrt{٣ س + ١} \left[\frac{٤}{٤ س - ٥} + \frac{٣}{٢(٣ س + ١)} \right]$$

(٤) المشتقة الأولى = ٣ س^{٢} وهى موجبة دائما فيكون منحنى الدالة صاعدا دائما .

(٥) صَ = ٤ س^{٣} = + عند ما س > ٠

، = − « « س < ٠

= ٠ « « س = ٠

فيكون المنحنى صاعدا فى إلى يمين محور الصادات

نازلا « يسار « «

أفقيا عند ما س = ٠ .

تمارين ١٨ ص ٢٧٤

النهايات العظمى والصغرى

(١) (أولا) $\frac{ء ص}{ء س}$ = − ٤ س .·. $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ عندما س = ٠

عندما س تكون أقل من صفر نجد أن ص سالبة ، وعندما س تكون أكبر من الصفر تكون ص سالبة .

.·. هناك نهاية عظمى للدالة عند س = ٠

(ثانيا) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٨ \text{ س}$ ∴ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٠$ عندما $\text{س} = ٠$

عندما س تكون أقل من صفر أو أكبر من صفر تكون ص موجبة

∴ هناك نهاية صغرى للداله عند $\text{س} = ٠$

(ثالثا) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٤ - ٢ \text{ س}$ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٠$ عندما $\text{س} = ٠$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = +$ إذا كانت $\text{س} < ٢$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = -$ إذا كانت $\text{س} > ٢$

∴ توجد نهاية عظمى للدالة عند $\text{س} = ٢$

(رابعا) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٢ \text{ س} - ٢$ $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٠$ عندما $\text{س} = ١$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = -$ إذا كانت $\text{س} < ٢$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = +$ إذا كانت $\text{س} > ٢$

∴ توجد نهاية صغرى للدالة عند $\text{س} = ١$

(٢) (أولا) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٣ \text{ س}^٢ - ٣$ (١)

$$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = ٦ س \qquad (٢)$$

من (١) ∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ٣ (س^٢ - ١)$

$$= ٣ (س - ١) (س + ١)$$

$\frac{ص}{ء س} = ٠$ عندما س = ١ أ ، س = - ١

من (٢) ينتج أن

$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = +$ إذا كانت س = ١

$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = -$ إذا كانت س = - ١

∴ هناك نهاية صغرى للدالة عند س = ١

، نهاية عظمى للدالة عند س = - ١

(ثانيا) $\frac{ء ص}{ء س} = ٦ س^٢ - ١٨ س + ١٢ \qquad (١)$

$$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = ١٢ س - ١٨ \qquad (٢)$$

من (١) $\frac{ء ص}{ء س} = ٦ (س^٢ - ٣ س + ٢)$

$$= ٦ (\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)$$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٠$ عندما س = ١ أو س = ٢

(٢) ينتج أن

$\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}} = +$ عندما س = ٢

$\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}} = -$ عندما س = ١

توجد نهاية صغرى للدالة عندما س = ٢

« « عظمى « « س = ١

(ثالثا) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٦ \text{س}^{٢} - ٦ \text{س}$ (١)

$\frac{\text{ى}^{٢}\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}} = ١٢ \text{س} - ٦$ (٢)

من (١) $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٦ \text{س} (\text{س} - ١)$

$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٠$ عندما س = ١ أو س = ٠

من (٢) ينتج أن

$\frac{ى^{2} ص}{ى س^{2}} = +$ عندما س = ١

$= -$ عندما س = ٠

∴ توجد نهاية صغرى للدالة عندما س = ١

ونهاية عظمى للدالة عندما س = ٠

(رابعا) $\frac{ى ص}{ى س} = ٧ - ٤ س$ (١)

$\frac{ى^{2} ص}{ى س^{2}} = - ٤$ (٢)

وتوجد نهاية عظمى عندما س = $\frac{٧}{٤}$

تمارين ١٩ ص ٢٨٩

التفاضل الجزئى

(١)

أولا : د (٠ ، ٠) = (٠)^{2} - ٢ (٠ × ٠) + ٥ (٠)^{2} = ٠

ثانيا : د (٣ ، - ١) = (٣)^{2} - ٢ (٣) × (- ١) + ٥ (- ١)^{2} = ٢٠

ثالثا : د (- ١ ، ٢) = (- ١)^{2} - ٢ (- ١) × ٢ + ٥ (٢)^{2} = ٢٠

(٢) أولا : د (- ١ ، ١ ، ٥) = (- ١ + ١) [(- ١)^{2} - (- ١) × ١ + (٥)^{2}]

= صفر

ثانيا : $د(٠ ، ١ ، ٢) = (٠ + ١)\left[(٠)^{٣} - ٠ \times ١ + (٢)^{٢}\right]$

$$= ١(٠ - ٠ + ٤)$$

$$= ٤$$

(٣) $\frac{\partial ع}{\partial س} = ٣س^{٢} + ٠ + ٥ص^{٢}$

$$\frac{\partial ع}{\partial ص} = ٠ + ٣ص^{٢} + ٥ \times ٢س ص$$

(٤) $\frac{\partial ع}{\partial أ} = ٣\left[س^{٢} + ص^{٢} - أ(س + ص - ع)\right]^{٢} \times \left[-(س + ص - ع)\right]$

(٥) $\frac{\partial ع}{\partial م} = ٢(٢م + ح - ٣) \times ٢ + ٢(٤م + ح - ٥) \times ٤$

$$+ ٢(٦م + ح - ٧) \times ٦$$

$$\frac{\partial ع}{\partial ح} = ٢(٢م + ح - ٣) + ٢(٤م + ح - ٥)$$

$$+ ٢(٦م + ح - ٧)$$

(٦) نفرض أن $ع = س^{٢} + ص^{٢}$

$$\frac{\partial ع}{\partial س} = ٢س$$

$$، \quad \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ص}} = ٢\,\text{ص}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{س}} = \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ص}} = ٠ \quad \text{عندما س} = \text{ص} = ٠$$

∴ النهايات العظمى والصغرى للدالة، إن وجدت، تكون عندما س = ص = ٠

وواضح أن الدالة تكون عندئذ نهاية صغرى (لأنه فيما عدا ذلك لابد أن تكون الدالة موجبة حيث أنها مجموع مربعين) .

(٧) نفرض أن الدالة = ى

$$\frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{س}} = ٢\,(\text{س} + ١)$$

$$\frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{ص}} = ٢\,(\text{ص} - ٢)$$

$$\frac{\text{ى}}{\partial \text{ع}} = ٢\,(\text{ع} - ١)$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ى}}{\partial \text{س}} = \frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{ع}} = ٠ \quad \text{عندما}$$

$$\text{س} = -١ \,،\, \text{ص} = ٢ \,،\, \text{ع} = ١$$

والنهايات الصغرى والعظمى إن وجدت تكون عندما تتحقق هذه القيم .
وبمثل المناقشة فى التمرين السابق نجد أن للدالة نهاية صغرى عند هذه القيمة .

تمارين ٢٠ ص ٣٠٢

توفيق خط مستقيم

(١) نفرض أن معادلة المستقيم المطلوب هى

ص = م س + حـ

نوجد قيمتى م، حـ اللتان تجعلان

مجـ ص = م . مجـ س + حـ ن (١)

مجـ س ص = م . مجـ س^{٢} + حـ . مجـ س (٢)

س	ص	س^{٢}	س ص
٣	١٢	٩	٣٦
٥	١٤	٢٥	٧٠
٧	١٩	٤٩	١٣٣
٩	٢٢	٨١	١١٨
٢٤	٦٧	١٦٤	٤٣٧

∵ ن = ٤ بالتعويض فى (١) ، (٢)

∴ ٦٧ = ٢٤ م + ٤ حـ (٣)

٤٣٧ = ١٦٤ م + ٢٤ حـ (٤)

بضرب المعادلة (٣) فى ٦٥ ، (٤) فى ١٥ ثم الطرح .

