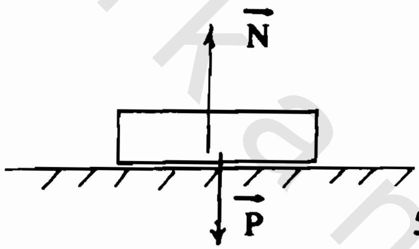
الباب الخامس

الاحتكـــــاك

يقصد بالاحتكاك تلك القوة التى تنشأ عن تلامس نقطة مادية مع سطح خشن ، فتعمل تلك القوة على معاكسة حركة هذا الجسم أو تقليل تأثير القوى الخارجية عليه .

يعتبر الاحتكاك إذاً قوة تعمل دائماً فى اتجاه معاكس للقوى المؤثرة ، ولندرس هذا بشيء من التفصيل .

5.1 اتصال فى حالة وجود احتكاك :



شكل 5.1

دعنا ندرس صندوق موضوع على سطح خشن أفقى كما هو موضح بالشكل 5,1 . تعتبر هذه الخزانة فى حالة اتزان ، ويمكن أن نطبق عليها العلاقة (3.7) لتصبح :

$$\vec{N} + \vec{P} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.1)$$

حيث :

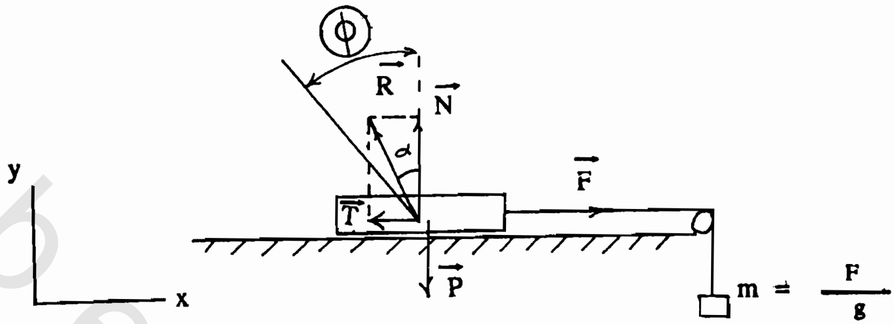
$\vec{p}$ = وزن الخزانة وهــو رأسى

$\vec{N}$ = رد فعل السطح وهو رأس لأعلى

وواضح من شروط الاتزان أن قيمة كل من وزن الخزانة ، ورد فعل السطح عليها متساوية فى المقدار ، ولكن اتجاهاتهما متعاكسة ويجب أن يكون خط عملهما واحد .

ونحاول الآن التأثير على الخزانة بقوة فى اتجاه موازٍ للسطح الخشن لنحصل على الشكل 5.2 .

obeikandi.com



شكل 5,2

نفرض أن هناك كتلة يمكن زيادتها لنحصل بالتالى على قوة $\vec{F}$ تزداد حسب الحاجة . بواسطة قانون نيوتن يمكن الحصول على قيمة F من العلاقة :

$$|\vec{F}| = m\,|\vec{g}|$$

حيث $\vec{g}$ هى متجه يمثل عجلة الجاذبية الأرضية .

لنفرض أن الخزنة سوف تتحرك عندما تزيد قيمة القوة عن F_0 ومن هنا ينشأ لدينا ثلاث حالات وهى :

(أ) قيمة القوة $F > F_0$.

(ب) قيمة القوة $F = F_0$.

(جـ) قيمة القوة $F < F_0$.

