# الباب الثالث

# الاتـــزان

## 3.1 اتزان نقطة مادية حــرة :

تعريف : النقطة المادية أو الجزىء من المادة هى جسم صغير جداً يمكن إهمال أبعاده ويحدد موقعه بواسطة إحداثياته الثلاثة .

فإذا فرضنا أن هناك نقطة مادية واقعة تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية

$$\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \ldots , \vec{F}_i , \ldots \vec{F}_n$$

فإن هذه القوة يمكن أن ينشأ عنها إزاحة للجسم أو دوران له .

والإزاحات تكون فى اتجاه خط عمل القوة المؤثرة ، أما الدورانات فإنها تنشأ عن عزم هذه القوى حول نقطة ما ، ويكون أيضاً الدوران حول نفس النقطة ( المحور ) .

## 3.2 توازن الإزاحات :

لكى يحدث توازن إزاحات النقطة المادية فيجب أن تكون محصلة القوى المؤثرة عليها صفراً ، أى :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R} = \vec{0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.1)$$

والمعادلة (3.1) يمكن كتابتها بالنسبة للمحاور الثلاثة OX , OY , OZ كما يلى :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}_i = 0 , \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \vec{Y}_i = 0 ,$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \vec{Z}_i = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.2)$$

المعادلات (3.2) تعرف بمعادلات الاتزان بالنسبة للإزاحات .

وتختزل المعادلات (3.2) إلى معادلتين فقط فى حالة قوى فى المستوى . فمثلاً إذا كانت القوى فى المستوى XOY فإننا نجد :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 , \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3)$$

## 3.3 تــوازن الدورانات :

كما سبق فإن الدورانات تنشأ عن عزوم القوى حول نقطة ، فإذا افترضنا أن هذه النقطة هى 0 وهى نقطة أصل المحاور الثلاثة OX , OY , OZ فلحدوث الاتزان يجب أن يكون مجموع العزوم لكل القوى حول 0 مساوياً للصفر ، وهذا يمكن كتابته فى المعادلة :

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = 0$$

$$\vec{M}_0 = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.4)$$

وهذه المعادلة تصبح بالنسبة للمحاور الثلاثة كما يلى :

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^{n} (Z_i x_i - z_i X_i) = 0 \\ M_x &= \sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \\ M_z &= \sum_{i=1}^{n} (x_1 Y_i - X_i y_i) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.5)$$

وفى حالة وجود القوى فى المستوى XOY مثلاً يكون شرط اتزان الدورانات هو :

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - X_i y_i) = 0 \qquad (3.6)$$

شروط الاتزان الكاملة تكون تامة فى حالة تحقيق المعادلات (3.2) , (3.5) إذا كانت القوى فى الفراغ ( ست معادلات ) .

ويكتفى بتحقيق المعادلات (3.3) , (3.6) فى حالة القوى بالمستوى ( ثلاثة شروط ) .

## 3.4 اتزان نقطة مادية معرضة لاتصال ما ( بدون احتكاك ) :

تعريف : يقال إن نقطة مادية معرضة للاتصال إذا ما كانت مجبرة على البقاء على منحنى ما ، أو سطح مادى أملس ، والقوى المؤثرة على النقطة المادية فى هذه الحالة تكون :

### 3.41 قوى خارجية فعالة :

يقصد بالقوى الخارجية الفعالة مجموعة القوى ( قوة أو عزم ) التى تؤدى إلى إزاحة أو دوران الجسم ، أى هى القوى التى تقوم بالفعل ، ويمكن تصنيف تلك القوى الخارجية كما يلى :

قوة تأثير مباشرة ( قوة مركزة ) أو حمل ، ويمكن تقسيم الأحمال إلى :

١ – قوى الحجوم مثل أوزان الأجسام .

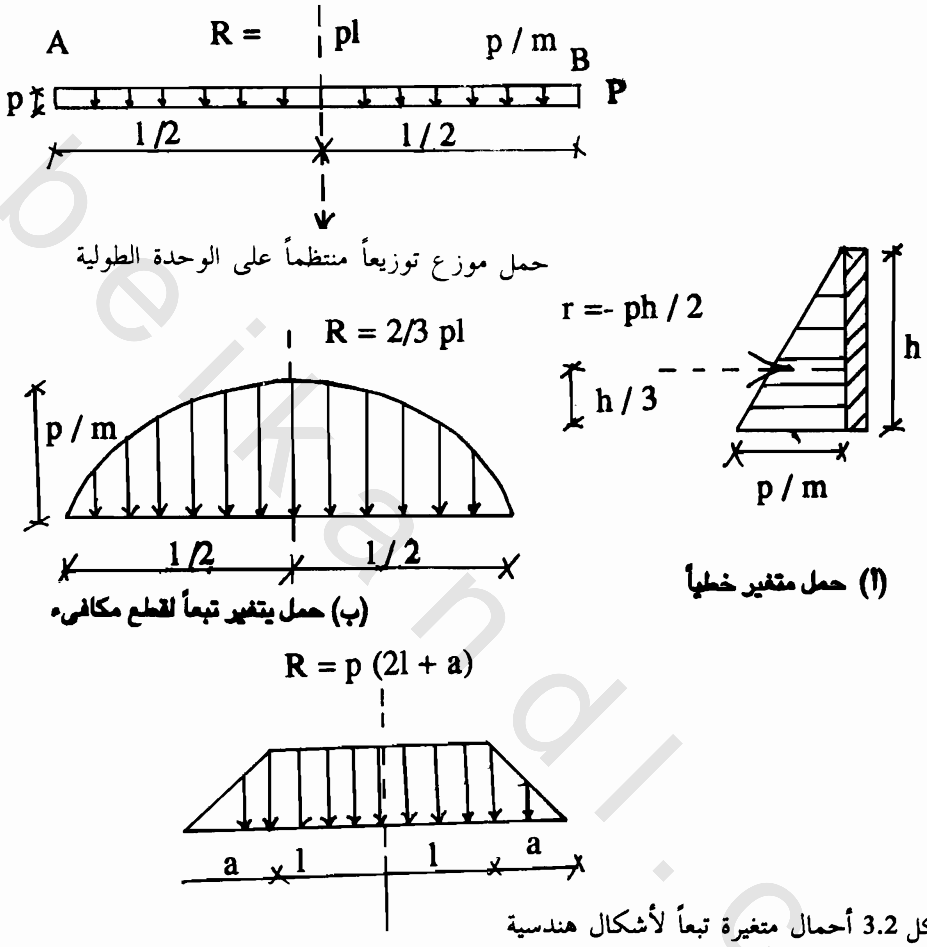
٢ – قوى سطحية كالقوى الخارجية التى تؤثر على سطوح الأجسام مثل ضغط الماء أو التربة أو الثلوج .... الخ .

