الباب الأول

المتجهـــات

1,1 - تعريفـــات :

المتجه هو خط مستقيم A B يبدأ من نقطة مختارة تسمى نقطة الأصل A وينتهى بنقطة النهاية B . ويحتاج المتجة إلى أربعة عناصر ليكون معرفاً تعريفاً كاملًا :

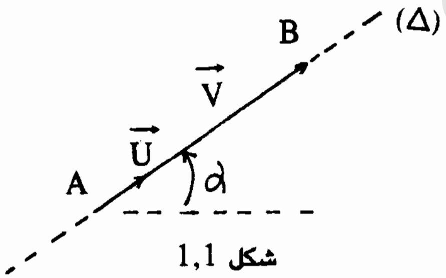
(أ) نقطة الأصل أو نقطة التأثير A .

(ب) اتجاه : وهو اتجاه الخط الذى يمثله وليكن المحور (Δ) .

(جـ) قيمته : وهو مقياس هذا المتجه أو قيمته المطلقة .

(د) مساره : أى نقطة بدايته ونهايته من A إلى B ، وليس من B إلى A .

هذا ويمكن تعريف زاوية ميل هذا المتجه على محور معلوم وليكن المحور الأفقى ، على أن تقاس هذه الزاوية من المحور إلى المتجهِ فى الاتجاه المثلثى ولتكن الزاوية α انظر شكل 1,1 .



شكل 1,1

فى حالة تعريف الزاوية – كما ذكرنا يمكن الاستغناء عن العنصرين الثاني والرابع أعلاه حيث أن اتجاه الزاوية وقيمتها يوضحان ويحددان اتجاه ومسار المتجه .

ويرمز للمتجه فى هذا الفصل بالرمز $\vec{V}$ ، أما قيمته فتكتب $|\vec{V}|$ وهى

أنواع المتجهات :

المتجه الحر : وفيه يكون الاتجاه والقيمة معرفتين فى حين المسار ونقطة الأصل غير محددتين

المتجه المنزلق : نقطة التأثير (نقطة الأصل أو البداية) هى فقط التى لم تحدد .

المتجه المتصل : وفيه الأربع عناصر محددة .

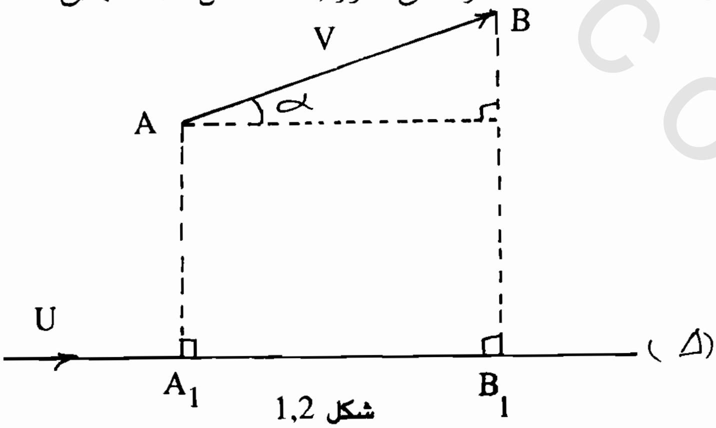
متجه الوحدة: وهو المتجه الذى قيمته تكون الوحدةويرمز له بالرمز $\vec{U}$

ويمكن لمتجه ما $\vec{V}$ الموازى لمتجه الوحدة $\vec{U}$ (انظر شكل 1,1) أن يكتب في الصورة :

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1)$$

1,2 – إسقاط المتجه :

إسقاط المتجه $\vec{V}$ يكون على المحور (Δ)، شكل 1,2، كما يلى :



شكل 1,2

$$A_1,B_1 = |\vec{V}| \,.\, \cos\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(1.2)$$