الحالة الثالثة (جـ) تعنى أن الخزنة قد تحركت فعلاً ، وهى بالتالى تخضع لقوانين علم الديناميكا وليست الإستاتيكا ، وبالتالى فإننا لن ندرسها فى هذا المجال ، فى الحالة الأولى (أ) تكون الخزنة ثابتة وفى حالة أتزان حيث إن F لم تبلغ بعد القيمة اللازمة لتحريك الخزنة . أما الحالة الثانية فإن الخزنة تكون على وشك الحركة ، ولكن يمكن أيضاً اعتبارها فى حالة اتزان . ودعنا ندرس هاتين الحالتين (أ) و (ب) بشيء من التفصيل :

obeikandl.com

الحالة (أ) $F_0 > F$:

تكون القوى فى حالة اتزان وهى تتمثل فى :

- وزن الخزنة $\vec{P}$ وهو رأسى إلى أسفل .
- رد فعل السطح الخشن $\vec{N}$ وهو عكس اتجاه $\vec{P}$ أى رأسى إلى أعلى ، وله نفس خط عمل الوزن $\vec{p}$.
- قوة الشد $\vec{F}$ وهى فى اتجاه أفقى – وهو الاتجاه الموجب للمحور X -
- قوة الاحتكاك $\vec{T}$ وهى فى الاتجاه الأفقى المعاكس للحركة المزمعة أى فى الاتجاه السالب لمحور X – انظر اتجاه المحاور بالشكل 5.2 .

ويمكننا أن نكتب معادلات الاتزان التالية فى اتجاه كل من المحورين الأفقى والرأسى :

$$\vec{P} = \vec{N} \quad , \quad \vec{F} = \vec{T} \quad \text{......................} \quad (5.2)$$

هذا ويمكن إيجاد محصلة كل من القوتين $\vec{N}$ و $\vec{T}$ ولتكن $\vec{R}$ حيث :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \quad \text{..........................} \quad (5.3)$$

وتكون قيمة $\vec{R}$ كما يلى :

$$|\vec{R}| = \sqrt{(N)^2 + (T)^2} \quad \text{..............................} \quad (5.4)$$

أما اتجاهها فنفترض أنه يصنع زاوية مقدارها α مع المحور الرأسى بحيث :

$$\tan \alpha = \frac{|T|}{|N|} \quad \text{................................} \quad (5.5)$$

نلاحظ من المعادلة (5.2) أنه بزيادة قيمة القوة $\vec{F}$ تزداد قيمة قوة الاحتكاك $\vec{T}$ وذلك مع ثبات كل من الوزن $\vec{P}$ ورد الفعل $\vec{N}$.

obeikandl.com

وبناء على المعادلتين (5.3), (5.4) فإن قيمة $\vec{R}$ لابد أن تزداد بزيادة $\vec{T}$ وذلك رغم ثبات $\vec{N}$. ومن المعادلة (5.5) نجد أن الزاوية α لابد أن تزداد قيمتها حيث إنها تتناسب طردياً مع قوة الاحتكاك $\vec{T}$. وتظل الزيادة فى قيمة α – تبعاً لزيادة قوة الاحتكاك $\vec{T}$ – حتى نصل إلى الحالة الثانية من دراستنا وهى الحالة ب .

الحالة (ب) $F = F_0$:

فى هذه الحالة تكون الخزنة على وشك الحركة إلا أنها مازالت فى حالة أتزان – ليكن نهاية طور الاتزان – ومن ثم فيمكن تطبيق المعادلات من (5.2) إلى (5.5) على تلك الحالة علماً بأن المعادلة (5.5) سوف يطرأ عليها تغيير بسيط وذلك نتيجة لبلوغ قوة الاحتكاك أقصى قيمة لها . إذ أن α فى هذه الحالة ستبلغ أيضاً قيمتها العظمى ويرمز لها بالرمز ϕ حيث :

$$\tan \phi = \frac{|T|}{|N|} = \mu \qquad \ldots\ldots (5.6)$$

وتعرف ϕ بأنها زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح الخشن وهى تختلف تبعاً للمادة المصنوع منها السطح ، وتعتبر خاصية من خواص المادة ، ويمكن تعيينها معملياً إذ أنها ثابتة لكل مادة . وتعرف ϕ كذلك بأنها القيمة الحدية (أو العظمى) للزاوية α .