والقوى السطحية يمكن بدورها أن تقسم إلى عدة أنواع :

( أ ) قوى موزعة توزيعاً منتظماً على الوحدة الطولية للسطح ، حيث تكون محصلتها $\overrightarrow{R}$ فى المنتصف ، شكل 3,1 .

(ب) قوى توزيعها متغير خطياً أو تبعاً لقطع مكافىء أو شبه منحرف .... إلخ .

شكل 3,2 . أحمال متغيرة تبعاً لأشكال هندسية .




(أ) حمل متغير خطياً

(ب) حمل يتغير تبعاً لقطع مكافىء

شكل 3.2 أحمال متغيرة تبعاً لأشكال هندسية

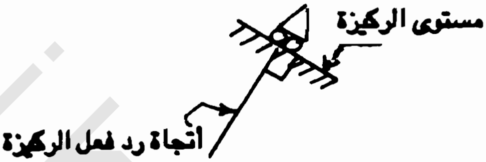
(ج) حمل يتغير تبعاً لشبه منحرف

## 3.42 ردود الأفعـــال :

ردود الأفعال هى عبارة عن قوى – قوة أو عزم – يقصد بها منع الإزاحات والدورانات ، أو منع حركة المنشآت بصفة عامة ، وردود الأفعال تنشأ عن وجود ركائز للمنشأ المراد حفظه فى حالة اتزانه ، وسوف ندرس – على سبيل المثال لا الحصر – الركائز الممكنة بالمستوى .

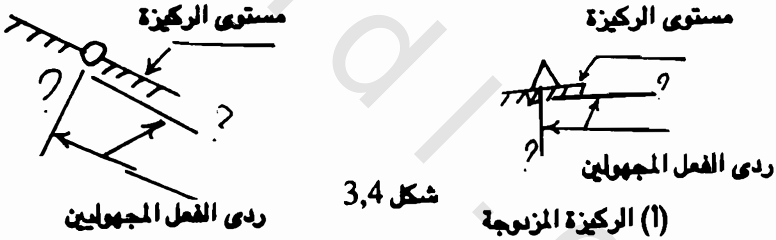
من المعروف أن فى المستوى لدينا ثلاثة أنواع ممكنة للحركة ، إزاحة أفقية ، وأخرى رأسية ، فضلاً عن الدوران أى ثلاث حريات للحركة ، وتبعاً لذلك الركائز يمكن أن تكون :

١ - **ركائز بسيطة** : شكل 3,3 : فى هذه الحالة تمنع الإزاحة فى الاتجاه العمودى على مستوى الركيزة فقط ، ومن ثم فلا يوجد إلا رد فعل واحد فى حين حرية الحركة متاحة فى اتجاهين : ( الدوران + الاتجاه الموازى لمستوى الركيزة ) .




**شكل 3,3 – الركيزة البسيطة**

٢ - **ركائز مزدوجة أو مفصلة** : يمكن لهذه الركيزة أن ترسم بطريقتين شكل 3,4 أ ، ب ، وبهذه الركيزة حرية حركة واحدة وهى الدوران .

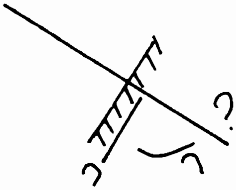



**شكل 3,4**

**(أ) الركيزة المزدوجة**

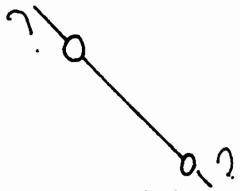
**(ب) المفصلة**

٣ - **التثبيت** : ويمكن أن يرسم كما هو موضح بالشكل 3,5 حيث تمنع فيه جميع أنواع الحركة بالمستوى ، ومن ثم فيوجد ثلاثة ردود أفعال وعدد حريات الحركة يساوى صفر .



**شكل 3,5 – التثبيت وبه ثلاث ردود أفعال مجهولة.**

٤ – **البندول** : وهذه الركيزة تعتبر مثل الركيزة البسيطة من حيث إنها تتحمل رد فعل واحد ، وتسمح بالدوران وبالإزاحة فى الاتجاه العمودى على محورها ، وهى ترسم كما بالشكل 3,6 .