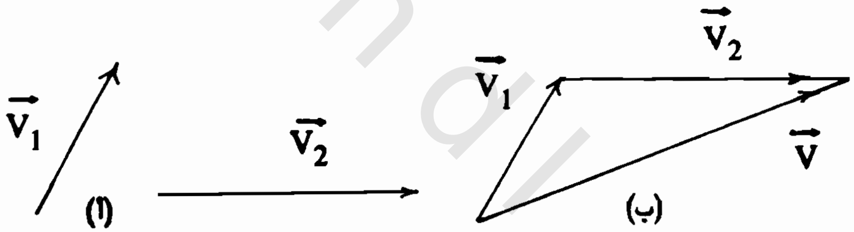
أى أن قيمة المسقط A_1 , B_1 يكون مساوياً لقيمة المتجه مضروباً فى $\cos\alpha$ حيث α هى الزاوية ما بين الاتجاه الموجب لكل من المحور والمتجه ، وتقاس كما سبق فى الاتجاه المثلثى .

إثبات المعادلة (1.2) أعلاه واضح من هندسة الشكل 1,2 .

1,3 – العمليات المختلفة على المتجهات :

1,31 – جمع المتجهات :

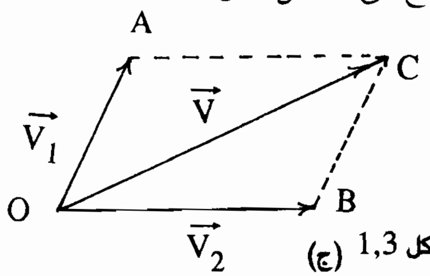
حاصل جمع المتجهات $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ شكل 1,3 ا هو المتجه $\vec{V}$ الذى يصل ما بين نقطة بداية المتجه $\vec{V}_1$ ونقطة نهاية المتجه $\vec{V}_2$ ، وتعرف هذه القاعدة بقاعدة المثلث انظر شكل 1,3 ب .



هذا ويمكن فى حالة عملية الجمع تطبيق قاعدة متوازى الأضلاع بالشكل 1,3 حـ حيث يكون حاصل جمع $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ هو المتجه الذى يمثل قطر متوازى الأضلاع المبنى على المتجهين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$.

ويلاحظ أنه لو استبدل مكان المتجه $\vec{V}_2$ من الوضع OB إلى الوضع AC؛ لحصلنا على قاعدة المثلث أعلاه .

ويمكن كتابة قاعدة الجمع على الشكل التالى :



شكل 1,3 (ج)

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.3)$$

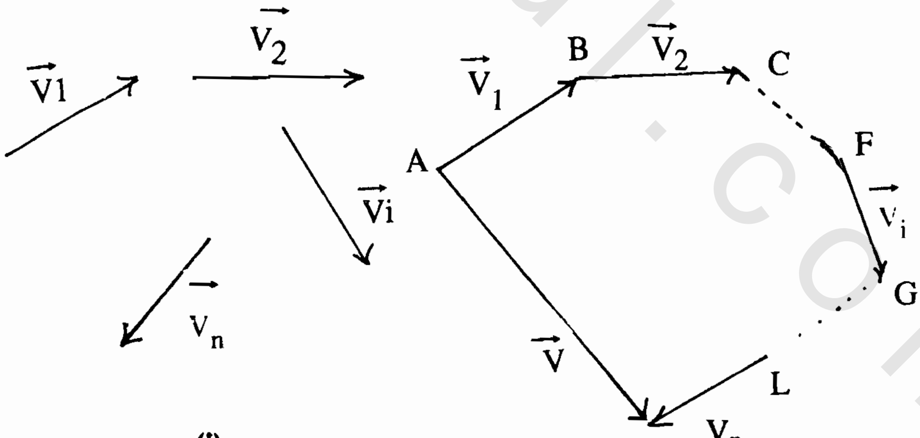
ويمكن فى حالة جمع متجهين أن تطبق قاعدة التبديل حيث :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1 = \vec{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.4)$$

فى حالة جمع مجموعة من المتجهات يتغير المثلث أعلاه فنحصل فى هذه الحالة على مضلع . فلنفرض أن لدينا مجموعة من المتجهات كما بالشكل 1,4 ا :

$$\vec{V}_1 \text{ و } \vec{V}_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{V}_i , \ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{V}_n$$

والمراد هو إيجاد حاصل الجمع بيانياً .



