الباب السادس

المفصـــلات

6.1 مقدمـــة :

ندرس فى هذا الفصل من الكتاب المفصلات الملساء ، ويقصد بها تلك الوصلات التى تصل بين بعض العناصر بمنشأ ما بحيث تسمح بعملية الدوران حولها ، ودراسة تلك المفصلات تعنى معرفة القوة التى تنشأ بها نتيجة وضعها بهذا المنشأ ، وكيفية انتقال تلك القوى عبر المفصلة ، وسنفترض فى هذه الدراسة ان المفصلات ملساء تماماً ، وقوى الاحتكاك يمكن بالتالى أهمالها .

والمفصلة تعتبر ضرورة فى بعض المنشآت لوصل عناصرها بعضها البعض ، وكما سبق ذكره فهى تسمح بعملية الدوران ، ومن ثم فإن مجموع عزوم القوى حول أى مفصلة يكون صفراً .

6.2 القوى بالمفصـــلات :

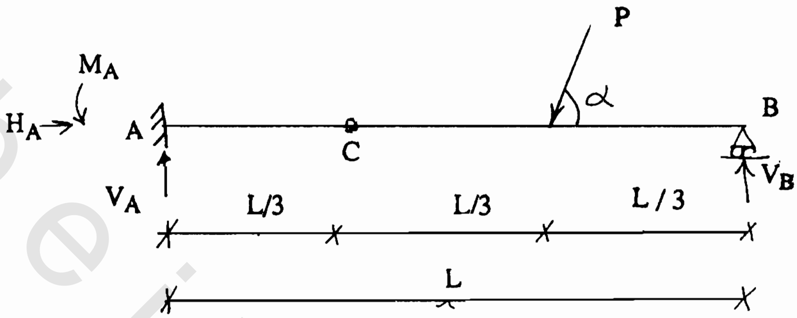
كما أسلفنا فإن المفصلات لا تتقبل أى عزم وبناء عليه فهى تحقق الاتزان فى الاتجاه الأفقى والرأسى فقط إذا كانت بالمستوى والاتزان تبعاً لثلاثة محاور إذا كانت فى الفراغ . ويمكننا كتابة معادلة مجموعة القوى $\vec{R}$ بالمفصلات كما يلى :

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.1)$$

ومركباتها بالنسبة للمحاور الثلاثة تكون :

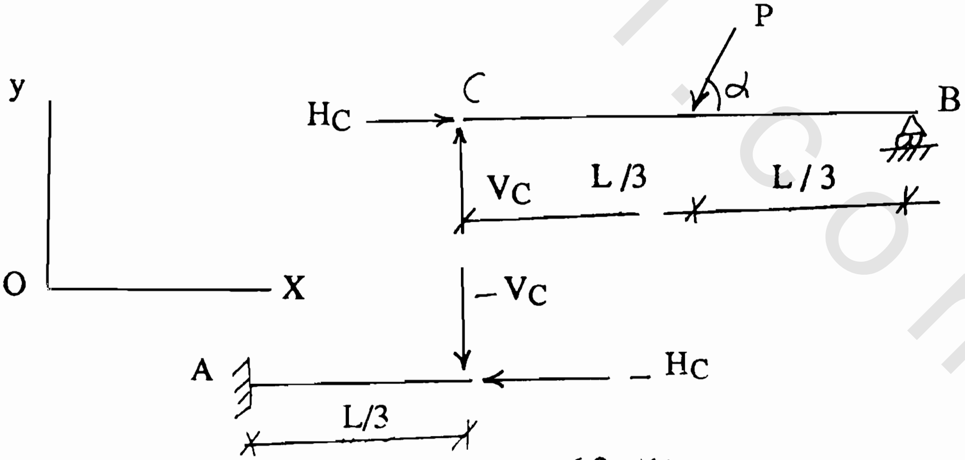
$$\Sigma X = 0 \quad , \quad \Sigma Y = 0 \quad , \quad \Sigma Z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6.2)$$

ولإيضاح فكرة انتقال القوى عن طريق المفصلات الملساء دعنا ندرس الكمرة ذات المفصلة بالشكل 6,1 .