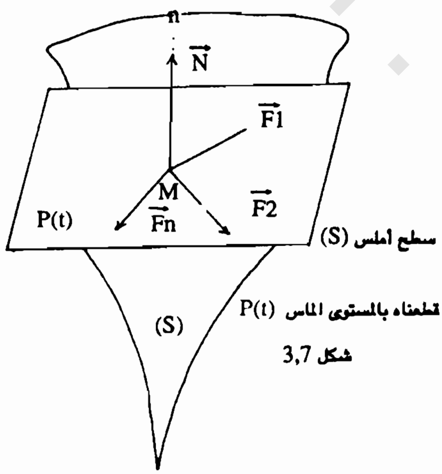


**البندول وبه رد فعل واحد باتجاه محوره شكل 3,6**

بعد معرفة القوى الخارجية وردود الأفعال ( وتعرف ردود الأفعال بقوى الاتصال كذلك ) ، يمكننا الآن دراسة اتصال النقطة المادية ، وكتابة معادلات الاتزان لها .

## 3.5 اتصال مثالى ( دون احتكاك ) :

فى هذه الحالة تتصل النقطة المادية بسطح أملس تماماً (S) وهو المبين بالشكل (3,7) . فلو افترضنا أن مجموع القوى المؤثرة عليها هى : $\vec{F}_n$ و ... و $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_1$ ، ولو فرضنا أن رد فعل السطح عليها هو $\vec{N}$ حيث يكون اتجاه رد الفعل عمودياً على المستوى المماس للسطح $(P_t)$ كما هو واضح بالشكل 3,7 .




**شكل 3,7**

ويكون شرط الاتزان فى هذه الحالة على الصورة :

$$\vec{N} + \Sigma \vec{F_i} = \vec{0} \qquad (3.7)$$

$$\vec{N} + \vec{R} = 0$$

النموذج الذى اخترناه بالشكل 3,7 ليس الوحيد ، ولكنه فقط مثال لعملية اتصال نقطة مادية بسطح ما ، فهذا السطح قد يستبدل بمنحنى أو قد يكون كرة ، وبالمثل يمكن استبدال النقطة المادية بأجسام صغيرة ، وتظل معادلات الاتزان دائماً كما سبق شرحه .

هذا ويجب أن نلاحظ أن معادلة الاتزان (3.7) تتغير فى حالة وجود قوى الاحتكاك ، وذلك كما سيأتى دراسته فى فصل الاحتكاك .

## 3.6 المنشآت المحددة والغير محددة استاتيكياً :

سوف تقتصر دراستنا على المنشآت بالمستوى فقط ، فلقد سبق بيان أن شروط الاتزان فى المستوى هى تحقيق المعادلات (3,3) , (3,6) ، وعلى وجه العموم فإن جميع أنواع المنشآت بالمستوى لابد وأن تخضع لأحدى الحالات الثلاث التالية :

( أ ) عدد ردود الأفعال = عدد معادلات الاتزان ، وهذا النوع يسمى محدداً إستاتيكياً .

(ب) عدد ردود الأفعال > عدد معادلات الاتزان ، ويعرف بالمنشأ الغير محدد إستاتيكياً .

( جـ) عدد ردود الأفعال < عدد معادلات الاتزان ، ويكون منشأ غير ثابت وهو نوع من المنشآت لا يصح أن يوجد على الإطلاق .

المعادلة التالية يمكنها تحديد نوعية المنشأ من الناحية الإستاتيكية :

$$n = (i\,b + r) - (i\,j + k) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.8)$$

حيث :

$b$ = عدد القضبان التى يتكون منها المنشأ .

$r$ = عدد ردود الأفعال .

$j$ = عدد الوصلات أو العقد .

$k$ = عدد الشروط الإضافية فإن لم توجد تصبح $k$ صفراً .

$i$ = عدد عادة يساوى 3 إلا فى حالة الكمرات المعرضة لأحمال رأسية فقط فيكون $i = 2$ .

وبناء على المعادلة (3.8) فيمكن أن نجد ما يلى :

$n$ = صفر ويكون المنشأ محدداً إستاتيكياً .

$n$ < صفر ومعناها منشأ غير ثابت .

$n$ > صفر منشأ غير محدد إستاتيكياً .

المعادلة (3.8) تستعمل فقط للمنشآت بالمستوى وإلا فيجب تغيير $i$ إلى 6 فى حالة الفراغ .

## 3.7 كيفية حساب ردود الأفعال للمنشآت المحددة إستاتيكياً :

تعتبر عملية حساب ردود الأفعال تطبيقاً هندسياً على مسائل الاتزان ، فردود الأفعال تحسب من معادلات الاتزان (3.3) , (3.6) ، وذلك فى حالة المنشآت بالمستوى . أما إذا كان المنشأ بالفراغ فإن ردود الأفعال توجد بتطبيق المعادلات (3.2) , (3.5) ، ويفترض أن المنشآت المراد حساب ردود أفعالها محددة إستاتيكياً ، وسوف يتضح ذلك من الأمثلة فى نهاية هذا الفصل .

## 3.8 حالات خاصة للاتزان :

نقصد بالحالات الخاصة تلك الحالات التى يمكنها أن تبسط معادلات الاتزان ، وهى فى نفس الوقت حالات شائعة ، ونحن ندرس حالتين :

١ – نقطة مادية متزنة تحت تأثير قوتين :

فى هذه الحالة لابد أن تكون القوتان لهما نفس خط العمل ونفس القيمة ، ولكن اتجاه كل منهما معاكس للأخرى وهذا لكى تكون محصلتهما صفراً .