(أ) شكل 1,4 (ب) مضلع المتجهات

نختار نقطة ما : مثل A ، شكل 1,4 ، ومنها نبدأ فى عمل موازٍ للمتجه الأول $\vec{V}_1$ ، وذلك بمقياس رسم مناسب فنحصل على AB ، ومن B نرسم الموازى BC للمتجه $\vec{V}_2$ بنفس مقياس الرسم . وهكذا حتى آخر متجه $\vec{V}_n$ الذى ينتهى عند النقطة O . المتجه الواصل ما بين النقطتين A إلى O أى $\vec{AO}$ يسمى المتجه $\vec{V}$ وهو حاصل الجمع ويعرف بالمحصلة بقياس $\vec{AO}$ وضربه فى مقياس الرسم نحصل على القيمة ، ويمكن أن نكتب المعادلة الاتجاهية :

$$\vec{V} = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \dots + \vec{V}_i + \dots + \vec{V}_n \quad (1.5)$$

$$= (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \dots + \vec{V}_i + \dots + \vec{V}_n$$

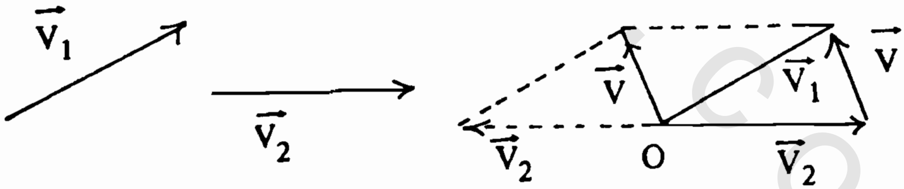
$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1.6)$$

هذا ويمكن تطبيق قواعد الجمع بالأقواس على جمع المتجهات كما بالمعادلة 1.5 .

1,32 – الفارق بين متجهين :

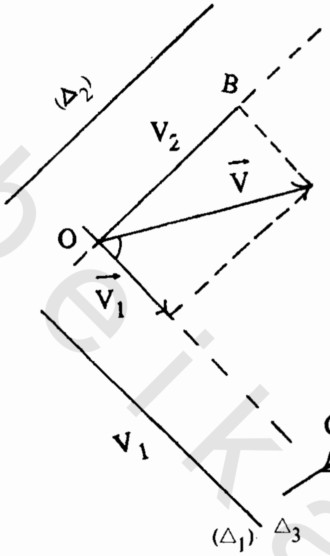
الفارق بين $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ (وليس بين $\vec{V}_2$ و $\vec{V}_1$) هو المتجه $\vec{V}$ الذى يجب إضافته إلى $\vec{V}_2$ للحصول على $\vec{V}_1$ ، انظر شكل 1,5

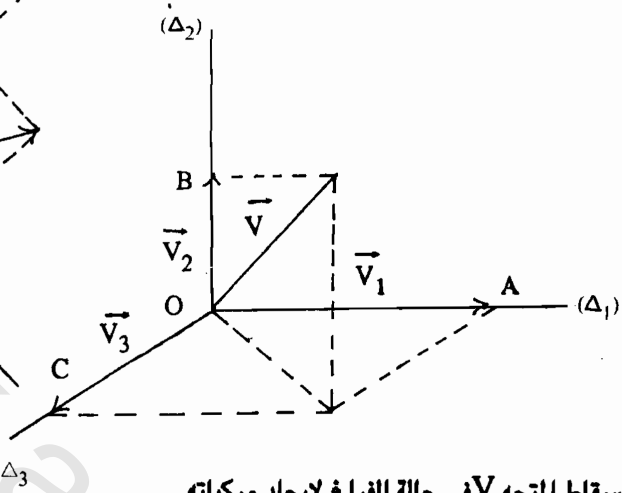
$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1.7)$$



1,33 – تحليل المتجه أو إيجاد مركباته :

يقصد بتحليل المتجه : إيجاد مكوناته الأساسية – مركباته – بالنسبة إلى محورين إذا كان المتجه فى مستوى، أو بالنسبة لثلاثة محاور إذا كان المتجه فى الفراغ، شكل 1,6 .





