الباب الثامن

مركـــز الثقل

لتكن مجموعة من النقط المادية والتى أوزانها معرفة كما يلى :

$$\vec{G}_1 = m_1 \vec{g} , \ldots\ldots , \vec{G}_2 = m_2 \vec{g} , \ldots\ldots , \vec{G}_i = m_i \vec{g} , \ldots\ldots , \vec{G}_n = m_n \vec{g} \qquad (8.1)$$

حيث g هى عجلة الجاذبية الأرضية وقيمتها $9.8\ m/sec^2$.

أما $m_1 , m_2 , \ldots , m_i , \ldots , m_n$ فهى كتل تلك النقط المادية .

لو افترضنا الآن أن مجال الجاذبية الأرضية منتظم ، فتكون الأوزان بالمعادلة (8.1) أعلاه عبارة عن متجهات قوى رأسية ومتوازية ، مركز تأثير محصلة هذه القوى c ويكون C فى هذه الحالة هو مركز القوى المتوازية $\vec{G}_1$ ، $\vec{G}_2$ ، ...... ، $\vec{G}_i$ ، .... ، $\vec{G}_n$ ويعرف بمركز ثقل تلك النقط المادية ، ويمكن تعيينه بتطبيق المعادلات (2.23) , (2.24) فنجد :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \vec{r}_i}{\Sigma G_i} \qquad \ldots\ldots (8.2)$$

وإحداثيات C والتى تعتبر مركبات المتجه $\vec{r}_c$ تكـون :

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i x_i}{\Sigma G_i} , \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i y_i}{\Sigma G_i}$$

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i z_i}{\Sigma G_i} \qquad \ldots\ldots (8.3)$$

عن طريق المعادلات (8.3) يمكن تعيين مركز ثقل أى جسم .

ومن الواضح أن مركز ثقل جسم ما هو النقطة التى يمكن أن نركز بها وزنه .

8.1 مركـز الكتلة :

لو افترضنا مرة أخرى أن تغيرات عجلة الجاذبية g عند سطح الأرض يمكن أهمالها ، فإننا فى هذه الحالة نستطيع أن نكتب المعادلة التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} G_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \; g = g \sum_{i=1}^{n} m_i$$

بالتعويض عن G_i فى المعادلة (8.2) نحصل على :

$$\vec{r}_c = \frac{g \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{g \sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.4)$$

النقطة C تعرف فى هذه الحالة بمركز الكتلة للمجموعة التى يراد دراستها وإحداثياتها تكون :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \;,\; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{y}_i}{g \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{z}_i}{g \sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.5)$$

8.2- مركز الكتلة لجسم مادى متصل :

بالنسبة للأجسام المادية التى تحتل جزء من الفراغ (أى التى لها حجم) ، فإننا نعرف الكثافة الحجمية لها كما يلى (شكل 8.1) :

Δm = كتلة عنصر M من الجسم المتصل .

Δv = حجم هذا العنصر .

وتكون كثافة M :

شكل 8.1

$$P = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dV} \quad \text{..............} \quad (8.6)$$

حيث P = الكثافة الحجميـــة .

أما إذا كان الجسم يحتل مساحة فقط (وليس حجماً) فإننا نعرف الكثافة السطحية (S) :

$$S = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dA} \quad \text{..............} \quad (8.7)$$

أما إذا كانت الأوزان المادية لا تحتمل مساحة فتصبح على شكل خط أومنحنى فإننَا نعرف الكثافة الطولية كما يلي :

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l d l} = \frac{dm}{} \quad \text{..............} \quad (8.6)$$

وعندما تكون الكثافة ثابتة يقال إن الجسم له كثافة منتظمة أو أنه متجانس .