٢ – نقطة مادية تحت تأثير ثلاث قوى :

لكى يحدث الاتزان فى هذه الحالة فيجب أن تكون القوى الثلاث متلاقية فى نقطة واحدة ، وذلك لأن محصلة قوتان منهما يجب أن تساوى قيمة القوة الثالثة ، ولكن فى اتجاه معاكس ومن هذا يمكننا أن نكتب النظرية التالية :

### نظرية القوى الثلاث :

إذا وقع جسم تحت تأثير ثلاث قوى وكان فى حالة اتزان فإن القوى الثلاث لابد أن تلتقى فى نقطة واحدة .

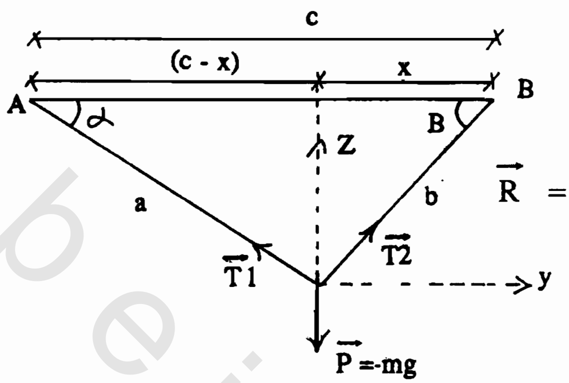
## 3.9 أمثلة محلولة :

١ – جسم كتلته m معلق بخيطين طولهما a و b فى مسمارين A و B . البعد الأفقى بين A و B مقداره C . الجسم فى حالة اتزان ، والمطلوب حساب الشد فى كل خيط .

**الحـــل :**

لنفرض أن P هو وزن الجســم $\therefore P = -m\vec{g}$

والإشارة السالبة ناشئة عن اتجاه المحاور المبين بالرسم . يمكن أن نكتب شرط الاتزان كما يلي :




$$\vec{R} = \vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} = \vec{0}$$

والآن نحاول إيجاد كل قوة فى صورة متجه مستقل كما يلى :

$$\vec{T_1} = - T_1 \cos \alpha \ \vec{j} + T_1 \sin \alpha \ \vec{K}$$

$$\vec{T_2} = - T_2 \cos \beta \ \vec{j} + T_2 \sin \beta \ \vec{K}$$

$$\vec{P} = - mg \ \vec{K}$$

بتطبيق معادلات الاتزان فى المستوى (3.3) ( فى هذه الحالة المستوى هو YOZ) . نحصل على :

$$T_2 \cos \beta - T_1 \cos \alpha = 0 \qquad (1)$$

$$T_1 \sin \alpha \sin \beta - mg = 0 \qquad (2)$$

$$T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta - mg = 0$$

من (1) و (2) يمكن أن نجد :

$$T_1 = \frac{mg \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta )} \quad , \quad T_2 = \frac{mg \cos A}{\sin (\alpha + \beta)}$$

ومن دراسة المثلث ABC نجد العلاقات التالية :

$$Z^2 + X^2 = b^2 \quad \rightarrow \quad Z^2 = b^2 - X^2 \qquad (3)$$

$$Z^2 + ( C - X )^2 = a^2 \rightarrow Z^2 = a^2 - ( c - x )^2 \qquad (4)$$

من المعادلتين (3) و (4) نجد :

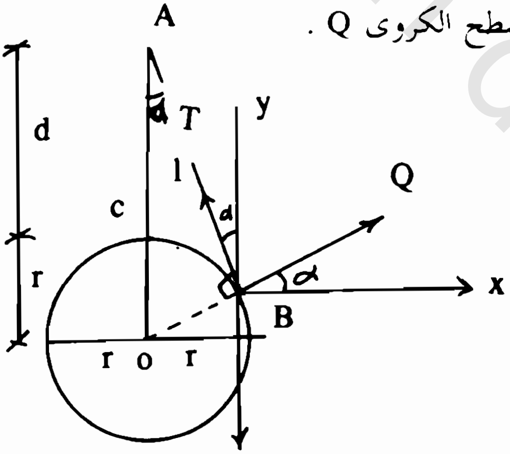
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 - x^2 + 2\,cx \quad \longrightarrow \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}$$

ومنها نحصل على :

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} \quad , \quad \cos\beta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}\right) \quad , \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}\right)$$

2ـ بلية B وزنها P ونصف قطرها مهمل . معلقة فى نقطة A بواسطة خيط AB ، وترتكز على سطح كرة نصف قطرها r . المسافة ما بين A وسطح الكرة هى AC . فإذا علم أن : AC = d وأن طول الخيط AB = l وأن الخط OCA رأسى . أوجد الشد T فى الخيط ورد فعل السطح الكروى Q .