شكـل 6.1

لا تظهر القوى بالمفصلات إلا بإجراء عملية قطع الكمرة عند المفصلة ، وذلك لأن القوى بالمفصلات قوى داخلية ، ومن هنا لدراستها سوف ندرس الشكل CB ثم الجزء CA أي نجرى قطع للكمرة عند المفصلة C شكل 6,2 .



شكل 6,2

عند إجراء عملية القطع تظهر القوى بالمفصلات وهى بالمستوى XOY والاتجاه الموجب للمحاور مبين بالشكل 6.2 . نفترض أن هذه القوى هى كما هو مبين بالشكل أعلاه ، وفى الاتجاه الموجب للمحاور فإذا حصلنا على النتيجة بإشارة موجبة فمعنى هذا أن الغرض صحيح وإلا تغير اتجاه السهم . وكما سبق ذكره فلا مجال لوجود قوى على شكل عزم بالمفصلة حيث إنها تسمح بدوران الجزئين CA , CB بالنسبة لبعضهما البعض ولا تقاوم العزم إطلاقاً .

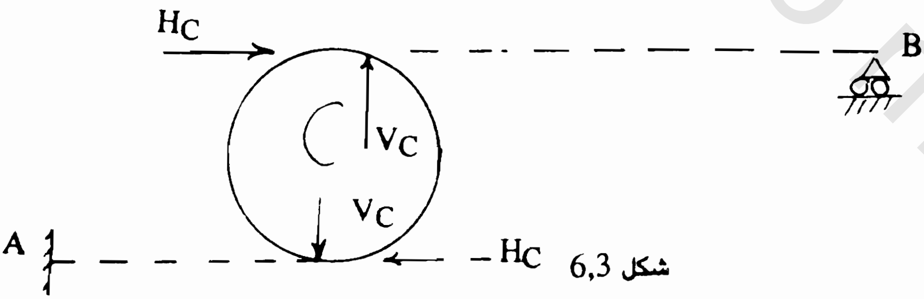
لإيجاد القوتين V_c و H_c نطبق معادلات الاتزان السابق دراستها فى الفصل الثالث للجزء CB :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_C = P \cos \alpha \rightarrow$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_c \frac{2l}{3} - P(\sin \alpha)\frac{l}{3} = 0$$

$$V_C = \frac{P}{2} \sin \alpha \quad \uparrow$$

وبالتالى تكون القوى بالمفصلة C معروفة عن طريق دراستنا للجزء CB . وبالطبع هذه القوى هى نفسها التى تنتقل إلى الجزء CA عبر C على أن عملية النقل تتم مع تغيير الإشارة ، وبالتالى نجد أن الأسهم على الجزء CA تتغير فتصبح V_c إلى أسفل فى حين تصبح H_c إلى اليسار انظر شكل 6.3 . فإذا أردنا الآن تطبيق المعادلات (6.1) و (6.2) على المفصلة C نجد :



شكل 6,3

$$\Sigma X = H_C - H_C = 0$$

$$\Sigma Y = V_C - V_C = 0$$

$$\therefore \vec{R} = \vec{0}$$

وتستغل خاصية عدم تحمل المفصلات للعزوم فى حساب ردود الأفعال بالمنشآت الهندسية . إذ يمكننا أن نضيف فى حالة المنشآت ذات المفصلات معادلة إضافية - فضلاً عن معادلات الاتزان المعتادة الواردة بالفصل الثالث - وهى :

$$\Sigma M_C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6.3)$$

والمعادلة (6.3) هى ببساطة المعادلة التى توضح أن المفصلة C لا تتحمل العزم ، ولتوضيح كيفية استغلال هذه الخاصية لحساب ردود الأفعال دعنا نعود للكمرة بالشكل 6.1 ، ونحاول حساب ردود أفعالها عند كل من B , A .