٤٠٢ = ١٤٤ م + ٢٤ حـ

٤٢٧ = ١٦٤ م + ٢٤ حـ

٣٥ = ٢٠ م

∴ م = ٣٥ ÷ ٢٠ = ١٫٧٥

بالتعويض فى المعادلة (٢) عن قيمة م

٦٧ = (٢٤ × ١٫٧٥) + ٤ حـ

٦٧ = ٤٢ + ٤ حـ

٦٧ − ٤٢ = ٤ حـ

∴ حـ = ٢٥ ÷ ٤ = ٦٫٢٥

المعادلة المطلوبة هى

ص = ١٫٧٥ س + ٦٫٢٥

(٢) نفرض أن معادلة المستقيم المطلوب هى

ص = م س + حـ

نوجد قيمتى م ، حـ اللتان تجعلان

مجـ ص = م . مجـ س + حـ ن (١)

مجـ س ص = م . مجـ س٢ + حـ . مجـ س (٢)

س	ص	س٢	س ص
٨	٤	٦٤	٣٢
١٥	٢٦	٢٢٥	٣٩٠
٢٢	٤٥	٤٨٤	٩٩٠
١٩	٣٧	٣٦١	٧٠٣
١٣	١٧	١٦٩	٢٢١
٢٠	٤٥	٤٠٠	٩٠٠
١٧	٣١	٢٨٩	٥٢٧
١٢	١٠	١٤٤	١٢٠
٩	١٠	٨١	٩٠
٢٥	٤٥	٦٢٥	١١٢٥
١٦٠	٢٧٠	٢٨٤٢	٥٠٩٨

ن = ١٠ بالتعويض فى (١) ، (٢)

٢٧٠ = ١٦٠ م + ١٠ حـ (٣)

٥٠٩٨ = ٢٨٤٢ م + ١٦٠ حـ (٤)

بضرب المعادلة (٣) × ١٦ ، (٤) × ١ والطرح ينتج أن

٧٧٨ = ٢٨٢ م

م = ٧٧٨ / ٢٨٢ = ٢ر٦٧

بالتعويض فى (٣) ينتج أن حـ = ١ر١٧

∴ المعادلة المطلوبة هى

ص = ٢٫٧٦ س — ١٫٧١

(٣) نفرض أن معادلة المستقيم المطلوب هى

س = م ص + حـ

نوجد قيمتى م ، حـ اللتان تجعلان

مجـ س = م . مجـ ص + حـ ن (١)

مجـ س ص = م . مجـ ص^{٢} + حـ . مجـ ص (٢)

س	ص	ص^{٢}	س ص
٨	٤	١٦	٣٢
١٥	٢٦	٦٧٦	٣٩٠
٢٢	٤٥	٢٠٢٥	٩٩٠
١٩	٣٧	١٣٦٩	٧٠٣
١٣	١٧	٢٨٩	٢٢١
٢٠	٤٥	٢٠٢٥	٩٠٠
١٧	٢١	٩٦١	٥٢٧
١٢	١٠	١٠٠	١٢٠
٩	١٠	١٠٠	٩٠
٢٥	٤٥	٢٠٢٥	١١٢٥
١٦٠	٢٧٠	٩٥٨٦	٥٠٩٨

ن = ١٠   بالتعويض فى (١) ، (٢)

١٦٠ = ٢٧٠ م + ١٠ حـ   (٣)

٥٠٩٨ = ٩٥٨٦ م + ٢٧٠ حـ   (٤)

بضرب (٣) × ٢٧ ، (٤) × ١   والطرح

ينتج أن

٧٧٨ = ٢٢٩٦ م

$$\text{م} = \frac{٧٧٨}{٢٢٩٦} = ٠٫٣٤$$

بالتعويض فى (٣) نجد أن حـ = ٦٫٨٢ ومنها يمكن إيجاد معادلة المستقيم

(٤) نفرض أن معادلة المستقيم المطلوب هى

ص = م س + حـ

نوجد قيمتى م ، حـ اللتان تجعلان

مجـ ص = م . مجـ س + حـ ن   (١)

مجـ س ص = م . مجـ $\text{س}^{٢}$ + حـ مجـ س   (٢)

س	ص	س²	س ص
٧٨	٥٥	٦٠٨٤	٤٢٩٠
٦٥	٦١	٤٢٢٥	٣٩٦٥
٦٣	٥٠	٣٩٦٩	٣١٥٠
٥٥	٥٣	٣٠٢٥	٢٩١٥
٥٣	٣٨	٢٨٠٩	٢٠١٤
٢٤	٣١	٥٧٦	٧٤٤
٤٣	٣٠	١٨٤٩	١٢٩٠
٤٦	٣٥	٢١١٦	١٦١٠
٤٨	٤٧	٢٣٠٤	٢٢٥٦
٥٥	٤٥	٣٠٢٥	٢٤٧٥
٥٣٠	٤٤٥	٢٩٩٨٢	٢٤٧٠٩

ن = ١٠ بالتعويض فى (١) ، (٢)

٤٤٥ = ٥٣٠م + ١٠ ح

٢٤٧٠٩ = ٢٩٩٨٢م + ٥٣٠ ح

وبحل المعادلتين ينتج أن

$$م = \frac{١١٢٤}{١٨٩٢} = ٠ر٥٩٣$$

∴ ح = ١٣ر١

ومنها يمكن كتابة المعادلة المطلوبة

(٥) نفرض أن معادلة المستقيم هى

$$ص = م س + حـ$$

نوجد قيمتى م ، حـ اللتان تجعلان

$$مجـ ص \quad = م . مجـ س + حـ ن \qquad (١)$$

$$مجـ س ص = م . مجـ س^٢ + حـ . مجـ س \qquad (٢)$$

س	ص	س^٢	س ص
١	٥	١	٥
٢	١٣	٤	٢٦
٣	١٦	٩	٤٨
٤	٢٣	١٦	٩٢
٥	٣٣	٢٥	١٦
٦	٣٨	٣٦	٢٢٨
٧	٤٠	٤٩	٢٨٠
٢٨	١٦٨	١٤٠	٨٤٤

ن = ٧ بالتعويض فى المعادلتين (١) ، (٢)

$$١٦٨ = ٢٨ م + ٧ حـ \qquad (٣)$$

$$٨٤٤ = ١٤٠ م + ٢٨ حـ \qquad (٤)$$

بحل المعادلتين ينتج أن

م = ١٤ر٦

حـ = - ٦ر٠

تمارين ٢١ ص ٣١٥

التكامل

(١)

$$\int \text{س}^{3}\, \text{ء س} = \frac{1}{4}\text{س}^{4}$$

ب - $\int \frac{1}{\text{س}^{3}}\, \text{ء س} = \int \text{س}^{-3}\, \text{ء س} = \frac{1}{-3+1}\text{س}^{-3+1}$

$$= \frac{1}{-2}\text{س}^{-2} = -\frac{1}{2\text{س}^{2}}$$

حـ - $\int \sqrt{\text{س}}\, \text{ء س} = \int$

$$= \int \text{س}^{\frac{1}{2}}\, \text{ء س} =$$

$$= \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}$$

ء - $\int \left(\frac{5}{\text{س}} + \frac{3}{\text{س}^{2}}\right) \text{ء س} = \int \frac{5}{\text{س}}\, \text{ء س} + \int \frac{3}{\text{س}^{2}}\, \text{ء س}$

$$= ٥ \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}} + ٣ \int \text{س}^{-٢} \, \text{ءس}$$

$$= ٥ \, \text{لوس} + ٣ \times \frac{١}{-٢ + ١} \, \text{س}^{-٢ + ١}$$

$$= ٥ \, \text{لوس} - ٣ \, \text{س}^{-١} = ٥ \, \text{لوس} - \frac{٣}{\text{س}}$$