الحـــل :

يمكن أن نكتب معادلات القوى الاتجاهية كما هو واضح من هندسة الشكل :

$$\vec{Q} = (\cos\alpha)\,Q\,\vec{i} + (\sin\alpha)\,Q\,\vec{j}$$

$$\vec{T} = (-\sin\alpha)\,T\,\vec{i} + (\cos\alpha)\,T\,\vec{j}$$

$$\vec{P} = -\,mg\,\vec{j}$$

بما أن المجموعة متزنة فإننا نطبق المعادلات (3.1) و (3.3) لتصبح فى هذه الحالة :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{Q} + \vec{P} = 0$$

$$X = \sum_{i=L}^{3} X_i = Q\cos\alpha - T\sin\alpha = 0$$

$$Y = \sum_{i=L}^{3} Y_i = Q\sin\alpha + T\cos\alpha - mg = 0$$

من المعادلة (1) نجد أن :

$$Q = T\tan\alpha = T\frac{r}{l}$$

حيث من هندسة الشكل : $(\triangle\ OBA)$

$$\tan\alpha = \frac{r}{L}$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{d+r} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{L}{d+r}$$

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلة (2) نجد :

$$T\frac{r}{\ell}\frac{r}{d+r} + T\frac{L}{d+r} = P$$

$$T\left(\frac{1}{d+r}\right)\left(\frac{r^2+l^2}{l}\right)P$$

$$\frac{T}{L}\left(\frac{1}{d+r}\right) = \left(\frac{P}{L^2+r^2}\right) \longrightarrow T = P\frac{\ell}{d+r}$$

ومن المعادلة (1) نجد أن :

$$Q = P\frac{r}{d+r}$$

**حل آخر لنفس المسألة :**

يظهر من الشكل أن المثلث OAB يمكن اعتباره مثلث للقوى حيث :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{T} \quad , \quad \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{P} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{Q}$$

ويمكن بالتالى كتابة النسب التالية :

$$\frac{\overrightarrow{T}}{\overrightarrow{BA}} = \frac{\overrightarrow{P}}{\overrightarrow{A0}} = \frac{\overrightarrow{Q}}{\overrightarrow{0B}} = 1$$

وهذه يمكن كتابتها كما يلى :

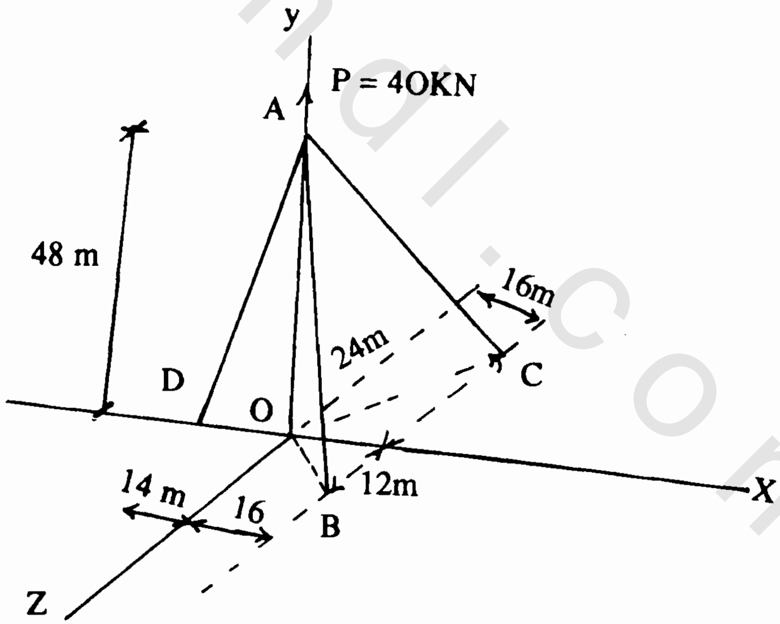
$$\frac{T}{\ell} = \frac{R}{d + r} = \frac{Q}{r}$$

ومنها نحصل على :

$$T = P \frac{l}{d + r}$$

$$Q = P \frac{\ell}{d + r}$$

3 – قوة مقدارها 140KN نقطة تأثيرها هى A ( انظر الشكل ) . ثلاثة كابلات AC , AD , AB تشد هذه القوة . فإذا علم أن المجموعة فى حالة اتزان . أوجد قيمة الشد فى كل كابل من الكابلات الثلاثة .



الحـــل :

من شرط الاتزان يمكن كتابة المعادلة الاتجاهية التالية :

$$\vec{P} = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AD}$$

ويمكن كتابة معادلة اتجاهية لكل قوة كما يلى :

$$\vec{T}_{AB} = \cos\alpha_1\, T_{AB}\, \vec{i} + \cos\beta_1\, T_{AB}\, \vec{j} + \cos\gamma_1\, T_{AB}\, \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AC} = \cos\alpha_2\, T_{AC}\, \vec{i} + \cos\beta_2\, T_{AC}\, \vec{j} + \cos\gamma_2\, T_{AC}\, \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AD} = \cos\alpha_3\, T_{AD}\, \vec{i} + \cos\beta_3\, T_{AD}\, \vec{j} + \cos\gamma_3\, T_{AD}\, \vec{k}$$

ولحساب الزوايا أعلاه فلابد من حساب أطوال الكابلات ، وهى من هندسة الشكل كما يلى :

$$AB = \sqrt{(16)^2 + (12)^2 + (48)^2} = 52 \text{ m}$$

$$AC = \sqrt{(24)^2 + (16)^2 + (48)^2} = 56 \text{ m}$$

$$AD = \sqrt{(48)^2 + (14)^2} = 50 \text{ m}$$

وتصبح المعادلات الثلاث أعلاه كما يلى :

$$\vec{T}_{AB} = \frac{16}{52} T_{AB}\, \vec{i} + \frac{48}{52} T_{AB}\, \vec{j} + \frac{12}{52} T_{AB}\, \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{16}{56} T_{AC}\, \vec{i} + \frac{48}{56} T_{AC}\, \vec{j} - \frac{24}{56} T_{AC}\, \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AD} = \frac{14}{50} T_{AD}\, \vec{i} + \frac{48}{50} T_{AD}\, \vec{j} + \frac{0}{50} T_{AD}\, \vec{k}$$