ويمكن أن يعبر كذلك عن الاحتكاك بما يعرف بمعامل الاحتكاك الإستاتيكى μ وهو مرتبط بالزاوية ϕ كما هو واضح من المعادلة (5.6) . وبديهى أن معامل الاحتكاك الإستاتيكى يعتمد على طبيعة السطح .

يمكن أن نكتب بناء على المعادلة (5.6) أن شرط الاتزان هو :

$$|\vec{T}| < \mu |\vec{N}| \qquad \ldots\ldots (5.7)$$

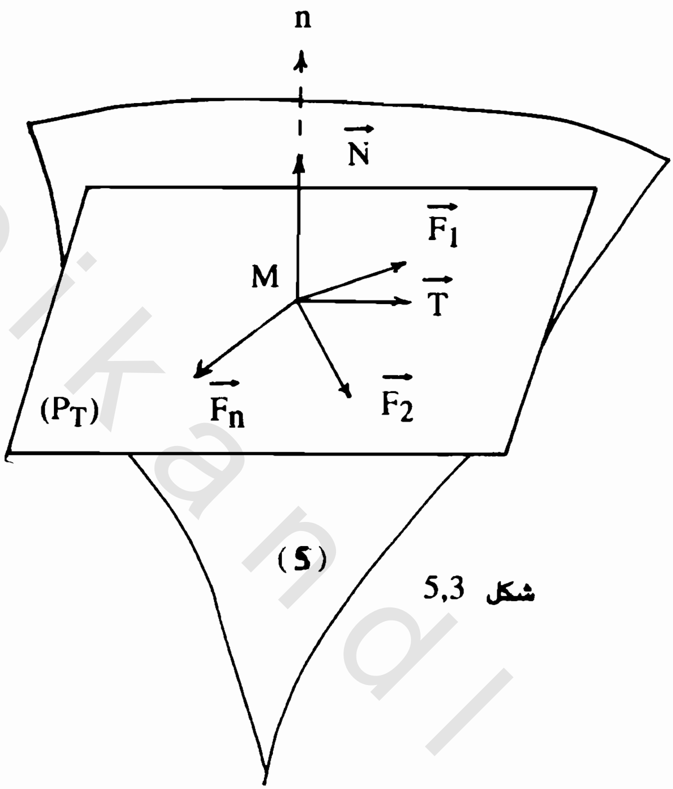
وتعرف المعادلة (5.7) بأنها حالة الاتزان العادية مثل الحالة (أ) .

أما حالة الاتزان الحدى (الحالة « ب ») فإن المعادلة (5.7) تصبح :

$$|\vec{T}| = \mu |\vec{N}| \qquad \ldots\ldots (5.8)$$

ملاحظة هامة : تكون قوة الاحتكاك $\vec{T}$ دائماً عكس الاتجاه المتوقع للحركة .

5.2 اتصال نقطة مادية بسطح خشن :



شكل 5,3

لنفترض أن النقطة المادية M تتصل بالسطح الخشن (s) شكل 5.3 . مجموعة القوى المتلاقية $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، ..... $\vec{F}_n$

تؤثر على هذه النقطة المادية وبالطبع نجد رد الفعل والذى يكون عمودياً على المستوى (P_t) وهو مستوى مماس ، وحيث إن السطح خشن فلابد أن توجد قوة الاحتكاك $\vec{T}$.

obeikandi.com

المعادلة (3.7) والتى تحدد شرط الاتزان تكتب فى حالة وجود الاحتكاك كما يلى :

$$\vec{N} + \vec{T} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.9)$$

ويجب كذلك تحقيق الشرط الخاص بالاحتكاك :

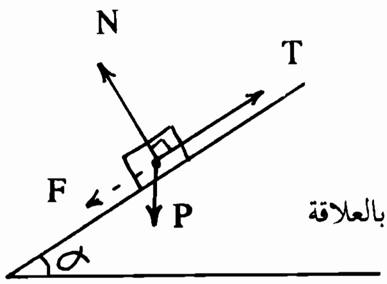
$$|T| < \mu |N| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.10)$$

حيث $\vec{T}$ (قوة الاحتكاك) تصنع دائماً زاوية قائمة مع رد فعل السطح $\vec{N}$ وبالتالى فهى فى مستوى مماس (P_t) انظر شكل 5,3 .