(٢)

$$\int (٢\text{س} + ٣)^{٢} \, \text{ءس} = \frac{١}{٢ \times ٣} (\text{س} + ٣)^{٣}$$

$$\int (٤\text{س} - ٢)^{٥} \, \text{ءس} = \frac{١}{٤ \times ٦} (٤\text{س} - ٢)^{٦}$$

$$\int \sqrt{\text{اس} + \text{ب}} \, \text{ءس} = \int (\text{اس} + \text{ب})^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\text{ا}} (\text{اس} + \text{ب})^{\frac{٣}{٢}}$$

$$\int \text{هـ}^{٢\text{س} - ٣} \, \text{ءس} = \frac{١}{٢} \text{هـ}^{٢\text{س} - ٣}$$

(٣)

$$\int \frac{٥\text{س}^{٤} - ٣}{\text{س}^{٥} - ٣\text{س}} \, \text{ءس} = \text{لو} (\text{س}^{٥} + ٣\text{س})$$

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ٧}\,\text{ء س} = \text{لو}\,(\text{هـ}^{\text{س}} + ٧)$$

$$\int \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - ١}\right)\text{ءس}$$

$$= \text{لو س} + \tfrac{١}{٣}\,\text{لو}\,(\text{س} - ١)^{٣}$$

(٤)

$$\int (\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣ + \frac{٤}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^{٦}})\,\text{ء س}$$

$$= \tfrac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣ + ٤\,\text{لو س} + ٥ \times \frac{١}{-٦ + ١}\,\text{س}^{-٦+١}$$

$$= \tfrac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٤\,\text{لو س} - \frac{١}{\text{س}^{٥}}$$

$$\int (٢\sqrt{\text{س}} - \frac{٣}{\sqrt{\text{س}}})\,\text{ء س}$$

$$= ٢ \int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ء س} - ٣ \int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ء س}$$

$$= \tfrac{٤}{٣}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٦\,\text{س}^{\frac{١}{٢}}.$$

(٥)

$$\int \frac{\text{٤س} - ٣}{\text{٢س}^{٢} - \text{٣س} + ١}\, \text{ءس} = \text{لو}\left(\text{٢س}^{٢} - \text{٣س} + ١\right)$$

$$\int \frac{\text{٥س} - ٢}{\text{٥س}^{٢} - \text{٤س} + ٣}\, \text{ءس} = \frac{١}{٢}\int \frac{\text{١٠س} - ٤}{\text{٥س}^{٢} - \text{٤س} + ٣}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\,\text{لو}\left(\text{٥س}^{٢} - \text{٤س} + ٣\right)$$

$$\int \frac{١}{\text{٤س} - ٣}\, \text{ءس} = \frac{١}{٤}\int \frac{٤}{\text{٤س} - ٣}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٤}\,\text{لو}\left(\text{س} - ٣\right) .$$

تمارين ٢٢ ص ٣٢٦

التكامل المحدود

(١) المساحة $= \int_{٠}^{٣} \text{س}^{٢}\, \text{ءس} = \left[\frac{١}{٣}\,\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{٣}$

$$= \left[\frac{١}{٣}\,(٣)^{٢}\right] - \left[\frac{١}{٣}\,(٠)^{٢}\right] = \frac{١}{٣} \times ٢٧ = ٩$$

(٢)

$$\text{ص} = -\,\text{س}^{٢} + \text{٨س} + ١٥)$$

$$= -\left(\text{س}^{٢} - \text{٨س} + ١٥\right)$$

$$= -\left(\text{س} - ٥\right)\left(\text{س} - ٣\right)$$

المنحنى يقطع محور السينات عند

$$\text{س} = \text{٥} \quad ، \quad \text{س} = \text{٣}$$

$$\text{المساحة} = \int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \left(-\text{س}^{\text{٢}} + \text{٨س} - \text{١٥} \right) \text{ءس}$$

$$= \left[-\tfrac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} + \text{٤س}^{\text{٢}} - \text{١٥س} \right]_{\text{٣}}^{\text{٥}}$$

$$= \left[-\tfrac{\text{١}}{\text{٣}}(\text{٥})^{\text{٣}} + \text{٤}(\text{٥})^{\text{٢}} - \text{١٥} \times \text{٥} \right]$$

$$- \left[-\tfrac{\text{١}}{\text{٣}}(\text{٣})^{\text{٢}} + \text{٤}(\text{٣})^{\text{٢}} - \text{١٥} \times \text{٣} \right]$$

$$= \text{١}\tfrac{\text{١}}{\text{٣}}$$

(٣)

$$\text{المساحة} = \int_{\text{١}}^{\text{٤}} \frac{\text{١٠}}{\text{س}} \text{ءس} = \text{١٠} \left[\text{لو س} \right]_{\text{١}}^{\text{٤}}$$

$$= \text{١٠} \left[\text{لو ٤} - \text{لو ١} \right] = \text{١٠ لو ٤}$$

(٤)

$$\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \left(\text{٣س}^{\text{٢}} \ \text{١} \right) \text{ءس} = \left[\text{س}^{\text{٣}} - \text{س} \right]_{\text{١}}^{\text{٣}} = \text{٢٤}$$

$$\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \left(\text{٤س} \ \text{٥} \right) \text{ءس} = \text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٥س} \Big]_{\text{٠}} = -\text{٢}$$

$$\int_{٥}^{٦} \frac{\text{ءس}}{\text{س} - ٤} = \left[\text{لو}(\text{س} - ٤)\right]_{٥}^{٦}$$

$$= \left[\text{لو}(٦ - ٤)\right] - \left[\text{لو}(٥ - ٤)\right]$$

$$= \text{لو}\,٢$$

$$\int_{٠}^{٣} \text{س}(\text{س} - ٣)\,\text{ءس} = \int_{٠}^{٣} (\text{س}^٢ - ٣\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \left[\tfrac{١}{٣}\text{س}^٣ - \tfrac{٣}{٢}\text{س}^٢\right]_{٠}^{٣}$$

$$= - ٤{,}٥$$

(٥)

$$\int_{١{,}٥}^{٢} \text{هـ}^{٢\text{س} - ٣}\,\text{ءس} = \left[\tfrac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س} - ٣}\right]_{١{,}٥}^{٢}$$

$$= \left[\tfrac{١}{٢}\text{هـ}^{٢ \times ٢ - ٣}\right] - \left[\tfrac{١}{٢}\text{هـ}^{٢ \times \frac{٣}{٢} - ٣}\right]$$

$$= \tfrac{١}{٢}\text{هـ} - \tfrac{١}{٢}\text{هـ}^{٠}$$

$$= \tfrac{١}{٢}\text{هـ} - ١$$

ب — $$\int_{٠}^{١} \frac{٣\text{س}}{٣\text{س}^٢ + ١}\,\text{ءس} = \tfrac{١}{٢}\int_{٠}^{١} \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^٢ + ١}\,\text{ءس}$$

$$= \tfrac{١}{٢}\left[\text{لو}(٣\text{س}^٢ + ١)\right]_{٠}^{١}$$

$$= \tfrac{١}{٢}(\text{لو}\,٤ - \text{لو}\,١) = \tfrac{١}{٢}\,\text{لو}\,٤$$

المنحنى يقطع محور السينات فى النقطتين س = ٠ ، س = - ٣

$$\text{المساحة} = \int_{-٣}^{٠} (\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) \, \text{ء س} = \left[\frac{١}{٣} \text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢} \text{س}^{٢} \right]_{-}^{٠}$$

$$= - ٤٫٥$$

والمساحة سالبة لأن المنحنى واقع تحت محور السينات بين س = — ٣

، س = ٠

ارشادات وحلول

مقدمة الرياضة المالية

تمارين ١ ص ٣٨

الدفعات المتساوية بفائدة بسيطة

(١) أولا : جملة الدفعة $= ١٥ \times ١٢ + ١٥ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{١١ + ٠}{١٢}$