وبتطبيق المعادلات (3.2) نحصل على :

$$\frac{16}{52} T_{AB} + \frac{16}{56} T_{AC} - \frac{14}{50} T_{AD} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{48}{52} T_{AB} + \frac{48}{56} T_{AC} + \frac{48}{50} T_{AD} = 140 \qquad (2)$$

$$\frac{12}{52} T_{AB} + \frac{24}{56} T_{AC} = 0 \qquad (3)$$

بحل المعادلات الثلاث نحصل على :

$$T_{AB} = 47,182 \text{ KN} \quad , \quad T_{AC} = 25,408 \text{ KN} \quad , \quad T_{AD} = 77,775 \text{ KN}$$

4 – فى المثال السابق يراد تغيير موقع النقطة B بحيث تصبح على المحور OZ . فإذا علم أن الشد فى الكابل AC قيمته 70KN أوجد موضع B وكذلك قيمة الشد فى كل من الكابلين AB , AD بحيث تصبح المجموعة متزنة .

**الحـــل :**

بعد تغيير موضع B لتصبح على المحور OZ فإن المعادلات الثلاث بالمثال السابق تصبح :

$$\frac{16}{56} T_{AC} - \frac{14}{50} T_{AD} = 0 \qquad (1)$$

$$\cos\beta\, T_{AB} + \frac{48}{56} T_{AC} + \frac{48}{50} T_{AD} = 140 \qquad (2)$$

$$\sin\beta\, T_{AB} - \frac{24}{56} T_{AC} = 0 \qquad (3)$$

حيث $\beta$ هى الزاوية التى يصنعها الكابل AB مع المحور الرأسى OY من المعادلة الأولى نجد :

$$T_{AD} = \frac{16}{56} \times \frac{50}{14} (70) = 71,429 \text{ KN}$$

بالتعويض عن $T_{AC}$ و $T_{AD}$ فى المعادلتين الثانية والثالثة نجد :

$$\cos\beta \, T_{AB} + \frac{48}{56} \times 70 + \frac{48}{50} \times 71,429 = 140 \qquad (4)$$

$$\sin\beta \, T_{AB} - \frac{24}{56} \times 70 = 0 \qquad (5)$$

من هاتين المعادلتين نجد أن :

$$\tan \beta = 2,625$$

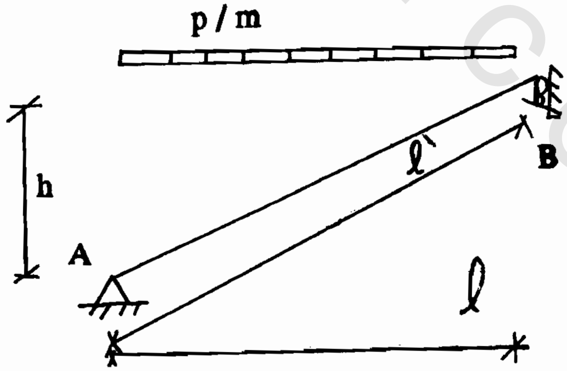
$$\beta = 65,15°$$

بمعرفة قيمة الزاوية $\beta$ أصبح محدداً وإحداثياتها هى : (0,0,126)

أما قيمة الشـد فى الكابل AB فنحصل عليه من المعادلة (5)

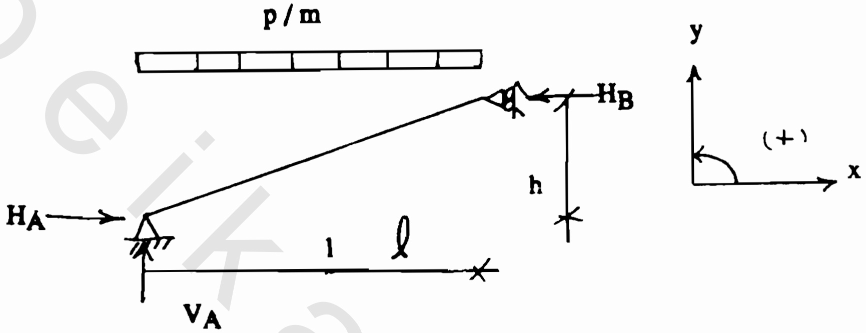
$$T_{AB} = \left( \frac{24}{56} \times 70 \right) \frac{1}{\sin\beta} = 32,102 \text{ KN}$$

5 – أوجد ردود أفعال الكمرة AB المعرضة للحمل P الموزع توزيعاً منتظماً على الوحدة الطولية للمسقط الأفقى للكمرة .