لتغيير العلاقات (8.4) , (8.5) من علاقات مركز كتلة نقط مادية أو جزيئات إلى علاقات لجسم ما متصل نستبدل علامة التكامل بعلامة Σ ، ونستعين بالمعادلات (8.6) , (8.7) , (8.8) لنجد :

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\int p\, \vec{r}\, dV}{\int p\, dV} && \text{للحجــوم} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int s\, \vec{r}\, dA}{\int s\, dA} && \text{للمساحـات} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int \lambda\, r\, dL}{\int \lambda\, dL} && \text{للأطوال} \end{aligned}\right\} \quad \text{................} \quad (8.9)$$

8.3 المركز الهندسى :

فى حالة ما إذا كان الجسم متجانس فتكون الكثافة ثابتة ، وتصبح العلاقات أعلاه :

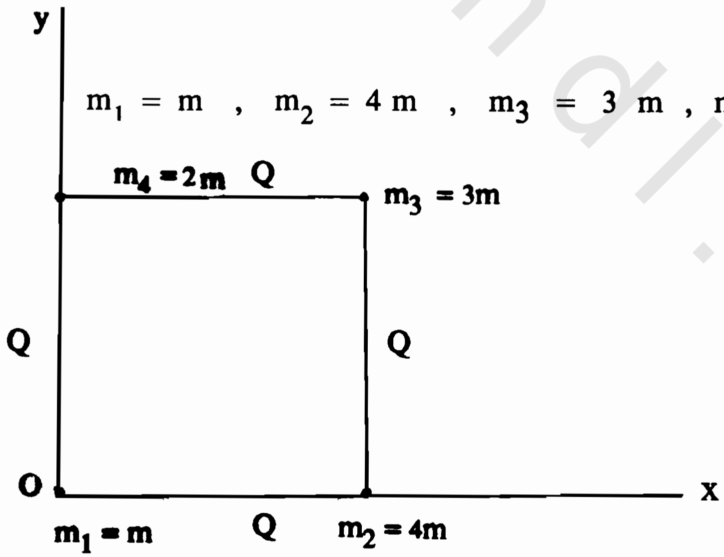
$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r}\, dV}{\int dV} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r}\, dA}{\int dA} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r}\, dl}{\int dl} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8.10)$$

وهذه هى متجهات مواضع المركز الهندسى لأى شكل .

8.4 أمثلة محلولة :

١ – لتكن الأربع جزيئات على رؤوس المربع ذو الضلع a . المطلوب إيجاد مركز كتلة هذه الجزيئات .

$$m_1 = m \quad , \quad m_2 = 4\,m \quad , \quad m_3 = 3\,m \quad , \quad m_4 = 2\,m$$



الحـــــل :

بتطبيق المعادلات (8.5) مع العلم أن هذه المسألة فى المستوى نجد :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{m \cdot o + 4m \cdot a + 3m \cdot a + 2m \cdot o}{m + 4m + 3m + 2m} = \frac{7}{10} a$$

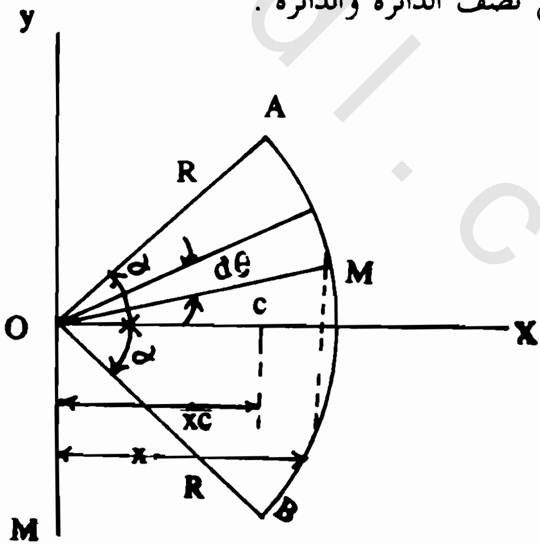
$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \, y_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{m \cdot o + 4m \cdot a + 3m \cdot a + 2m \cdot o}{m + 4m + 3m + 2m} = \frac{a}{2}$$

وبالتالى تكون إحداثيات مركز الكتل الأربع C : $\left(\frac{7}{10} a \, , \frac{a}{2} \right)$

٢ – أوجد مركز كتلة قوس دائرى متجانس بالشكل التالى :

ادرس حالتى نصف الدائرة والدائرة .



الحـــــل :

القوس متماثل بالنسبة للمحور OX ، وبالتالى فإن مركزه لابد وأن يقع على المحور الأفقى OX فالمطلوب إذاً هو الإحداثى الأفقى فقط أى X_c .