ثانيا : « « $= ١٥ \times ١٢ + ١٥ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{١٢ + ١}{١٢}$

والجواب : أولا ١٨٤٫٩٥٠ ج ، ثانيا ١٨٥٫٨٥٠ ج

(٢) جملة الدفعة (عادية أو فورية) قبل سداد القسط الخامس مباشرة

$= ٢٠ \times ٤ + ٢٠ \times \frac{٨}{١٠٠} \times \frac{١٢ + ٩ + ٦ + ٣}{١٢}$

والجواب ٨٤ ج

(٣) جملة إيداع نصف المدة الأول $= ٢٠ \times ١٢ +$

$٢٠ \times \frac{١٫٥}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{١١٫٥ + ٦}{١٢}$

« « « « الثانى $= ٢٥ \times ١٢ +$

$٢٥ \times \frac{١٫٥}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{٥٫٥ + ٠}{١٢}$

والجواب ٥٤٣٫٦٥٦ ج

(٤) جملة ايداع الشهور الثلاثة الأولى $= ١٠ \times ٦ +$

$١٠ \times \frac{٢}{١٠٠} + \frac{٦}{٢} \times \frac{١٢ + ٩٫٥}{١٢}$

« « « الستة التالية $= ٢٠ \times ١٢ +$

$٢٠ \times \frac{٢}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{٩ + ٣٫٥}{١٢}$

جملة سحب الشهور الثلاثة الأخيرة $= ٢٥ \times ٣ +$

$$٢٥ \times \frac{٢}{١٠٠} \times \frac{٣}{٢} \times \frac{٣ + ١}{١٢}$$

والجواب ٢٢٨٫٣٢٥ ج

(٥) جملة الإيداع $= ٥٠٠ \times ٤ + ٥٠٠ \times \frac{٣}{١٠٠} \times \frac{٤}{٣} \times \frac{١١٫٥ + ٨٫٥}{١٢}$

« السحب $= ٤٠٠ \times ٤ + ٤٠٠ \times \frac{٣}{١٠٠} \times \frac{٤}{٣} \times \frac{٨ + ٥}{١٢}$

والجواب ٤٢٤ ج

(٦) $٨٠٩٠ = ٢٠٠ \times ٤ + ٢٠٠٠ \times ع \times \frac{٤}{٣} \times \frac{٩}{١٢}$

والجواب ٣ ٪

تمارين ٢ ص ٧٠

خصم الديون بفائدة بسيطة

(١) (أولا) القيمة الحالية الصحيحة $= \frac{٦٠٠}{١ + ٠٫٠٦ \times \frac{٦}{١٢}} = ٥٨٢٫٥٢٤$ ج

الخصم الصحيح $= ٦٠٠ - ٥٨٢٫٥٢٤ = ١٧٫٤٧٦$ ج

(ثانياً) الخصم التجارى $= ٦٠٠ \times ٠٫٠٦ \times \frac{٦}{١٢} = ١٨$ ج

القيمة الحالية التجارية $= ٦٠٠ - ١٨ = ٥٨٢$ ج

(٢) مدة الخصم ١٨٠ يوماً والخصم ٢٠ جنيها.

(أولا) $٢٠ = ١٠٠٠ \times ع \times \frac{١٨٠}{٣٦٠}$

(ثانياً) $٢ = ٩٨٠ \times ع \times \frac{١٨٠}{٣٦٠}$

(٢) مدة الخصم بما فيها المهلة ٩٠ يوما .

نفرض أن القيمة الإسمية س

الخطيطة ٠,٠١٥س والعمولة ٠,٠٠١س ومصاريف التحصيل ٠,٠٠٠٥س

فيكون مجموع الخصم ٠,٠١٦٥ س

٩٨٣,٥ = س − ٠,٠١٦٥ س

والجواب ١٠٠٠ ج

(٣) مدة الخصم بما فيها المهلة ١٥٠ يوما

نفرض أن القيمة الأسمية ١٠٠ ج

الخطيطة ١,٦٦٧ ج والعمولة ٠,١ ج

∴ الخصم الإجمالى ١,٧٦٧ ج وذلك عن ١٤٩ يوما (أى المدة الواجب الخصم عنها بلا مهلة) .

∴ المعدل السنوى للخصم الإجمالى = ١,٧٦٧ × $\frac{٣٦٠}{١٤٩}$ = ٤,٢٧ ٪ تقريبا

(٤) نفرض أن مدة الخصم ن

الخطيطة = ٢٠٠٠ × ٠,٠٦ × ن = ١٢٠ ن

العمولة ٢ ج ومصاريف التحصيل ١ ج

٢٠٠٠ − (١٢٠ ن + ٢ + ١) = ١٩٦٧

∴ ن = $\frac{١}{٤}$ سنة = ٩٠ يوما

∴ المدة بدون مهلة ٨٩ يوما

والجواب أول يناير ١٩٥٤

(٥) الأيام ٢٥ ، ٤٣ ، ٥٠ ، ٦٥

النمر ٦٢٥٠ ، ١٢٩٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ٦٥٠٠ ومجموعها ٣٥٦٥٠

مصاريف التحصيل على كل من الورقتين الأخيرتين ١٥٠ مليم

الحطيطة ٤,٤٥٦ ج ، العمولة ٠,٨٥٠ ج ، مصاريف التحصيل ٠,٣٠٠ ج

مجموع الخصم ٥,٦٠٦ ج والصافى ٨٤٤,٣٩٤ ج إستحقاق ٦ مايو ١٩٥٤

(٦) ثمن البضاعة بعد ٣ شهور من يوم شرائها

$$= ١٠٠٠ + ١٠٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٨}{١٢} = ١٠٤٠ \text{ ج}$$

مكسب التاجر يوم بيعه للبضاعة

$$= (٦٠٠ + \text{القيمة الحالية للكمبيالة}) - ١٠٤٠ \text{ ج}$$

والجواب ٣٠ ج

(٧) القيمة الحالية للدين قبل التسوية

$$= ٩٠٠ \left(١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٦}{١٢}\right) + ٦٠٠ \left(١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٩}{١٢}\right)$$

$$= ١٤٤٦ \text{ ج}$$

القيمة الحالية للدين بعد التسوية

$$= ٤٠٠ + \text{س} \left(١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢}\right) + ٢\text{س} \left(١ - \frac{٦}{١٠٠}\right)$$

وبمساواه القيمة الحالية للدين قبل التسوية وبعده نحصل على قيمة س .

والجواب ٣٦٥,٠٩٦ ، ٧٣٠,١٩٢ ج

(٨) القيمة الحالية للديون الأصلية

$$= ٤٠٠ \left(١ - \text{ع} \times \frac{٢}{١٢}\right) + ٦٠٠ \left(١ - \text{ع} \times \frac{٣}{١٢}\right)$$

∴ القيمة الحالية للأوراق الجديدة

= ٢٢٢،٣٢٣ (١ — ع × ١/١٢) + ٣٣٢،٣٢٣ (١ - ع × ٣/٢١)
+ ٣٣٢،٣٢٣ (١ — ع × ٣/٢٤)

وبمساواة القيمة الحالية للديون الأصلية بالقيمة الحالية للأوراق الجديدة نحصل على قيمة ع .

والجواب ٦ ٪ سنويا .