**الحـــل :**

نفترض أن اتجاه ردود الأفعال كما هو موضح بالشكل أسفله :




بافتراض أن الاتجاه الموجب للمحاور والعزوم هو المبين بالشكل ، وبتطبيق معادلات الاتزان الثلاث بالمستوى نجد :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A = p\ell \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow H_B\, h - p e \frac{\ell}{2} = 0 \rightarrow H_B = \frac{P L^2}{2h} \leftarrow$$

بدلاً من استعمال معادلة الاتزان الثالثة فإننا نستعمل معادلة العزوم حول الطرف الآخر ( أى B ) تساوى صفراً وذلك لإيجاد $H_A$ ونحقق النتائج بمعادلة الاتزان الثالثة :

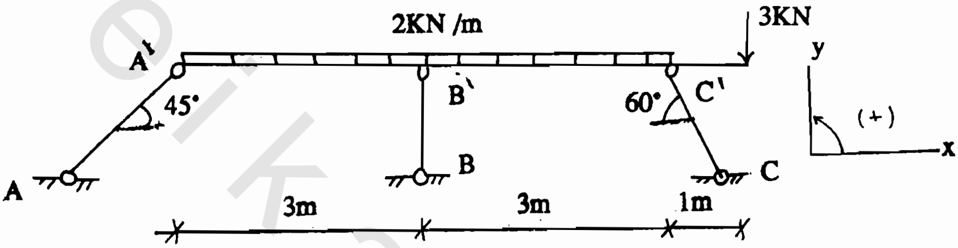
$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow H_A\, h - V_A \ell + p\ell \frac{\ell}{2} = 0$$

$$\therefore h H_A = p\ell\ell - p\frac{\ell^2}{2} \rightarrow H_A = \frac{p\ell^2}{2h} \rightarrow$$

ويتضح من هذه النتيجة أن المعادلة الثالثة للاتزان تتحقق حيث :

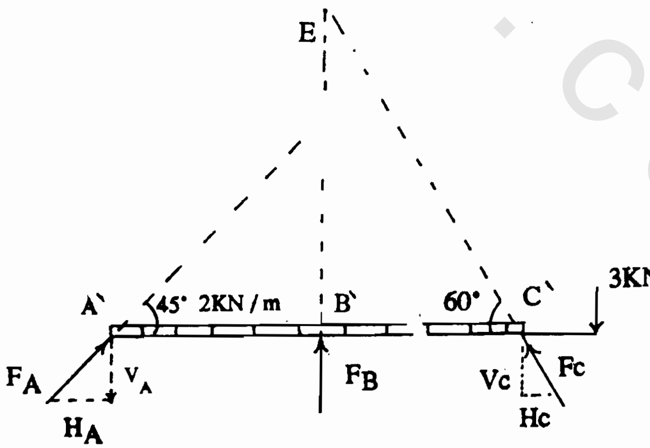
$$\Sigma X = H_A - H_B = P \frac{L^2}{2h} - \frac{I^2}{2h} = 0$$

6 – المنشأة AA`BB مرتكز على ثلاثة محاور بندولات هى AA` , BB` , CC` ومعرض للحمل المبين بالشكل ، أوجد قيمة القوة بكل بندول .




الحـــــل :

حيث إن البندولات الثلاثة لا تتحمل الاقوى فى اتجاه محورها إذاً فيمكن أن تستبدل بواسطة قوى معلومة الاتجاه ومجهولة القيمة كما بالشكل أسفله .



$$V_A = H_A = F_A \cos 45° = \frac{F_A}{\sqrt{2}}$$

$$V_C = F_C \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} F_C \quad , \quad H_C = F_C \cos 60° = \frac{F_c}{2}$$

$\Sigma M_D = 0 \rightarrow$ (D محددة بالرسم أعلاه )

**بالتعويض عن $V_C$ و $H_C$ بدلالة $F_C$ نجد :**

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_C (3) - \frac{F_c}{2} (3) - 3 \times 4 = 0$$

$$\therefore F_C = 10{,}928 \text{ KN}$$

وتكون قيم مركبتيها $V_C$ و $H_C$ كما يلى :

$$V_C = 10{,}928 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9.464 \text{ KN} \uparrow$$

$$HC = 10.928 \times \frac{1}{2} = 5.464 \text{ KN}$$

$\Sigma M_E = 0$ ( E محددة بالشكل السابق )

$$- V_A (\overline{AB}) + H_A (BE) - 3 \times 4 = 0$$

بالتعويض عن $V_A$ و $H_A$ بدلالة $F_A$ نجد :

$$- \frac{F_A}{\sqrt{2}} (3) + \frac{F_A}{\sqrt{2}} (\overline{C'B'} \tan 60°) - 3 \times 4 = 0$$

ومنها يمكن إيجاد المركبتين الأفقية والرأسية :

$$\therefore F_A = 7{,}727 \text{ KN}$$

$$V_A = \frac{7.727}{\sqrt{2}} = 5.464 \text{ KN}$$

$$H_A = \frac{7.727}{\sqrt{2}} = 5.464\ KN \rightarrow$$

$$\Sigma M_{C'} = 0 \quad \rightarrow \quad - V_A(6) - V_B(3) + 2X6X - 3XI = 0$$

$$\therefore\ V_B = 0.072\ KN \uparrow$$

تحقيق النتائج :

$$\Sigma X = H_A - H_C = 5.464 - 5.464 = 0$$

$$\Sigma Y = V_A + V_C + V_B - 2 X 6 - 3 = 5.464 + 9.464 - 15 + 0.072 = 0$$

## 3.10 – تمـــارين :

1 – نجفة دائرية وزنها (100N) تحملها ثلاث سلاسل تصنع أنصاف الأقطار التى تربطها مع المركز فى المسقط الأفقى زوايا مقدارها (120°) . المطلوب إيجاد الشد فى كل سلسلة .