إسقاط المتجه V في حالة الفراغ لإيجاد مركباته

شكل 1,6

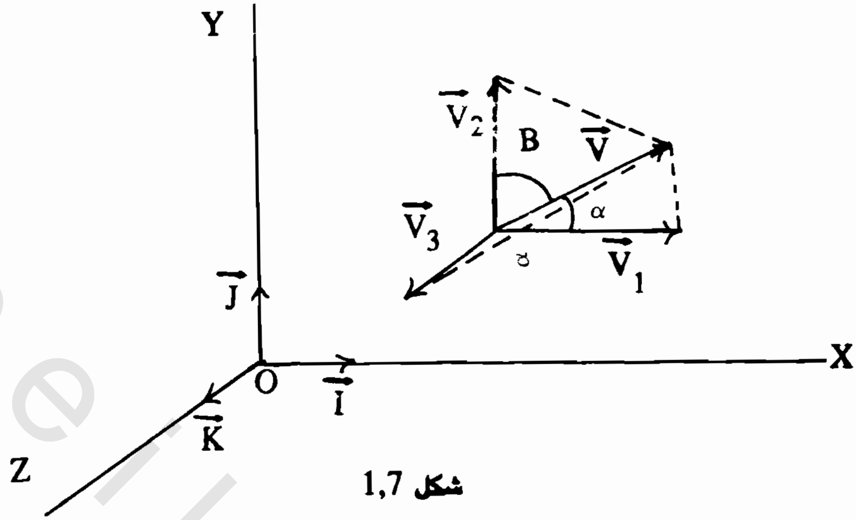
إسقاط المتجه V فى حالة المستوى لإيجاد مركبتيه

فى الواقع عملية التحليل لإيجاد المركبات هى عملية إسقاط على المحاور . فإذا فرضنا أن الزوايا التى يصنعها المتجه $\vec{V}$ مع المحاور هى α ، β ، γ مع x ، y ، z على الترتيب فإن :

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{V} \,.\, \cos\alpha \\ \vec{V}_2 &= \vec{V} \,.\, \cos\beta \\ \vec{V}_3 &= \vec{V} \,.\, \cos\gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.8)$$

حيث $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، $\vec{V}_3$ هى مركبات المتجه $\vec{V}$ على x ، y ، z على الترتيب انظر شكل 1,7

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.9)$$



شكل 1,7

فإذا فرضنا أن $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$ هي متجهات الوحدة تبعاً للمحاور x، y، z على الترتيب ، فإننا يمكننا أن نكتب :

$$\vec{V}_1 = X \ \vec{i} \ , \ \vec{V}_2 = Y \ \vec{J} \ و \ \vec{V}_3 = Z \ \vec{K} \quad \ldots\ldots\ldots (1.10)$$

حيث X ، Y ، Z هي قيم $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، $\vec{V}_3$ ويمكن الحصول عليها من المعادلات التالية :

$$\left.\begin{aligned} X &= |\vec{V}| \,.\, \cos\alpha \\ Y &= \qquad .\, \cos\beta \\ Z &= |V| \,.\, \cos\gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1.11)$$

بالتعويض عن كل من $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، $\vec{V}_3$ من المعادلة (1.10) بالمعادلة (1.9) نجد :

$$\vec{V} = X \ \vec{i} \ + Y \ \vec{J} \ + Z \ \vec{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.12)$$

وتعرف المعادلة (1.12) بالمعادلة التحليلية للمتجه $\vec{V}$.

لندرس الآن حالة وجود مجموعة من المتجهات ، ونحاول إيجاد المعادلة التحليلية العامة لها .