تمارين ٤ ص ٨٩

قانون الجملة بفائدة مركبة

(١) أولا ٣٩٩،٩٥٦ ، ثانياً ١١٤،٩٤٧ ، ثالثا ١١٤،٧١٣ .

(٢) ٣ ٪

(٣) ١/١٦ ٣ ٪

(٤) ٧ ٪

(٥) أولا ١٢ سنة . ثانيا ٨،٥ سنة .

(٦) جملة الجنيه فى المدة = ٥٨٢ ÷ ٥٠٠ = ١،١٦٤

لكن جملة الجنيه بمعدل ٥ ٪ فى ٣ سنوات ١،١٥٧٦٣ ، وفى ٤ سنوات ١،٢١٥٥١ .

والفرق بين هاتين الجملتين ٠،٠٥٧٨٨ . وهو ناشىء من فرق ٣٦٥ يوم .

∴ الفرق بين ١،١٦٤ و ١،١٥٧٦٢ ناشىء من س .

فنجد أن س = ٤٠ يوما

∴ المدة ٣ سنوات و ٣٠ يوما

تمارين ٥ ص ٩٩

قانون القيمة الحالية بفائدة مركبة

(١) أولا ٧٤،٨٦٧ ، ثانيا ٤٠٢،١٣٠ ج

(٢) ٣٦٨،٤٧٢ ج

(٣) آخر يونيو ١٩٤٠

(٤) أولا : فى خانة (١+ع)ن نجد قيمة

$1,03^{24}$ أمام ٢٤ وحدة زمن تحت ٣٪

$1,025^{18}$ « ١٨ « « « ٢،٥٪

$1,0225^{12}$ « ١٢ « « « ٢،٢٥٪

فيكون المقدار = ٢،٦٠٨٤٤ + ١،٥٥٩٦٦ + ١،٣٠٦٠٥

ثانيا : فى خانة ع-ن نجد قيمة

$1,01^{-5}$ أمام ٥ وحدات زمن تحت ١٪

$1,0125^{-10}$ « ١٠ « « « ١،٢٥٪

$1,015^{-15}$ « ١٥ « « « ١،٥٪

$1,0175^{-20}$ « ٢٠ « « « ١،١٧٥٪

فيكون المقدار = ٠،٩٥١٤٧ + ٠،٨٨٣٨٨ + ٠،٧٩٩٨٥ + ٠،٧٠٦٨٢

= ٣،٣٤١٣٢

ثالثاً : المقدار = ٢ ع١٢ بمعدل ١،٢٥٪ + ٣ ع٢٤ بمعدل ١،٥٪

+ ٤ ع٣٦ بمعدل ١،٧٥٪

$$= ٢ \times ٠٫٨٦١٥١ \quad ٣ \times ٠٫٦٩٩٥٤ + ٤ \times ٠٫٥٣٥٥٠$$

$$= ٥٫٩٦٣٦٤$$

رابعا : المقدار $= (٠٫٨٩٧٥ + ١٫٠٥^{٢}) \times ١٫٠٤^{-٩} \times ١٫٠٥^{٦}$

$$= (٠٫٨٩٧٥ + ١٫١٠٢٥) \times ٠٫٧٢٥٩ \times ١٫٣٤٠١٠$$

$$= ١٫٨٨٣٠٨$$

لاحظ أن $١٫٠٤^{-٩} = ح^{٩}$ بمعدل ٤ ٪

تمارين ٦ ص ١٠٩

تسوية الديون الطويلة الأجل

(١) (أولا) سنة ١٩٧٤ تقع بعد سنوات الديون بعدد ٨ ، ٦ ، ٤ سنوات على الترتيب .

الدين الجديد $= ٣٠٠ \times ١٫٠٤^{٨} + ٥٢٠٠ + ١٫٠٤^{٦} + ٤٠٠ \times ١٫٠٤^{٤}$

(ثانيا) سنة ١٩٦٨ تقع بعد الدين الأول بسنتين ، ومع الدين الثانى ، وقبل الثالث بسنتين .

∴ الدين الجديد $= ٣٠٠ \times ١٫٠٤^{٢} + ٢٠٠ + ٤٠٠ \times ١٫٠٤^{-٢}$

(ثالثا) الدين $= ٣٠٠ \times ١٫٠٤ + ٢٠٠ \times ١٫٠٤^{-١}$
$+ ٤٠٠ \times ١٫٠٤^{-٣}$

(رابعا) الدين $= ٣٠٠ \times ١٫٠٤^{-٢} + ٢٠٠ \times ١٫٠٤^{-٤}$
$+ ٤٠٠ \times ١٫٠٤^{-٦}$

والأجوبة ١١٣١٫٥٧٩ ، ٨٩٤٫٣٠٤ ، ٨٥٩٫٩١٨ ، ٧٦٤٫٤٥٢

(٩) نفرض أن استحقاق السند الجديد يقع بعد آخر يونيو ١٩٦٣ بمدة قدرها ن.

معادلة القيمة الحالية فى آخر يونيو ١٩٦٣ هى

$$٣٠٠٠ \text{ ع}^{ن} = ١٠٠٠ (\text{ع}^{٢} + \text{ع}^{٤} + \text{ع}^{٦}) \text{ بمعدل } ٦ \%$$

وبالحل نجد أن $\text{ع}^{ن} = ٠٫٧٩٥٠٨$

وبإكمال الحل كما فى الجزء الأول من التمرين السابق نجد أن

ن = ٣ سنوات ، ٣٢٧ يوماً .

والجواب ٢ يونيو ١٩٦٧

(١٠) جملة الدين فى نهاية ٣ سنوات ٥٧٨٫٨١٥ والباقى ٤٧٧٫٢٩٨

نفرض أن القيمة الإسمية لكل سند = س

الباقى = مجموعة القيم الحالية للسندات

$$٤٧٧٫٢٩٨ = \text{س}(\text{ع}^{٢} + \text{ع}^{٥} + \text{ع}^{١٠}) \text{ بمعدل } ٤ \%$$

والجواب = ٢٠٠ ج

(١١) السند الجديد يستحق بعد السندات الأصلية بأزمنة ٥ ، ٣ ، ١ من السنوات

∴ القيمة الإسمية للسند الجديد

$$= ٤٠٠ (١٫٠٦^{٥} + ١٫٠٦^{٣} + ١٫٠٦)$$

والجواب ١٤٣٥٫٧٠٠ ج

(١٢) نفرض أن كلا من الديون س

معادله القيمة الحالية فى آخر يونيو ١٩٦٢ هى

$$٤٠٠ ح^{٣} + ٥٠٠ ح^{٥} + ٦٠٠ ح^{٧} = س (ح^{٤} + ح^{٦} + + ^{٨})$$

بمعدل ٤ ٪

والجواب ٥١٤,٥٧١ ج

(١٤) الرصيد = جملة القرض ــ جملة الأقساط (فى نهاية المدة)