نرى أن عدد ردود الأفعال المطلوب إيجادها يساوى أربعة , V_B , M_A ، H_A , V_A ، فى حين أن معادلات الاتزان الممكن تطبيقها للاتزان بالمستوى هى ثلاث : (3.3) , (3.6) . ولكن لوجود المفصلة C فإننا يمكن أن نستغل المعادلة (6.3) ، وبالتالى يصبح المنشأ محدداً إستاتيكاً ، حيث تعطى المعادلة (3.8) :

$$\begin{aligned} n &= (ib + r) - (ij + k) \\ &= (3 X 1 + 4) - (3 x 2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

وهنا اعتبرنا أن K = 1 حيث من تعريف K (انظر الفقرة 3.6) نرى أنها شرط إضافى وهو هنا المعادلة (6.3) .

بالاستعانة بالشكل 6,2 وبعد معرفة القوى بالمفصلة C نجد بالنسبة للجزء CB :

$$\Sigma Y = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = P \sin\alpha - \frac{P}{2}\sin\alpha = \frac{P}{2}\sin\alpha \uparrow$$

وبدراسة الجزء CA نجد :

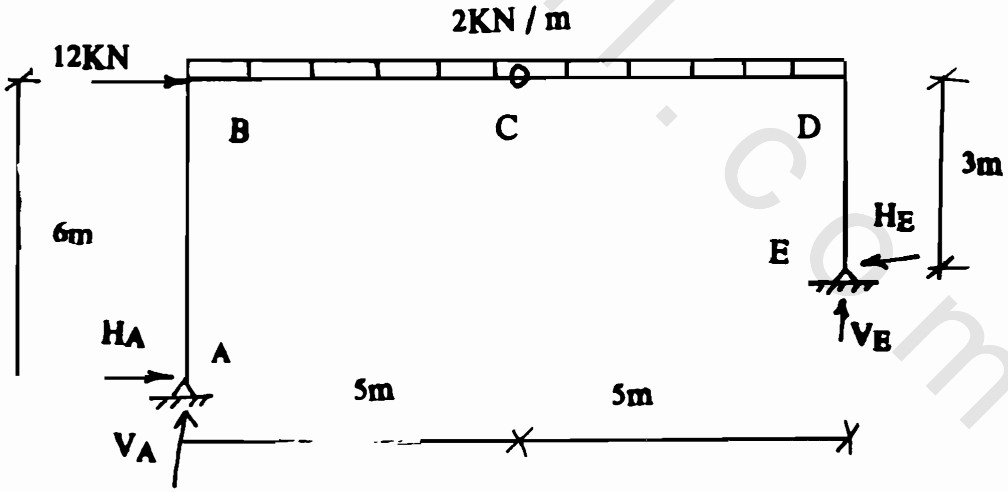
$$\Sigma X = 0 \quad \rightarrow \quad H_A - H_C = P\cos\alpha \rightarrow$$

$$\Sigma Y = 0 \quad \rightarrow V_A = V_C = \frac{P}{2}\sin\alpha \uparrow$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad \rightarrow V_A = V_C \frac{\ell}{3} - M_A = 0 \quad \rightarrow M_A = \frac{P\,l}{6}\sin\alpha$$

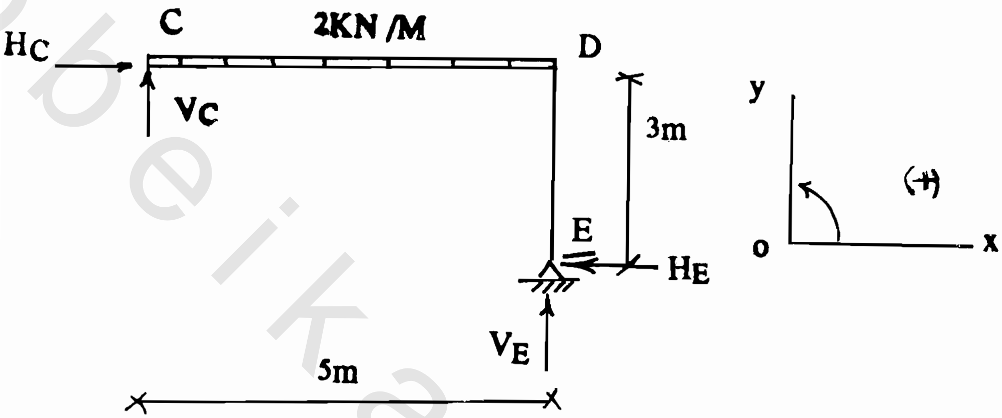
6.3 أمثلة محلولة :

١ – أوجد القوى بالمفصلة C بالهيكل ذى الثلاث مفصلات ABCDE المبين بالشكل أسفله .