بفر: أن نصف قطر القوس هو R ، وأن زاويته الكلية هى 2α كما بالشكل فإننا بتطبيق المعادلة (8.10) نحصل على :

$$X_c = \frac{\int X \, d\ell}{\int d\ell}$$

حيث إننا اعتبرنا أن dl هى المسافة على القوس MM .

$$\therefore d\ell = M`M = R \, d\Theta$$

$$X = R \cos\Theta$$

$$\therefore X_c = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\Theta \, d\Theta}{R \int_{-\alpha}^{\alpha} d\Theta} = R \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\Theta \, d\Theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\Theta}$$

$$X_c = \frac{R \, [\sin\Theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\Theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = R \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.11)$$

حالة نصف الدائرة :

فى هذه الحالة يمكن أن نطبق المعادلة (8.11) على أساس أن :

$$2\alpha = \pi \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

ومن ثم فإننا نحصل على :

$$X_C = R \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8.12)$$

حالة قوس دائرى كامل :

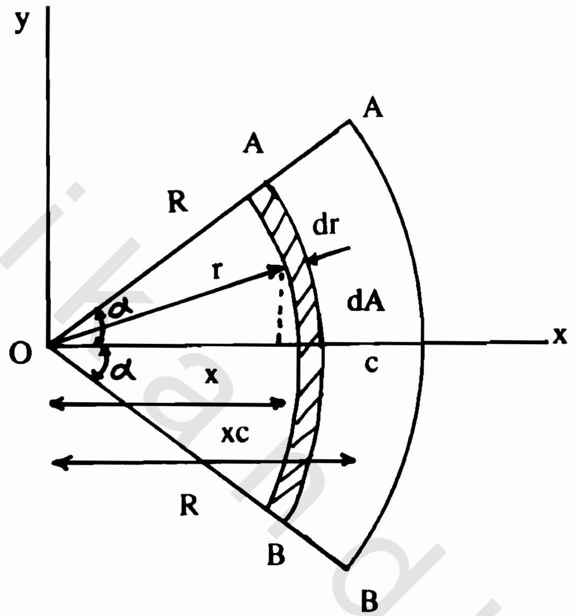
فى هذه الحالة يمكن أيضاً أن نطبق المعادلة (8.11) وذلك بالشروط التالية :

$$2\alpha = 2\pi \quad \longrightarrow \quad \alpha = \pi$$

$$X_C = R \frac{\sin\pi}{\pi} = 0$$

وهذا بالطبع يفيد أن مركز الدائرة سوف ينطبق على نقطة الأصل .

٣ - أوجد المركز الهندسى لقطعة دائرية متجانسة بالشكل التالى :
ادرس القطاع النصف الدائرى .



الحـــــل :

نفترض أن القطعة الدائرية لها نصف قطر R وتحصر زاوية مقدارها 2α
فى هذه الحالة العنصر المقترح هو على شكل قوس دائرى مساحته dA وهو المهشر بالشكل ، وهذه المساحة يمكن حسابها كما يلى :

$$dA = 2\alpha \cdot r\,dr$$

ويمكن فى هذه الحالة تطبيق المعادلة الثانية من (8.10) نحصل على : (الوضع فى هذه الحالة هو مساحة) .

$$X_c = \frac{\int x \, d A}{\int d A}$$

بالنسبة للعنصر المهشر وهو قوس دائرى يمكن تطبيق المعادلة (8.11) الحاصل عليها فى المثال السابق نجد لهذا العنصر :

$$X = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

حيث r هى نصف قطر العنصر المهشر و x هى مركز كتلته .