جملة القرض فى نهاية المدة $= ٢٠٠٠٠ \times ١,٠٥^{٨}$

، جملة الاقساط فى نهاية المدة $= ٢٠٠٠ \times ١,٠٥^{٦}$

$+ ٤٠٠٠ \times ١,٠٥^{٤} + ٦٠٠٠ \times ١,٠٥^{٢}$

ونجد أن الرصيد = ١٥٣٩١,٩٦ ج

القيمة الحالية للقسطين الأخرين $= ٦٠٠٠ \times ١,٠٧^{-٢}$

$+ ١٥٣٩١,٩٦ \times ١,٠٧^{-٤}$

والجواب ١٦٩٨٣,١٤٦

تمـــارين ٧ ص ١٢٨

جملة الدفعات المتساوية

(١) ١٥٠,٩٤٨ ج

(٢) ١٥٤٧,٢٢ ج

(٣) ١٢١٦,٨٧٠ = مقدار الدفعة × $\overline{ح_{\overline{١١}|}}$ بمعدل ٢ ٪

لاحظ أن مدة السداد ١١ سنة وليست ١٠ ، فعدد مرات السداد ١١

والجواب ١٠٠ ج

(٤) ٧٢٢٫٣٠٠ = ١٠٠ $ح_{\overline{٧}|}$ بالمعدل المطلوب

والجواب ١ ½ ٪ كل نصف سنة

(٥) ٣٦٦١٫٥٠٠ = ٥٠٠ × $ح_{\overline{ن}|}$ بمعدل ١٫٥ ٪

∴ $ح_{\overline{ن}|}$ بمعدل ١٫٥ ٪ = ٧٫٣٢٣٠

ونجد هذا العدد تحت ١٫٥ ٪ أمام ٧ وحدات زمن

والجواب ١٩٤٦ وليس ١٩٤٧ لأن ١٩٤٠ من سنوات الإيداع

(٦) ١٧٥٠٫٩٢ = ٢٠٠ $\ddot{ح}_{\overline{٨}|}$ بالمعدل المطلوب

= ٢٠٠ ($ح_{\overline{٩}|}$ - ١) » »

= ٢٠٠ $ح_{\overline{٩}|}$ - ٢٠٠ » »

$ح_{\overline{٩}|}$ = ٩٫٧٥٤٦

ونجد هذا العدد فى خانة $ح_{\overline{ن}|}$ أمام ٩ وحدات زمن تحت ٢ ٪

(٧) مدة السداد ٥ سنوات وهى المدة من أول سنة ١٩٥٧ إلى آخر سنة ١٩٦١ فلايجاد الرصيد فى آخر ديسمبر ١٩٦٥ يمكننا أن نعتبر أن الشخص دفع ٥٠٠ جنيه أول كل سنة لمدة ٩ سنوات وسحب ٥٠٠ جنيه فى أول كل من الأربع سنوات الأخيرة .

∴ الرصيد فى آخر ديسمبر ١٩٥٤ = ٥٠٠ ($\ddot{ح}_{\overline{٩}|}$ - $\ddot{ح}_{\overline{٤}|}$) بمعدل ٢ ٪

= ٥٠٠ ($ح_{\overline{١٠}|}$ - $ح_{\overline{٥}|}$) » »

والجواب ٢٨٧٢٫٨٥٠ ج

(٨) مدة الإيداع ٣ سنوات ومدة السحب ٤ سنوات

يمكننا أن نعتبر أنه أودع ١٠٠ جنيه فى آخر ديسمبر من كل من السنوات السبع كلها وسحب ٣٠٠ جنيه فى آخر ديسمبر من كل من السنوات الأربع الأخيرة .

الرصيد فى آخر ١٩٥٤ = ٢٠٠ $ح_{\overline{٧}|}$ − ١٠٠ $ح_{\overline{٤}|}$ بمعدل ٢ ٪

والجواب ٢٥٠,٣٨٠ ج

(٩) ٣١٩٦,٩٢٠ = ١٠٠ $ح_{\overline{٢١}|}$

∴ $ح_{\overline{٢١}|}$ = ٣١,٩٦٩٢

وبالبحث فى الجداول فى خانة $ح_{\overline{ن}|}$ نجد هذا العدد فى جدول ٤ ٪

جملة الأقساط التى دفعت لغاية وفاة الرجل = ١٠٠ $ح_{\overline{١٥}|}$ بمعدل ٤ ٪

القيمة الحالية لمبلغ ٢٢٠٠ ج يوم « « = ٢٢٠٠ $ع^{٦}$ « «

ومكسب الشركة يوم الاتفاق يساوى الفرق بين الناتجين الأخيرين .

والجواب ٢٩٣,٦٧ ج .

تمارين ٨ ص ١٤٨

القيمة الحالية للدفعات المتساوية

(١) (أولا) القيمة الحالية = ٢٠٠ × $\ddot{ى}_{\overline{٢٥}|}$ بمعدل ٢,٥ ٪

(ثانيا) « « = ٣٠٠ × $\ddot{ى}_{\overline{٢٥}|}$ « «

= ٢٠٠ ($ى_{\overline{٢٤}|}$ + ١) « «

والجواب (أولا) ٣٦٨٤٫٨٨٠ (ثانيا) ٣٧٧٧٫٠٠٠ ج

(٢) أولا) القيمة الحالية = ١٠٠ × ى |٣٠ بمعدل ٢ ٪

(ثانيا) القيمة الحالية = ١٠٠ × ى̈ |٣٠ بمعدل ٢ ٪

= ١٠٠ (ى |٢٩ + ١) » »

والجواب (أولا) ٢٢٣٩٫٦٥٠ (ثانيا) ٢٢٨٤٫٤٤٠ ج

(٣) مايجب دفعه = القيمة الحالية لعشرين دفعه بمعدل ٢ ٪

(أولا) المبلغ المطلوب = ١٠٠٠ ى̈ |٢٠ » »

(ثانيا) » » = ١٠٠٠ ى |٢٠ » »

والجواب (أولا) ١٦٦٧٨٫٥ (ثانيا) ١٦٣٥١٫٤ ج

(٤) ٨٧٥٫٢١٠ = ١٠٠ × ى |ن بمعدل ٢٫٥ ٪

∴ ى |ن بمعدل ٢٫٥ ٪ = ٨٫٧٥٢١

والجواب ١٠ سنوات

(٥) ١٦٢٢٫١٨٠ = ٣٠٠ ى |١٠ المعدل المطلوب

والجواب ٤ ٪

(٦) المبلغ الواجب دفعه = القيمة الحالية للايجار

= ٥٠ ى̈ |٢٠ بمعدل ٢ ٪

والجواب ٨٣٣٫٩٢٥

(٧) (أولا) نفرض أن عدد الدفعات ن.

∴ المبلغ = القيمة الحالية للدفعة

∴ ٦٨٧٤ = ١٠٠٠ $ى_{\overline{ن}|}$ بمعدل ٣٫٥ ٪

∴ $ى_{\overline{ن}|}$ بمعدل $٣\frac{١}{٢}$ ٪ = ٦٫٨٧٤

وبالبحث فى الجداول تحت ٣٫٥ ٪ فى خانة $ى_{\overline{ن}|}$ نجد هذا العدد أمام ٨ وحدات زمن .

∴ عدد الدفعات ٨ .

(ثانيا) الرصيد المطلوب = القيمة الحالية للدفعات الباقية

= ١٠٠٠ $ى_{\overline{٤}|}$ بمعدل ٣٫٥ ٪

والجواب ٣٦٧٣٫١ ج

(٨) (أولا) القيمة الحالية للدفعة = ١٠٠ × ١٠ | $ى_{\overline{١٥}|}$ بمعدل ٣ ٪

= ١٠٠ ($ى_{\overline{٢٥}|}$ − $ى_{\overline{١٠}|}$) » »

= ٨٨٨٫٢٩٠ ج

(ثانيا) » » » = ١٠٠ × ١٠| $\ddot{ى}_{\overline{١٥}|}$ » »

= ١٠٠ ($\ddot{ى}_{\overline{٢٥}|}$ − $\ddot{ى}_{\overline{١٠}|}$) » »

= ١٠٠ ($ى_{\overline{٢٤}|}$ − $ى_{\overline{٩}|}$) » »

= ٩١٤٫٩٤٠ ج

(٩) أولا – ثمن شراء المزرعة $= ١٠٠٠ \, ى_{\infty} = \frac{١٠٠٠}{٠٫٠٢٥}$

ثانياً – « « « $= ١٠٠٠ \, \ddot{ى}_{\infty} = ١٠٠٠ \left(\frac{١}{٠٫٠٢٥} + ١ \right)$