الحـــل :

لإيجاد القوى بالمفصلات فإننا نفصل الشكل عند المفصل C إلى جزئين ، ونحاول دراسة الشكل CDE انظر الشكل التالى :



نفترض القوى بالمفصلة هى كالواضح بالشكل أى فى الاتجاه الموجب للمحاور ، نلاحظ أننا لو درسنا اتزان الجزء CDE فسيكون لدينا ثلاث معادلات للاتزان ، ولكن هناك أربعة مجاهيل ، ولذلك فلابد للحصول على أحد هذه المجاهيل قبل دراسة الشكل CDE . وهذا ممكن بدراسة اتزان المنشأ ككل ، بل يمكن إيجاد رد الفعل الأفقى والرأسى كذلك عن طريق دراسة المنشأ الكلى نجد :

$$\sum_{A}^{E} M_A = 0 \rightarrow 10\,V_E + 3\,H_E - 2 \times 10 \times 5 - 12 \times 6 = 0 \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sum_{C}^{E} M_C = 0 \rightarrow 5\,V_E + 3\,H_E - 2 \times 5 \times 2.5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد :

$$V_E = 13.133 \text{ KN} \uparrow , \; H_E = 13.555 \text{ KN} \leftarrow$$

بمعرفة ردود الفعل عند E يمكن بسهولة معرفة القـوى بالمفصلة C عن طريق دراسة الجزء CDE أعلاه :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow \quad H_c = H_E = 13.555 \text{ KN} \rightarrow$$

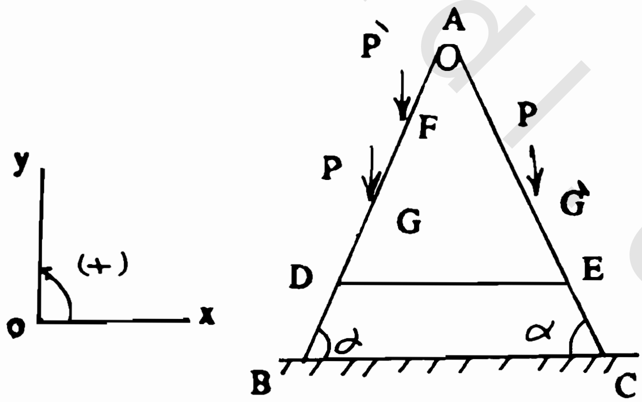
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow \quad V_c = 13.133 - 2 \times 5 = 3.133 \text{ KN} \uparrow$$

2 – سلم مزدوج AB ، AC حيث A مفصلة بين الفرعين . بإهمال الاحتكاك عند نقطتى الارتكاز C و B . أوجد القـوى بالمفصلة وردود الأفعال V_C ، V_B كذلك قوة الشد فى الحبل DE ، وذلك للمعطيات التالية :

وزن كل فرع من السلم = P = 400 نيوتن . الحمل = P = 800 نيوتن .

$AB = AC = \ell = 4 \text{ m} \quad , \quad BD = CE = 1 \text{ m}$

$BG = CG = a = 1.5 \text{ m} \quad , \quad BC = 1.5 \text{ m} \quad , \quad BF = 3 \text{ m}$



الحـــل :

لإيجاد ردود الأفعال يمكننـا أن ندرس اتـزان السلـم ، ونطبق معادلات الاتزان التقليدية .