وبالتعويض عن x من المعادلة أعلاه فى المعادلة (8.10) نجد :

$$X_c = \frac{2 \alpha \sin \alpha \int_0^R r^2 d r}{2 \alpha . \alpha \int_0^R r \, d r} = \frac{\sin \alpha \int_0^R r^2 r \, d r}{\int_0^R d r}$$

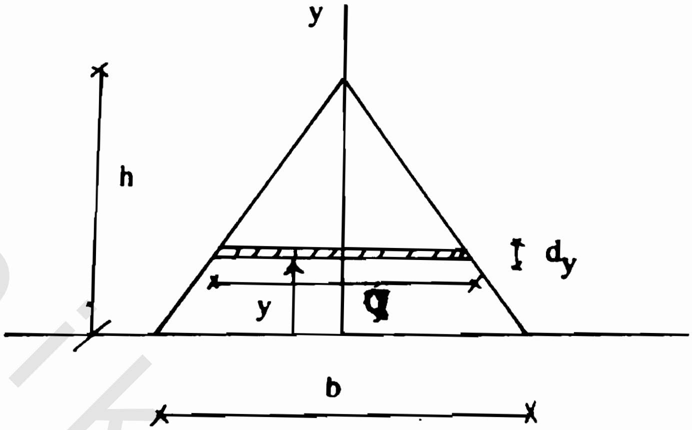
$$X_c = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R}{\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R} = \frac{2 \sin \alpha}{3 \alpha} R \text{ .... } (8.13)$$

يمكن الآن دراسة الحالة الخاصة عندما يكون القطاع على مشكلة نصف دائرة حيث يمكن التعويض عن قيمة الزاوية α :

$$2 \alpha = \Pi \longrightarrow \alpha = \frac{\Pi}{2}$$

$$X_c = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{3 \pi}{2}} R = \frac{4 R}{3 \pi}$$

٤ – المطلوب إيجاد مركز الشكل المثلثى المتساوى الساقين بالشكل التالى :



الحـــــل :

لهذا المثلث نأخذ العنصر المهشر والذى مساحته (a.dy) وهو على بعد y من المحور الأفقى والمطلوب فى هذه المسألة هو إيجاد الإحداثى الرأسى لمركز الشكل حيث إن الإحداثى الأفقى يكون على المحور y نتيجة للتماثل .

لإيجاد y_c نطبق المعادلة الثانية فى (8.10) لنجد :

$$Y_c = \frac{\int y\, dA}{\int dA} = \frac{\int y.\, a\, dy}{\int a\, .\, dy}$$

وحيث إن a متغير بالنسبة للارتفاع فإننا يمكن من تشابه المثلثات إيجاد ما يلى :

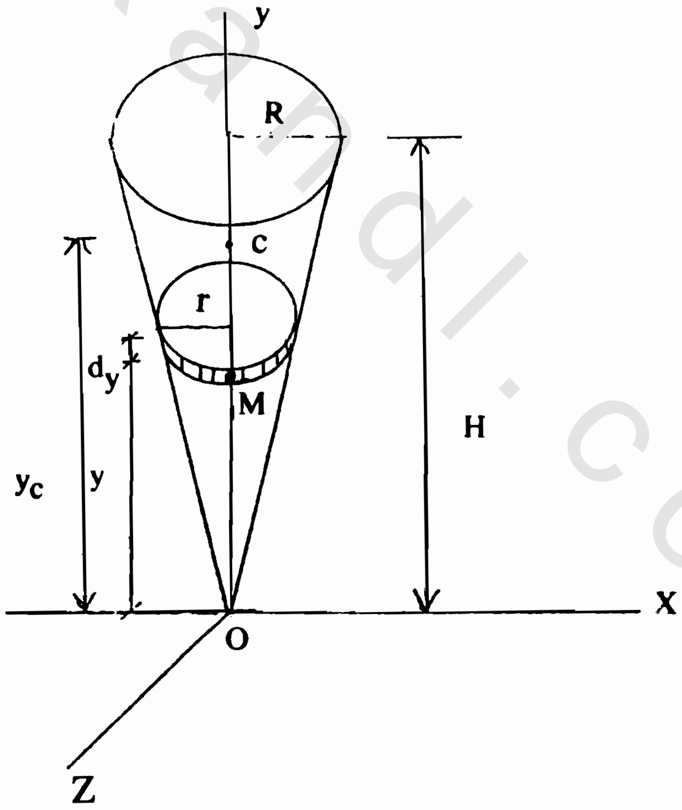
$$\frac{a}{b} = \frac{(h - y)}{h} \longrightarrow a = b\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