والجواب : أولا : ٤٠٠٠٠ ، ثانياً : ٤١٠٠٠ ج

(١٠) أولا – المبلغ اللازم $= ١٠٠٠ \, ى_{\infty} = \frac{١٠٠٠}{٠٫٠٢٥}$

ثانياً – « « $= ١٠٠٠ \, \ddot{ى}_{\infty} = ١٠٠٠ \left(١ + \frac{١}{٠٫٠٢} \right)$

والجواب : أولا ٥٠٠٠٠ ، ثانيا ٥١٠٠٠ ج

(١١) أولا – القيمة الحالية للدفعة $= ٢٠٠ \times {}_{١٥|}ى_{\infty}$

$= ٢٠٠ \left(\frac{١}{٠٫٠٣} - ١١٫٩٣٧٩ \right)$

ثانياً – « « « $= ٢٠٠ \times {}_{١٥|}\ddot{ى}_{\infty}$

$= ٢٠٠ \left(\frac{١}{٠٫٠٣} - ١١٫٢٩٦١ \right)$

والجواب : أولا ٤٢٧٩٫٠٨٠ ، ثانياً ٤٤٠٧٫٤٤٠ ج

(١٢) ٥٢٠٤ = مبلغ الدفعة السنوى $\times \, ح_{\overline{٥|}}$ بمعدل ٢٪

= « « « $\times ٥٫٢٠٤٠$

∴ مبلغ الدفعة السنوى ١٠٠٠ ج

∴ القيمة الحالية للدفعة $= ١٠٠٠ \, ى_{\overline{٥|}}$ بمعدل ٢٪

والجواب ٤٧١٣٫٥ ج

(١٣) ا — اعتبر أن الدفعة عادية فتكون مؤجلة ٥ سنوات فقط .

المبلغ الواجب إيداعه = ٢٠٠ ($ى_{\overline{١٥|}} - ى_{\overline{٥|}}$) بمعدل ٢ ٪

ب — المبلغ الواجب إيداعه = ٢٠٠ × ٥ | $ى_{\infty}$

= ٢٠٠ ($\frac{١}{٠,٠٢} - ى_{\overline{٥|}}$) بمعدل ٢ ٪

والجواب : (ا) ١٦٢٧,١٦٠ (ب) ٩٠٠٧,٣٠٠ ج

تمارين ٩ ص ١٦٤

سداد الديون على أقساط متساوية من رأس المال والفوائد معا

(١) فائدة أول سنة = ١٠٠٠ × ٠,٠٦ = ٦٠ ج

القسط السنوى = ١٠٠٠ × $\frac{١}{ى_{\overline{٥|}}}$ بمعدل ٦ ٪ = ٢٣٧,٣٩٦ ج

الاستهلاك الأول = ٢٣٧,٣٩٦ — ٦٠ = ١٧٧,٣٩٦ ج

« الثانى = ١٧٧,٣٩٦ × ١,٠٦ = ١٨٨,٠٤٠ ج

« الثالث = ١٨٨,٠٤٠ × ١,٠٦ = ١٩٩,٣٢٣ ج

« الرابع = ١٩٩,٣٢٣ × ١,٠٦ = ٢١١,٢٨٢ ج

« الخامس = ٢١١,٢٨٢ × ١,٠٦ = ٢٢٣,٩٥٩ ج

فائدة أى سنة = القسط — الاستهلاك فى آخر السنة

فنجد أن الفوائد ٦٠ ، ٤٩,٣٥٦ ، ٣٨,٠٧٣ ، ٢٦,١١٤ ، ١٣,٤٣٧ ج

(٢) بضرب استهلاك معين فى ١,٠٦ ينتج الاستهلاك التالى له وبقسمته على ١,٠٦ ينتج السابق له

الاستهلاكات ٥٣٢ ١٨٩ ، ٥٦٤,١٢١ ، ٥٩٧,٩٦٨ ، ٦٣٣,٨٤٦ ، ٦٧١,٨٧٦

القرض = مجموع الاستهلاكات = ٣٠٠٠ ج

القسط = فائدة السنة الأولى + الاستهلاك الأول = ٧١٢,١٨٩ ج

ولإيجاد الفائدة فى أى سنة غير السنة الأولى نستخدم العلاقة الآتية

فائدة سنة معينة = القسط — الاستهلاك فى آخر السنة

والفوائد السنوية ١٨٠ ، ١٤٨,٠٦٨ ، ١١٤,٢٢١ : ٧٨,٤٣٥ ، ٤٠,٢١٣ ج

ولإيجاد الباقى من الأصل فى آخر أى سنة نستخدم العلاقة :

الباقى من الأصل فى آخر السنة = الباقى من الأصل فى أول السنة — الاستهلاك فى آخر السنة

والبواقى من الأصل فى آخر السنوات الخمس هى

٢٤٦٧,٨١١ ، ١٩٠٣,٦٩٠ ، ١٣٠٥,٧٢٢ ، ٦٧١,٨٧٦ ، صفر .

والأصل فى أول كل سنة (غير السنة الأولى) يساوى الباقى من الأصل فى آخر السنة السابقة . والأصول فى أول السنوات الخمس هى

٣٠٠٠ ، ٢٤٦٧,٨١١ ، ١٩٠٣,٦٩٠ ، ١٣٠٥,٧٠٢ ، ٦٧١,٧٧٦

ويكون جدول الاستهلاك على صورة الجدول الموجود بصحيفة ٢٨٩ .

(٣) الجملة فى نهاية عشر سنوات = ٥٠ ح̈ ٢٠| بمعدل ١,٥ ٪

= ٤٠ (ح ٢١| - ١) بمعدل ١,٥٪ = ٩٣٨,٨٢٠ ج

القسط الذى يدفعه المصرف = ٩٣٨,٨٢٠ × ١/ء ٢٠| بمعدل ٢٪

= ٩٣٨,٨٢٠ × ٠,١١١٣٢٧ = ١٠٤,٥١٦ ج

الرصيد عقب استلام القسط الثالث

= القيمة الحالية للأقساط السبعة الباقية

= ١٠٤,٥١٦ ء ٧| بمعدل ٢٪

والجواب ٦٧٦٠٤٢٨ ج

(٤) مادفعه البنك = ٦٠٠٠ ح^٨ + ٨٠٠٠ ح^١٠ بمعدل ٠/٠٦

= ٨٢٣١,٥٨ ج

القسط السنوى الذى يدفع للبنك = ٧٢٣١,٥٨ × ١/ء ١٠| بمعدل ٦٪

= ٨٢٣١,٥٨ × ٠,١٠٢٩٦٣

= ٨٤٧,٥٤٨ ج

الرصيد عقب دفع القسط العاشر

= القيمة الحالية للأقساط الخمسة الباقية

= ٨٤٧,٥٤٨ ء ١٠| بمعدل ٦٪ = ٨٤٧,٥٤٨ × ٤,٢١٢٤

= ٣٥٧٠,٢١١ ج

فائدة الرصيد السنوية = ٣٥٧٠,٢١١ × ٠,٠٦ = ٢١٤,٢١٣ ج

وهـــذا ما يدفعه الشخص فى آخر كل سنة من السنوات الخمس الأخيرة ، وفى نهاية هذه المدة يسدد الشخص للبنك الرصيد المدين وقدره ٣٥٧٠,٢١١ ج

(٥) القرض = مجموعة الأقساط — الفوائد = ١٠٠٠٠٠ ج

∴ القسط = القرض × $\frac{١}{\text{ى}_{\overline{\text{ن}}|}}$

∴ ٨٧١٨,٤٥٦ = ١٠٠٠٠٠ × $\frac{١}{\text{ى}_{\overline{٢٠}|}}$

∴ $\frac{١}{\text{ى}_{\overline{٢٠}|}}$ = ٠,٠٨٧١٨٤٥٦

وبالبحث فى الجداول فى خانة $\frac{١}{\text{ى}_{\overline{\text{ن}}|}}$ أمام ٢٠ وحدة زمن نجد ان هذا العدد موجود فى جدول ٦ ٪ .