5.3 أمثلة محلولة :

١ - هناك جسم ينزل على سطح مائل خشن بسرعة ثابتة أعطيت له لحظة انطلاقه . فإذا علم أن هذا السطح يميل على الأفقى بزاوية مقدارها α . أوجد قيمة معامل الاحتكاك μ لهذا السطح بدلالة زاوية الميل، α .

الحـــل :



لدينا من المعادلة (5.8) :

$$T = \mu N \ \ldots\ldots \ (1)$$

ورد الفعل مرتبط بوزن الجسم بالعلاقة

$$N = P \cos\alpha \ \ldots\ldots \ (2)$$

وحيث إن الجسم ينزل على الميل بسرعة ثابتة إذاً فالقوة الابتدائية التى بدأ بها لا تتغير ، وبالتالى فإن مركبة الجسم فى اتجاه السطح لا تؤثر على الحركة ، ومن ثم فإن هذه المركبة تكون :

$$F = P \sin\alpha \ \ldots\ldots\ldots \ (3)$$

وبما أن الجسم يتحرك فالاحتكاك أصبح غير قادر على منع الحركة وهو فقط يساوى المركبة للوزن فى اتجاه الحركة حيث إن السرعة الابتدائية لا يؤثر فيها الاحتكاك فهى ثابتة :

$$F = T \quad .... \quad (4)$$

بالتعويض فى المعادلة (4) عن كل من F و T من المعادلات الثلاث السابقة لنجد :

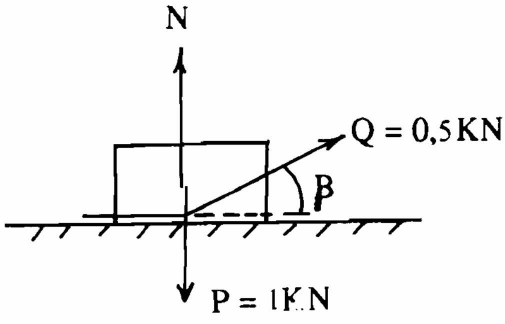
$$P \sin \alpha = \mu N = \mu P \cos \alpha$$

$$\therefore \mu = \tan \alpha$$

أى أن معامل الاحتكاك هو ظل زاوية الميل α ، وبالتالى فإن α لابد أن تساوى زاوية الاحتكاك الداخلى ϕ للسطح المائل .

$$\tan \phi = \tan \alpha \rightarrow \phi = \alpha$$

2 - صندوق وزنة 1 KN موضوع على سطح خشن أفقى زاوية الاحتكاك الداخلى له مقدارها $30°$. أوجد الزاوية β على الأفقى التى يجب أن تؤثر بها قوة مقدارها 0.5 KN حتى تستطيع تحريك الصندوق .



الحـــل :

نلاحظ فى هذه المسألة أننا مازلنا فى حالة الاتزان حيث القوة Q هى التى سوف تبدأ فى تحريك الصندوق ، وهى الحالة (ب) . ومن ثم نطبق معادلات الاتزان (5.2) :

$$N = P - Q \sin\beta = 1 - 0.5 \sin\beta \qquad (1)$$

$$T = Q \cos\beta = 0.5 \cos\beta \qquad (2)$$

أما المعادلة (5.8) فإنها تعطينا :

$$T = N \tan\phi = (1-0.5 \sin\beta) \tan 30° \qquad (3)$$

بالتعويض عن T من المعادلة (2) فى (3) نجد :

$$0.5 \cos\beta = 0.577 - 0.289 \sin\beta$$

$$\cos\beta = 1.154 - 0;578 \sin\beta$$

$$\cos^2\beta = 1.333 - 1.334 \sin\beta + 0.334 \sin^2\beta$$

$$1 - \sin^2\beta = 1.333 - 1.334 \sin\beta + 0.334 \sin^2\beta$$

$$1,334 \sin^2\beta - 1.334 \sin\beta + 0.333 = 0$$

ومنها :

$$\sin\beta = 0.5 \qquad \rightarrow \beta = 30°$$

3 – سلم $AB = 2L$ وزنه $\vec{p}$ يستند على حائط رأسى أملس ، ونهايته الأخرى نستند على الأرض حيث معامل الاحتكاك μ :