لنفرض أن المتجهات هى : $\vec{V}_1$ ، $\vec{V}_2$ ، .... ، $\vec{V}_i$ ، .... ، $\vec{V}_n$ وهى معرفة بواسطة قيم مساقطها على المحاور الثلاثة x ، y ، z كما يلى :

$$\vec{V}_1 (X_1 , Y_1 , Z_1) ,\ldots, \vec{V}_2 (X_2 , Y_2 , Z_2) ,\ldots,$$
$$\vec{V}_i (X_i , Y_i , Z_i) ,\ldots, \vec{V}_n (X_n , Y_n , Z_n)$$

والمطلوب إذاً هو إيجاد $\vec{V}$ حيث :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.13)$$

بالتعويض عن $\vec{V}_i$ فى المعادلة (1.9) :

$$\vec{V}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{J} + Z_i \vec{K}$$

وعن طريق المعادلة (1.13) نجد :

$$\vec{V} = (\Sigma X_i) \vec{i} + (\Sigma Y_i) \vec{J} + (\Sigma Z_i) \vec{K} \ldots.(1.14)$$

حيث إن القيم ما بين الأقواس تمثل مساقط $\vec{V}$ على المحاور الثلاثة :

$$X = \Sigma X_i , Y = \Sigma Y_i , Z = \Sigma Z_i \ldots\ldots (1.15)$$

ويمكن إيجاد قيمة $\vec{V}$ من المعادلة التالية :

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1.16)$$

أما اتجاهات $\vec{V}$ أى الزوايا التى يصنعها مع المحاور الثلاثة فهى :

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \\ \cos\beta &= \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \\ \cos\underline{\delta} &= \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.17)$$

وتعرف المعادلات (1.17) باتجاهات جيوب تمام المتجه $\vec{V}$

المعادلات أعلاه يمكن تبسيطها فى حالة وجود المتجه $\vec{V}$ بالمستوى نجد :

$$\left.\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.18)$$

ولا داعى للمعادلة الثالثة حيث إن المتجه فى المستوى X , Y وبالتالى فمركبته الثالثة تكون صفرا .

وتكون المحصلة فى هذه الحالة :

$$\vec{V} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.19)$$

وقيمتها :

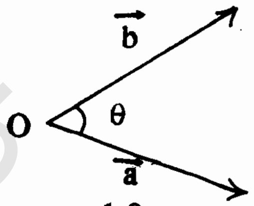
$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.20)$$

ولتحديد اتجاهاتها فيكفى فى هذه الحالة معرفة الزاوية التى تصفها مع المحور OX وهى :

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.20)$$

(1.34) الضرب القياسى لمتجهين :

إذا كان لدينا المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بالشكل 1,8 ، بينهما زاوية 0 ، وأريد إيجاد حاصل ضربهما القياسى فإننا نعرفه بالمعادلة التالية :



شكل 1,8

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| \cos \Theta \qquad \text{.........................} \ (1.21)$$

وتكون نتيجة الضرب عدداً (سالباً أو موجباً) .

1.34 خصائص هامـــة :

– فى حالة ما إذا كان المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيين فيكون حاصل ضربهما القياسى مساوياً لحاصل ضرب قيمتهما الجبرية :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| . |\vec{b}| \qquad \text{............} \ (1.22)$$

– فى حالة تعامد $\vec{a}$ و $\vec{b}$ يكون حاصل ضربهما القياسى صفراً ومنها نستنتج :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \ , \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \ , \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \qquad \text{........} (1.23)$$

– فى حالة ما إذا كان المتجهان متساويين يكون الحاصل هو :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 \qquad \text{............} \ (1.24)$$

وبناء على ذلك فإننا نحصل على العلاقات التالية :

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \ , \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \ , \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \qquad \text{...} \ (1.25)$$

– حاصل الضرب القياسى لمتجهين يكون تبادلياً .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

– يمكن أيضاً تطبيق قواعد الجمع بالأقواس :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

وكذلك نطبق عليه قاعدة ضرب الأقواس ، وذلك إذا ما ضرب فى عدد قياسى

$$m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$$

حيث m عدد قياسى .

فى حالة ما إذا كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ معرفين بالمركبات على المحاور الثلاثة ، فإن حاصل ضربهما القياسى يكون :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_\chi b_\chi + a_y b_y + a_z b_z \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1.26)$$

حيث :

$$\vec{a} = a_\chi \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \,, \quad \vec{b} = b_\chi \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

وللحصول على المعادلة (1.26) يجب أن يتذكر القارىء الخصائص بالمعادلات (1.23) و (1.25) .