بالتعويض عن a فى التكامل أعلاه نجد :

$$Y_c = \frac{\int_0^h y\,b\,(1 - \frac{Y}{h})\,dy}{\int_0^h b\,(1 - \frac{Y}{H^2})\,dy} = \frac{\int_0^h (hy - Y^2)\,dy}{\int_0^h (h - Y\,dy} =$$

$$= \frac{\left[\frac{hY^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^H}{\left[hy - \frac{y^2}{2}\right]_0^H} \qquad Y_c = \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}}{h^2 - \frac{h^2}{2}} = \frac{h}{3}$$

5 – أوجد مركز الكتلة للمخروط القائم المتجانس ، والذى قاعدته دائرية بالشكل التالى :



الحـــل :

كما بالشكل فإن المخروط ارتفاعه H ونصف قطر قاعدته هو R . فإذا أخذنا فى هذه الحالة عنصر حجم dv وهو كما بالشكل شريحة دائرية نصف قطرها r وارتفاعها dy ، وهى توجد على ارتفاع y من نقطة الأصل o . ولو افترضنا أن C هو مركز كتلة المخروط وهو نتيجة للتماثل يكون واقعاً على المحور oy وبالتالى فإن إحداثييه فى اتجاه كل من ox و oz معروف . أما بالنسبة للمحور OY فيجب إيجاده وليكن y_c .

بتطبيق المعادلة الأولى فى (8.10) نجد:

$$Y_c = \frac{\int yd\,V}{\int d\,v}$$

حيث : $\Pi r^2 \,.\, dy = dv$

ومن التشابه نجد النسب التالية :

$$\frac{r}{R} = \frac{Y}{H} \longrightarrow r = R\,\frac{Y}{H}$$

$$\because\ dV = \Pi R^2\,\frac{Y^2}{H^2}\,dy$$

وبالتعويض عن dv بالتكامل أعلاه نجد :

$$Y_c = \frac{\int_0^H y\,\Pi R^2\,\frac{Y^2}{H^2}\,dy}{\int_0^H \Pi R^2\,\frac{Y^2}{H^2}\,dy} =$$

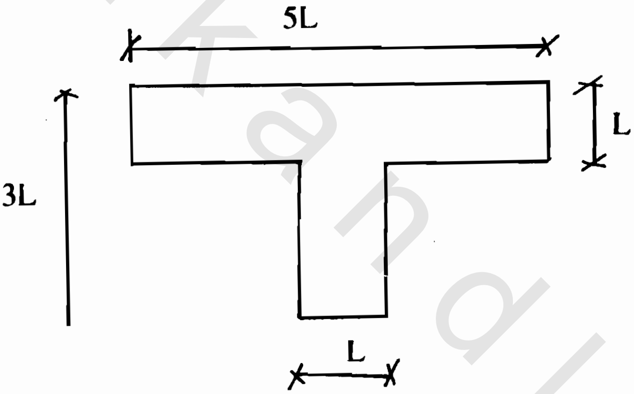
$$= \frac{\int_0^H Y^3\,dy}{\int_0^H Y^3\,dy} = \qquad = \frac{\left[\frac{Y^4}{4}\right]_0^H}{\left[\frac{y^2}{3}\right]_0^H} = \frac{3}{4}\,H$$

8.5 القطاعات الهندسية المركبة :

رأينا فى الفقرات السابقة كيفية حساب مركز كتلة (أو مركز ثقل) قطاعات هندسية بسيطة سواء كانت فى الفراغ أو المستوى أو كانت أطوال . ونتعرض فى هذه الفقرة للقطاعات المركبة ، ويقصد بها تلك القطاعات المكونة من اثنين أو أكثر من الأشكال الهندسية البسيطة .

ولنأخذ لذلك المثال التالى لتعيين مركز ثقل قطاع مركب :

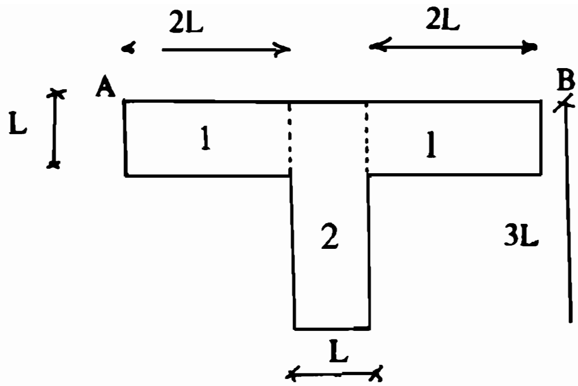
6 – أوجد مركز ثقل القطاع الهندسى على شكل حرف T بالشكل التالى ، حيث L وحدة طول