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow - V_B (1.5) + 2P \left(\frac{1.5}{2} \right) + P`(0.75 + 3 \cos \alpha) = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{0.75}{4} = 0.1875 \rightarrow \alpha = 79.19°$$

وبالطبع يمكن من المعادلة أعلاه إيجاد قيمة V_B بعد التعويض عن قيم P , $P`$ وكذلك $\cos \alpha$ نجد :

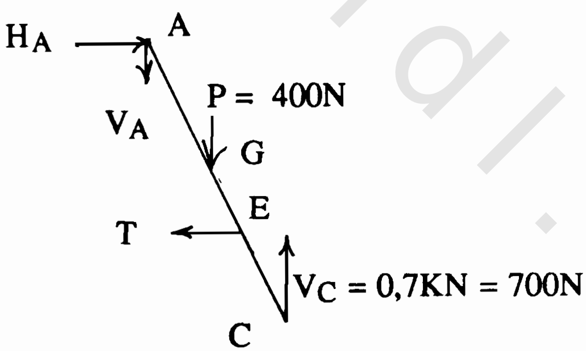
$$V_B = 1100 \text{ N} = 1.1 \text{ KN} \uparrow$$

بالمثل يمكن إيجاد V_c بحساب العزوم حول B لنجد :

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_c (1,5) - 2P \left(\frac{1,5}{2} \right) P`(3 \cos \alpha) = 0$$

$$V_C = 700 \text{ N} = 0,7 \text{ KN}$$

ولإيجاد الشد فى الحبل DE وكذلك القوى بالمفصلة A فلابد من عمل قطاع رأسى مار بالمفصلة لنحصل على الشكل التالى :



بدراسة اتزان الجزء AGC نجد :

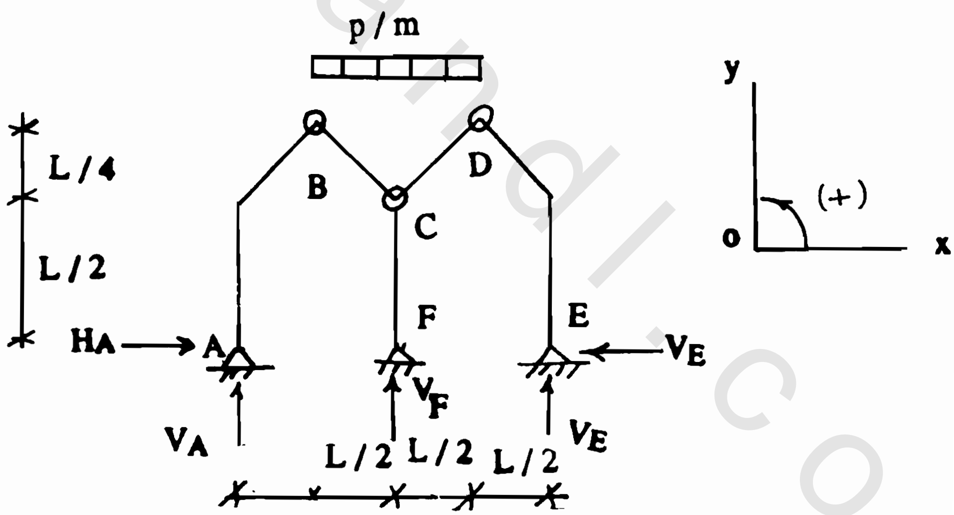
حيث T هو الشد فى الحبل .

$$T = \frac{0.75 \times 700 - 200 \times 0.75}{3 \sin 79.19°} = 127.258 \text{ N} \leftarrow$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow \quad H_A = T = 127.258 \text{ N}$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow \quad V_A = V_C - P = 700 - 400 = 300 \text{ N} \downarrow$$

3 – هيكل مكون من الأجزاء AB , BCF , CD , DE انظر الشكل التالى . المطلوب إيجاد ردود الأفعال ، وكذلك القوى بالمفصلات هذا علمـاً بأن الهيكـل معـرض للقـوة p موزعـة توزيعـاً منتظمـاً على الوحدة الأفقية كما بالشكل .



الحـــل :

نتيجة تماثل الشكل بالنسبة لمحور رأسى مار بالـــقضيب FC يمكن أن نستنتج العلاقات التالية :

$$H_A = H_E \quad , \quad V_A = V_E \quad , \quad H_F = 0$$

وبناء على هذه العلاقات فيمكننا دراسة نصف الشكل فقط ، وليكن النصف الأيمن FCDE .