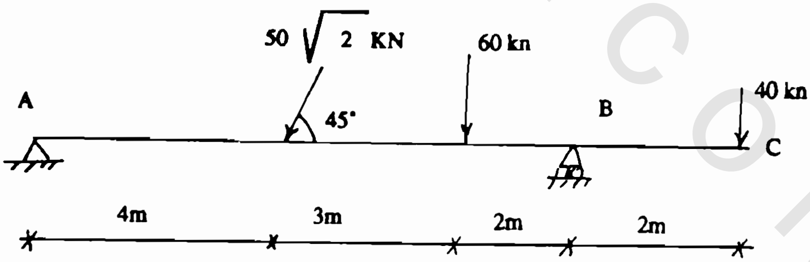
2 – قوتين $(|F_2| = 60N)$ , $(|F_1| = 50N)$ خطاعملهما $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AO}$ على الترتيب حيث A(1,3,0) ، B(0,1,2) ، O(0,0,0) . والمطلوب إيجاد القوة التى تتزن مع هاتين القوتين .

3 – رجل يشد قضيباً وزنه (100N) بقوة مقدارها (50N) من أحد طرفيه . والطرف الآخر للقضيب مستند على الأرض . فإذا علم أن طول القضيب (2m) وفى وضع الاتزان أصبحت الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأرض 30° . والمطلوب إيجاد :

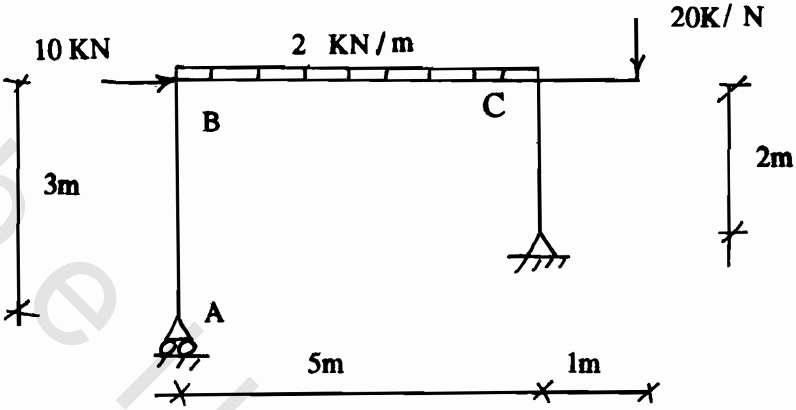
( أ ) زاوية ميل قوة الشد على الأفقى فى وضع الاتزان .

(ب) ردود أفعال الأرض .

4 – المطلوب إيجاد ردود أفعال الكمرة التالية :

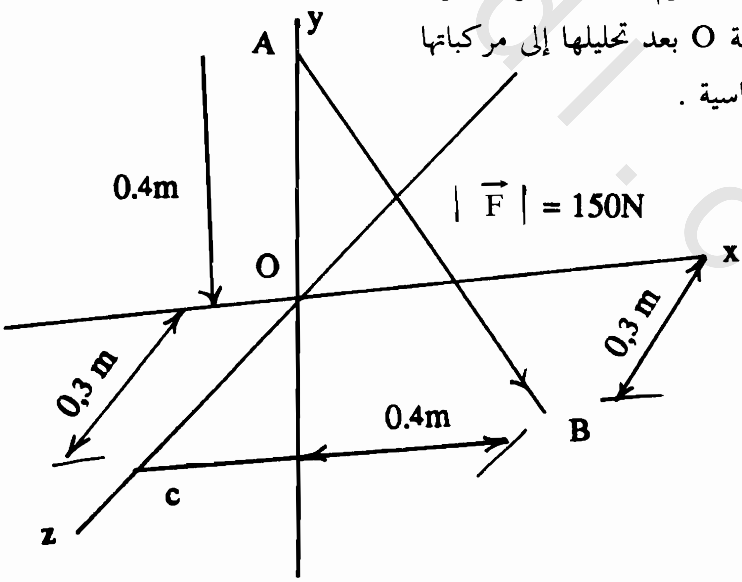


5 – أوجد ردود أفعال الهيكل التالى :




**تمـــارين :**

1 – أوجد عزم القوة ( $\vec{F} = 150$ N ) حول النقطة C ، وذلك بتطبيق التعريف المباشر للعزم . أوجد كذلك عزم تلك القوة حول النقطة O بعد تحليلها إلى مركباتها الأساسية .



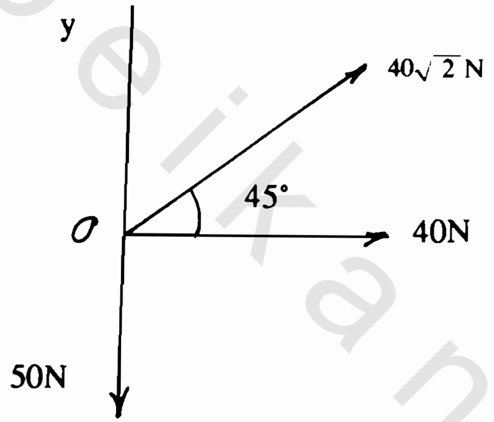
2 – قوة ( $|F|=50N$ )خط عملهما معرف بالنقطتين : $A(1,3,0)$ و $B(0,1,2)$

ونقطة تأثيرها هى A . والمطلوب :

( أ ) اختزال تلك القوة حول النقطة O .

(ب) اتجاهات القوة التى تكافىء تلك القوة .

3 – تؤثر مجموعة القوى المبينة بالشكل بالنقطة O . والمطلوب إيجاد القوة التى تجعل تلك المجموعة محصلتها رأسية .




4 المطلوب إيجاد نقطة تأثير محصلة القوى التالية :