بتطبيق المعادلة (1.21) وبالتعويض عن $\vec{a} \cdot \vec{b}$ من المعادلة (1.26) وبإيجاد قيمتهما من (1.16) نجد :

$$\cos \Theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_\chi b_\chi + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a^2x + a^2y + a^2z} \cdot \sqrt{b^2x + b^2y + b^2z}} \quad (1.27)$$

المعادلة (1.27) يمكن استخدامها لإيجاد الزاوية بين المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

من المعادلة (1.27) يتضح أن شرط تعامد متجهين هو :

$$a_\chi b_\chi + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad \text{.....................} \ (1.28)$$

1.35 الضرب الاتجاهى لمتجهين :

حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهـــين $\vec{a}$, $\vec{b}$ هو المتجه $\vec{V}$ حيث :
(انظر شكل 1,9)

- اتجاه $\vec{V}$ يكون عمودياً على المستوى المكون من $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ويمكن معرفة مساره بتطبيق قاعدة اليد اليسرى .

- قيمة $\vec{V}$ تكون

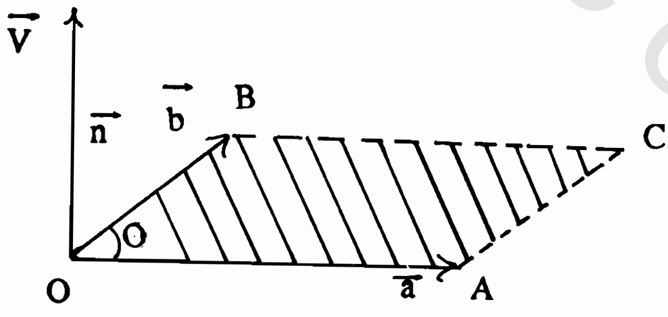
$$|\vec{V}| = |\vec{a}|.|\vec{b}| \operatorname{Sin} \Theta \qquad \text{............} \ (1.29)$$

ويمكن أن تكتب

$$\vec{V} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}| \operatorname{Sin} \Theta \ \vec{n}$$

حيث $\vec{n}$ وحدة متجه فى اتجاه $\vec{V}$



شكل 1,9

1.351 خصائص هامة :

– حاصل الضرب الاتجاهى يساوى مساحة متوازى الأضلاع المبنى على المتجهين شكل 1,9 . وهذا واضح من المعادلة (1.29) .

– لو كان المتجهان متوازيان يكون حاصل ضربهما الاتجاهى صفراً.

– المتجهان المتطابقان يكون حاصل ضربهما صفراً (انظر الإثبات فى نهاية هذا البند) :

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1.30)$$

– الضرب الاتجاهى لا تطبق عليه قاعدة التبادل فى الضرب ، وبالتالى يمكننا أن نكتب :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = - \vec{b} \wedge \vec{a} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1.31)$$

– يمكن تطبيق قواعد الجمع بالأقواس فمثلاً :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \dots\dots\dots\dots\dots (1.31)$$

يمكن تطبيق قاعدة الضرب بالأقواس إذا كان الضرب بالنسبة لعدد قياسى :

$$m (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (m \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (m \vec{b})$$

بتطبيق المعادلات (1.30) و (1.31) يمكننا أن نكتب :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = 0 \ , \quad \vec{j} \wedge \vec{j} = 0 \ , \quad \vec{k} \wedge \vec{k} = 0 \dots\dots\dots\dots (1.32)$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= - \vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= - \vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i} \qquad \dots\dots\dots\dots (1.33) \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= - \vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \end{aligned}$$

أما الصورة العامة لحاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين $\vec{a}$ و b فيمكن الحصول عليها بإجراء عملية الضرب المباشر لمركباتهما مع الأخذ فى الاعتبار كل من المعادلتين (1.32) , (1.33) أى :

$$\vec{\nu} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \times \vec{k}) \wedge$$

$$(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z + \vec{k})$$

ويكون حاصل الضرب الاتجاهى :

$$\vec{\nu} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_\chi - a_\chi b_z) \vec{j} + (a_\chi b_y - a_y b_\chi) \vec{k} \quad (1.34)$$