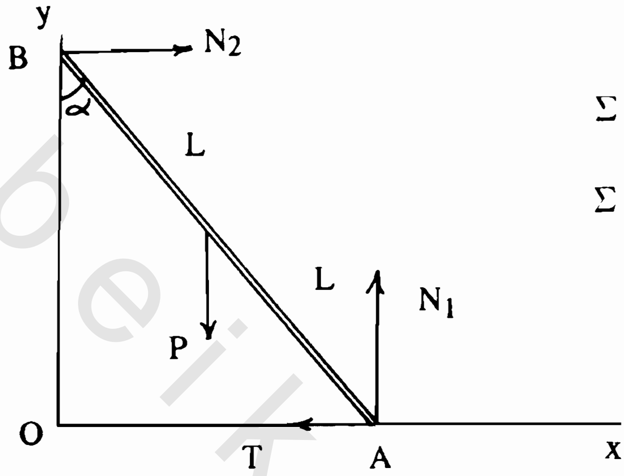
(أ) أوجد ردود الأفعال العمودية عند نقط التلامس .

(ب) الزاوية α التى يجب أن يصنعها السلم مع الرأسى حتى يظل فى حالة اتزان .

obeikandi.com

الحـــل :

معادلات الاتزان :



$$\Sigma x = 0 \rightarrow N_2 - T = 0$$

$$\Sigma y = 0 \rightarrow N_1 - P = 0$$

ويمكن كتابة معادلة الاتزان العزوم
حول النقطة A لنحصل على :

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow P \ell \sin\alpha - 2N_2 \cos\alpha = 0$$

ومن هذه المعادلات الثلاث نحصل على :

$$N_1 = P \quad , \quad N_2 = \frac{1}{2} P \tan\alpha \quad , \quad T = \frac{1}{2} P \tan\alpha$$

ولإيجاد الزاوية α نطبق المعادلة (5.8) :

$$T = \mu N_1$$

$$\frac{1}{2} P \tan\alpha = \mu P \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = 2\mu$$

obeikandl.com

5.4 تمـــارين :

1 – جسم يزن 200 نيوتن موضوع على سطح خشن يميل على الأفقى بزاوية مقدارها 15° . والمطلوب إيجاد زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح المائل لكى يكون الجسم فى حالة اتزان .

2 – كرة موضوعة على أسطوانتين كما بالشكل التالى . فإذا كانت الأسطوانتان موضوعتان على سطح أفقى خشن ($\phi = 30°$) يمنع المجموعة من الحركة . فإذا كان نصف قطر الكرة 10 سم ، ونصف قطر كل أسطوانة 15 سم . ووزن الكرة 250 نيوتن فى حين أن وزن كل أسطوانة 300 نيوتن ، والمطلوب – إذا أمكن – إيجاد وضع الاتزان تبعاً لهذه البيانات .

3 – قضيب AB وزنه 100نيوتن . من الطرف B شد بقوة مقدارها 50 نيوتن تميل على الأفقى بزاوية α . أما الطرف الأخر A فهو مستند على سطح أفقى خشن بحيث يصنع زاوية مدارها 30° . فإذا كان طول القطيب 2 متر . فالمطلوب فى حالة الاتزان ما يلى :

(أ) زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح الخشن فى حالة ($\alpha = 85°$) .

(ب) الحد الأدنى للزاوية α حتى يصبح الاتزان ممكناً .