الحـــل :

يتضح من الشكل أن القطاع T يتكون من مستطيلين أحدهما أفقى ، والآخر رأسى وهو أيضاً متماثل بالنسبة لمحور رأسى يمر بمنتصفه ، وبالتالى فإن المطلوب فقط هو الموضع الرأسى لمركز الثقل .

بتقسيم الشكل إلى مستطيلين (1) , (2) كما هو موضح يمكن عمل حسابات مركز الثقل بالجدول التالى :



	b	h	(b.h)	d	d(b.h)
1	2 L x 2	L	$4\,L^2$		$2\,L^3$
2	L		$3\,L^2$	$3L/2$	$9\,L^3/2$
			$7L^2$		$13\,L^3/2$

حيث : b : عرض المستطيل المعنى أو البعد الموازى للمحور الأفقى .

h : أرتفاع المستطيل المعنى أو البعد الموازى للمحور الرأسى .

d : المسافة بين مركز ثقل العنصر المعنى والشريحة العليا للشكل أى AB .

وبالتالى تكون مساحة الشكل الكلية هى : (b.h) وهذا هو مقام المعادلة (8.10) . أما الخانة الرأسية الأخيرة فهى تمثل عزم هذه المساحة بالنسبة للشريحة العليا ، وبالتالى فهذه الكمية هى بسط المعادلة (8.10) ، ولذلك فإننا نجد مركز الثقل للشكل كله :

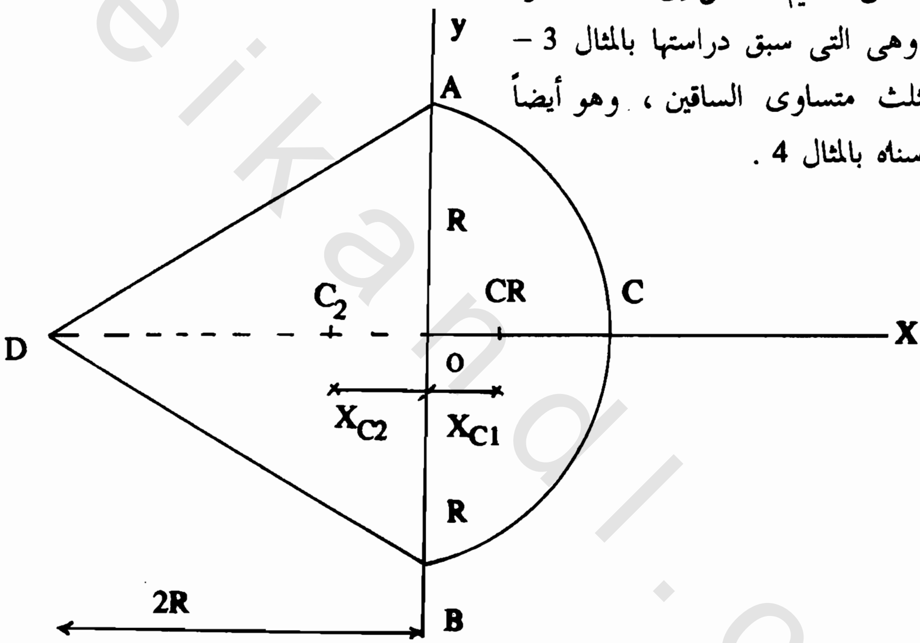
$$\nu = \frac{\Sigma\, d\,(b.h)}{\Sigma\, b\,h} = \frac{13\,L^3/2}{7\,L^2} = \frac{13\,l}{14}$$

حيث v : المسافة بين مركز ثقل الشكل والشريحة العليا .

٧ – أوجد مركز ثقل المساحة المحددة بنصف الدائرة ACB التى نصف قطرها R وبالخطين AD و DB المساويين هذا علماً بأن CD = 3R .