الاستهلاك الأول = القسط — فائدة السنة الأولى

وباقى الإستهلاكات نحصل عليها بالضرب فى ١,٠٦

والاستهلاكات الثلاثة الأولى هى

٢٧١٨,٤٥٦ ، ٢٨٨١,٥٦٣ ، ٣٠٥٤,٤٥٧ ج

(٦) اولا — نصف ثمن العقار = القيمة الحالية للخمسة عشر قسطاً

= ٥٠٠ $\text{ى}_{\overline{١٠}|}$ بمعدل ٥ ٪

= ٥٠٠ × ١٠٫٣٧٩٧ = ٥١٨٩٫٨٥ ج

فثمن العقار إذن ١٠٢٧٩٫٧٠ ج

ثانياً ـ الرصيد عقب دفع القسط الخامس

= ٥٠٠ $\text{ى}_{\overline{٢٠}|}$ بمعدل ٥ ٪ = ٣٨٦٠٫٨٥ ج

فائدة الرصيد السنوية = ٣٨٦٠٫٨٥ × ٠٫٠٥ = ١٩٣٫٠٤٣ ج

وهذه تدفع آخر كل سنة من السنوات الخمس الوسطى

القسط الذى يدفع آخر كل من السنوات الخمس الأخيرة

= ٣٨٦٠٫٨٥ × $\dfrac{١}{\text{ى}_{\overline{٥}|}}$ بمعدل ٥ ٪

= ٣٨٦٠٫٨٥ × ٠٫٢٣٠٩٧٥ = ٨٩١٫٧٦٠ ج

مجموع مادفع = ٥(٥٠٠ + ١٩٣٫٠٤٢ + ٨٩١٫٧٦٠) = ٧٩٢٤٫٠١٥ ج

« الفوائد = ٧٩٢٤٫١٥ − ٥١٨٩٫٨٥٠ = ٢٧٣٤٫١٦٥ ج

(٧) القسط = ٢٠٠٠٠ × $\dfrac{١}{\text{ى}_{\overline{٢٠}|}}$ بمعدل ٦ ٪

= ٢٠٠٠٠ × ٠٫٠٨٧١٨٥ = ١٧٤٣٫٧ ج

الرصيد عقب سداد القسط الخامس

= القيمة الحالية للأقساط الباقية

= ١٧٤٣٫٧ × $\text{ى}_{\overline{١٥}|}$ بمعدل ٦ ٪

= ١٧٤٣٫٧ × ٩٫٧١٢٢ = ١٦٩٣٥٫١٦٢

القسط فى كل من السنوات الخمس التالية

$$= \text{الرصيد} \times \frac{1}{\overline{a}_{\overline{5}|}} \text{ بمعدل } ٤،٥ \%$$

= ١٦٩٣٥,١٦٢ × ٠,٢٢٧٧٩٢ = ٣٨٥٧,٦٩٤

الإستهلاك الأخير = الباقى من الأصل فى اول السنة الأخيرة

= القيمة الحالية للقسط الأخير فى اول السنة الأخيرة

= القسط الأخير × ١,٠٤٥ $^{-1}$

= ٣٨٥٧,٦٩٤ × ٠،٩٥٦٩٤ = ٣٦٩١,٥٨٢ ج

(٨) نفرض أن الاستهلاك الثانى س

∴ ، الثالث ١,٠٦ س

٢٢,٥٦٥ = ١,٠٦ س — س

= ٠،٠٦ س

∴ س = ٢٢,٥٦٥ ÷ ٠,٠٦ = ٣٧٦,٠٨٠ ج

وهذا هو الاستهلاك الثانى

الاستهلاك الأول = ٣٧٦,٠٨٠ ÷ ١,٠٦ = ٣٥٤,٧٩٢ ج

، الثانى = ٣٧٦,٠٨٠ ج

، الثالث = ٣٧٦,٠٨٠ + ٢٢,٥٦٥ = ٣٩٨,٦٤٥ ج

، الرابع = ٣٩٨,٦٤٥ × ١,٠٦ = ٤٢٢,٥٦٤ ج

، الخامس = ٤٢٢,٥٦٤ × ١,٠٦ = ٤٤٧,٩١٨ ج

المجموع ١٩٩٩,٩٩٩

القرض ٢٠٠٠ ج

فائدة السنة الأولى = ٢٠٠٠ × ٠,٠٦ × ١٢٠ ج

القسط = الاستهلاك الأول + فائدة السنة الأولى

= ٢٥٤,٨٩٢ + ١٢٠ = ٤٧٤,٧٩٢ ج

مجموع الفوائد = مجموع الأقساط — القرض

= ٥ × ٤٧٤,٧٩٢ − ٢٠٠٠ = ٣٧٣,٩٦٠ ج

(٩) الاستهلاك الرابع = الثالث × (١ + ع)

= الاستهلاك الثانى × (١ + ع)^{٢}

(١ + ع)^{٢} = الاستهلاك الرابع ÷ الاستهلاك الثانى

= ٢١١,٢٨٢ ÷ ١٨٨,٠٤٠ = ١,١٢٣٦٠

وبالبحث فى جداول الفائدة المركبة فى خانة (١ + ع)ن نجد أن هذا العدد موجود أمام ٢ من وحدات الزمن تحت ٦ ٪

نوجد باقى الاستهلاكات بالقسمة على أو بالضرب فى ١,٠٦

والاستهلاك الأول ١٧٧,٣٩٦ , الثالث ١٩٩,٣٢٣ والخامس ٢٢٣,٩٥٩

القرض = مجموع الاستهلاكات = ١٠٠٠ ج

فائدة السنة الأولى = ١٠٠٠ × ٠,٠٦ = ٦٠ ج

القسط = الاستهلاك الأول + فائدة السنة الأولى

= ٢٣٧,٣٩٦ ج

ارشادات وحلول

بقيه مقدمة الرياضة البحتة

تمارين (٢) ص ٢٨

المعادلات الخطية الآتية

(١) أولا : ١، ٢ ثانيا : ٦، ٢

(٢) أولا : ٢، ٣، −١ ثانيا : −١، ١، ف، −٢

تمارين (٤) ص ٥٢

النهايات العظمى والصغرى بقيود

(١) الخط ٢ س + ٣ ص = ١٢ أبعد الخطوط

والترتيب : ٦، ٢ س$_١$ + ٢ص$_١$ ، ١٢

(٢) ٣، ٤

(٣) ٢س − ٥ ص = − ١٠ أبعد المستقيمات

والترتيب : − ٥ ، ٢ س$_١$ − ٥ ص$_١$ ، − ١٠

(٤) (٠، ٨)

تمارين (٥) ص ٦١

البرامج الخطية

(٣) نفرض أن عدد السلع المنتجة من النوعين ا، ب هما س، ص على الترتيب

٢ س + ٤ ص ≥ ٨

٤ س + ٢ ص ≥ ٨

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

م = ٣ س + ٤ ص

والجواب : س = ١٫٤ ، ص = ١٫٣

(٤) نفرض أن عدد السلع المنتجة من النوعين أ ، ب هما س، ص على الترتيب.

١٠ س + ٦ ص ≤ ١٠٠٠

٥ س + ٤ ص ≤ ٦٠٠

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

مطبعة الشاعر بالاسكندرية