يمكن أن نطبق معادلات الاتزان على هذا الجزء فضلاً عن المعادلة (6.3) الخاصة بالمفصلات C , D .

$$\sum_{D}^{E} M_D = 0 \rightarrow \frac{\ell}{2} V_E - H_E \frac{3\ell}{4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sum_{C}^{E} M_C = 0 \rightarrow \ell V_E - V_E \frac{\ell}{2} - p \frac{\ell^2}{8} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

من هاتين المعادلتين نجد :

$$H_E = P \frac{\ell}{8} \quad , \quad V_A = \frac{3 P \ell}{16} \uparrow$$

ومن خواص التماثل والمعادلات المستنتجة أعلاه نجد أن :

$$H_E = P \frac{L}{8} \rightarrow \quad , \quad H_A = P \frac{L}{8} \rightarrow \quad , \quad V_A = \frac{3 P L}{16} \uparrow$$

ولإيجاد القوى بالمفصلات فمن التماثل أيضاً نجد أن :

$$V_B = V_D \quad , \quad H_B = H_D \quad , \quad V_C = V_F$$

ولإيجاد القوة V_F (وهى رد الفعل عند F) نطبق معادلة الاتزان على الهيكل بالكامل فى الاتجاه الرأسى :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow \quad V_F = - V_E - V_A + p\ell = \frac{5}{8} p \ell \uparrow$$

$$V_F = \frac{5}{8} PL \uparrow$$

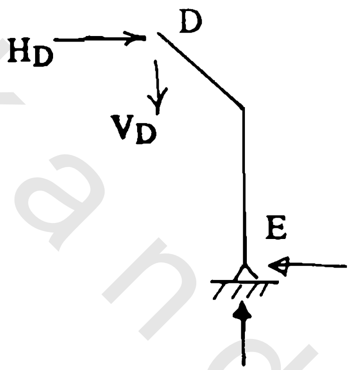
نجرى الآن قطاعاً بالمفصلة D وندرس الجزء DE :

$$\sum_{E}^{D} Y = 0 \rightarrow -V_D = V_E = \frac{3\,pl}{16} \rightarrow$$

$$\sum_{E}^{D} X = 0 \rightarrow -H_D = H_E = \frac{pl}{8} \rightarrow$$

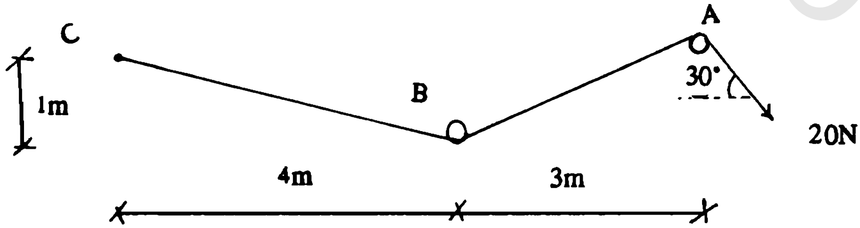
وبالتالى وتبعاً لمبدأ التماثل نجد :

$$V_B = V_D = \frac{3\,pl}{16} \;,\; H_B = H_D = P\,\frac{l}{8}$$

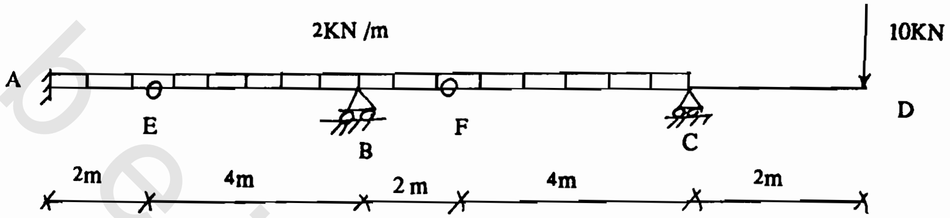


6.4 تمـــــارين :

١ - الحبل ABC فى حالة اتزان تحت تأثير القوة 20 نيوتن التى تميل على الأفقى بزاوية 30° ، والتى تؤثر عند المفصلة A ، الحبل ملتف حول المفصلة B إلى أن يصل إلى الوتد C . والمطلوب إيجاد القوى بالمفصلتين A , B ، وكذلك ردود الفعل عند الوتد C وذلك فى حالة الاتزان .



2 – أوجد القوى بمفصلات الكمرة التالية :



3 – أوجد ردود أفعال الهيكل التالى :