الحـــــل :

يمكن تقسيم الشكل إلى نصف دائرة – وهى التى سبق دراستها بالمثال 3 – ومثلث متساوى الساقين ، وهو أيضاً درسناه بالمثال 4 .



فمن المثال 3 نجد أن مركز ثقل نصف الدائرة هو (X_{c1}) :

$$X_{c1} = \frac{4}{3\pi}(1\,R) = 0.424\,R$$

أما من المثال 4 فإننا نجد أن مركز ثقل المثلث المتساوى الساقين (X_{c2}) هو :

$$X_{c_2} = \frac{(2\,R)}{3} = 0.667\,R$$

والآن بعد أن وجدنا مركز ثقل كل من نصف الدائرة C_1 والمثلث المتساوى الساقين C_2 فإنه يمكننا بتطبيق المعادلة (8.10) إيجاد مركز ثقل الشكل كله :

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i X_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi R^2 (x_{c_1}) + \frac{1}{2} 2R\, 2R\, (-X_{c_2})}{[\frac{1}{2}\pi R + \frac{1}{2} 2R\,(2R)]}$$

نلفت نظر القارىء أن X_{c1} سالبة ومن ثم فهى تعطى نتيجة سالبة .

$$X_c = \frac{-0.668 R^3}{3.571 R^2} = -0.187 R$$

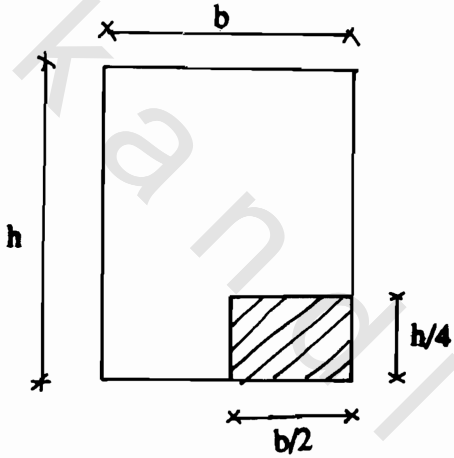
8.6 القطاعات المفرغة :

وهى تلك الأشكال الهندسية التى أستقطع منها جزء لسبب أو لآخر . وفى هذه الحالة لحساب مركز ثقلها نعتبر أن الجزء المستقطع مساحة سالبة وعزمه دائماً سالب كذلك ، وبالتالى نعوض عن تلك القيم السالبة فى المعادلة (8.10) وذلك يوضحه المثال التالى :

٨ – مستطيل (b.h) استقطع منه مستطيل مساحته ($\frac{h}{4}$. $\frac{b}{2}$) كما هو موضح بالشكل التالى . المطلوب إيجاد مركز ثقله .

الحـــل :

القطعة المستقطعه من المستطيل هى المهشرة بالشكل ، ويمكن كما أسلفنا اعتبارها سالبة المساحة والعزم حول الشريحة العليا أو أى عزم وهذا ما فعلناه فى الجدول التالى على أساس أن العنصر رقم (1) هو المستطيل الكامل ، والعنصر رقم (2) هو العنصر المهشر وهو سالب القيمة .



	b	h	b . h	d	d(bh)	d`	d`(bh)
1	b	h	bh	$h/2$	$bh^2/2$	$h/2$	$bh^2/2$
2	$b/2$	$h/4$	$bh/8$	$7h/8$	$7bh^2/64$	$36/4$	$3b^2h/32$
Σ			$7bh/8$		$25bh^2/64$		$13b^2h/32$

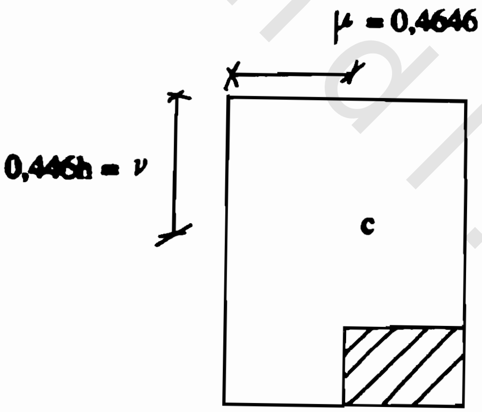
بالإضافة إلى الرموز المعرفة بالمثال 6 فإننا نجد فى هذا الجدول :

`d = المسافة بين مركز ثقل العنصر والشريحة الرأسية اليسرى للشكل .

$$\nu = \frac{22bh^2 / 64}{7\ bh / 8} = \frac{25\ h}{56} = 0.446\ h$$

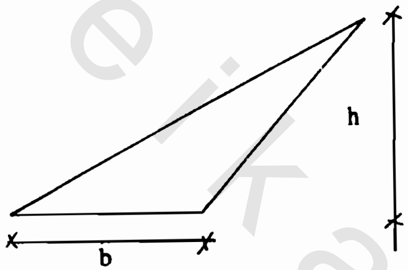
$$\mu = \frac{22bh^2 / 32}{7\ bh / 8} = \frac{13\ b}{28} = 0.446\ b$$

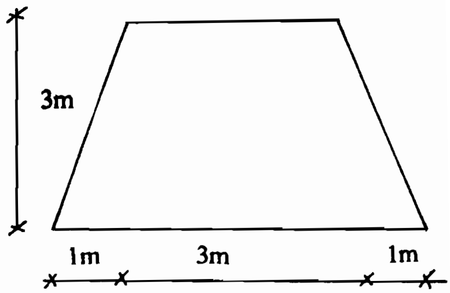
حيث μ هى بعد مركز ثقل الشكل الناتج بعد الاستقطاع عن الشريحة اليسرى الرأسية .

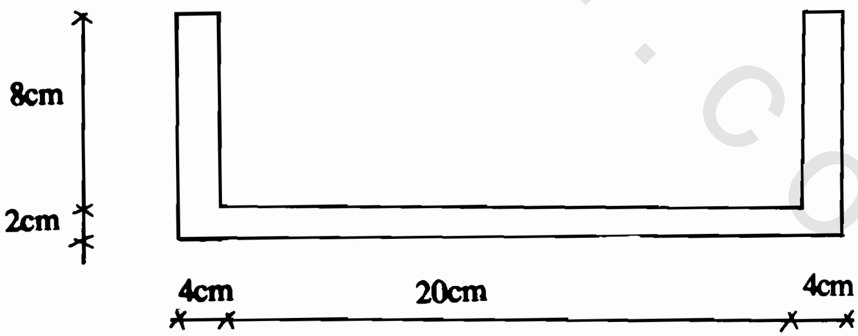


8.7 – تمـــارين :

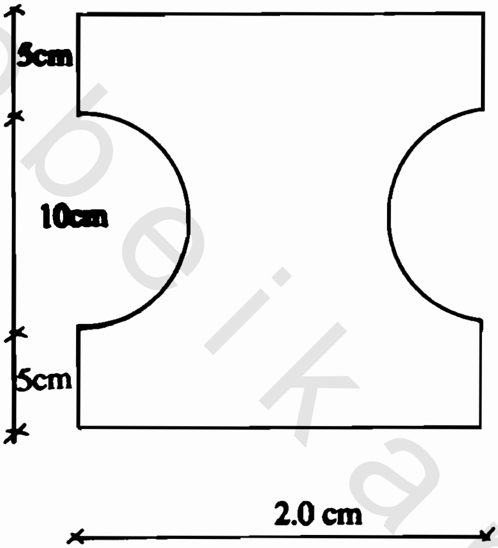
1 – أوجد مراكز ثقل الأشكال الهندسية التالية :

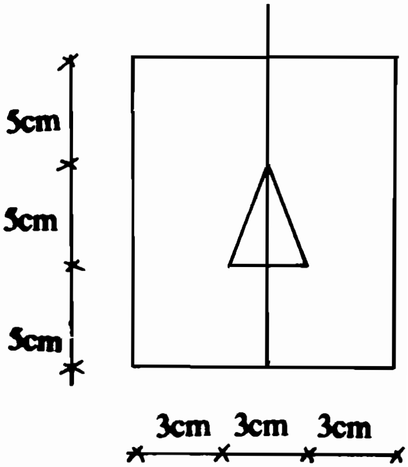






2 – أوجد مركز ثقل الأشكال المفرغة التالية :





3 – أوجد مركز ثقل الشكل التالى :