ويمكن وضع المعادلة (1.34) فى صورة المحدد التالى :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_\chi & a_y & a_z \\ b_\chi & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.35)$$

إثبات المعادلة (1.30) أعلاه :

بفرض أن : $\vec{a} = a_\chi \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

وبالتعويض عن حاصل الضرب $\vec{a} \times \vec{a}$ فى المعادلة (1.34) نجد :

$$\vec{\nu} = \vec{a} \wedge \vec{a} = (a_y a_z - a_z a_y) \vec{i} + (a_z a_\chi - a_\chi a_z) \vec{j}$$

$$+ (a_\chi a_y - a_y a_\chi) \vec{k} = \vec{o}$$

وهو ما يثبت المعادلة (1.30) :

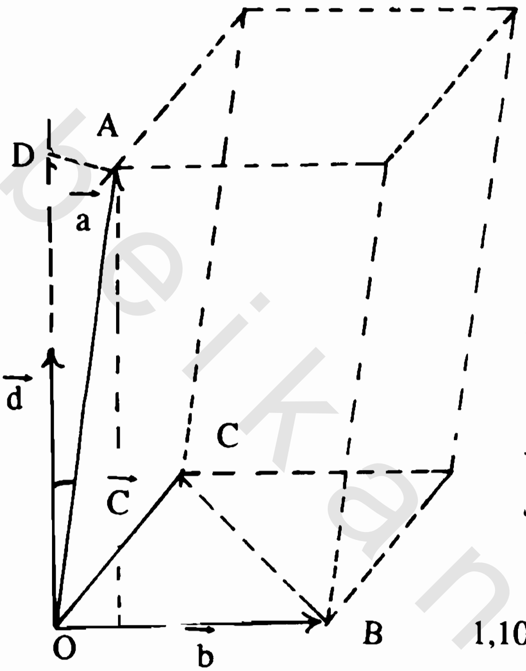
1.36 – حاصل الضرب المختلط لثلاثة متجهات :

تعريف : يعرف حاصل الضرب المختلط للمتجهات الثلاثة الحرة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ بأنه الضرب القياسى للمتجه $\vec{a}$ فى حاصل الضرب الاتجاهى $\vec{b} \wedge \vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{d} = | \vec{a} | . | \vec{d} | \cos \Phi = 2. \triangle OBC. h \quad (1.36)$$

حيث : $\vec{d} = \vec{b} \wedge \vec{c}$

وتكون قيمة حاصل الضرب المختلط مساوية لحجم الشكل المبنى على المتجهات الثلاثة كما بالشكل 1.10 .



شكل 1,10

1.361 خواص هامة :

يكون حاصل الضرب السابق صفراً إذا كان متجهان من الثلاثة على خط واحد ، أو الثلاثة متجهات فى نفس المستوى .

حاصل الضرب المختلط يحتفظ بنفس القيمة إذا ما أجرينا عملية تبادل دائرى للمتجهات .

$$\vec{a} (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} . (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \quad 1.37$$

ولكن يجب أن يراعى كذلك التبادل فى عمليات الضرب القياسى والضرب الاتجاهى :

$$\vec{a} (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) . \vec{c} = (\vec{a} , \vec{b} , \vec{c})$$

ويمكن أن يكتب حاصل الضرب المختلط فى صورة المحدد :

$$\vec{a} . (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_\chi & a_y & a_z \\ b_\chi & b_y & b_z \\ c_\chi & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

1.37 - حاصل الضرب الاتجاهى لثلاثة متجهات (ضرب اتجاهى مضاعف) :

ويكتب على الصورة :

$$\vec{w} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \quad \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{ab} & \vec{ac} \end{vmatrix}$$

$$= (\vec{a} . \vec{c}). \vec{b} - (\vec{a} . \vec{b}) . \vec{c} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.38)$$

1.4 أمثلة محلولة :

١ – إذا علم أن :

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{C} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

فالمطلوب إيجاد مسقط $(\vec{A} + \vec{C})$ على $\vec{B}$.

الحـــل :

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{C} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

ولمعرفة الزاوية ما بين $\vec{D}$ و $\vec{B}$ نطبق المعادلة (1.27) :

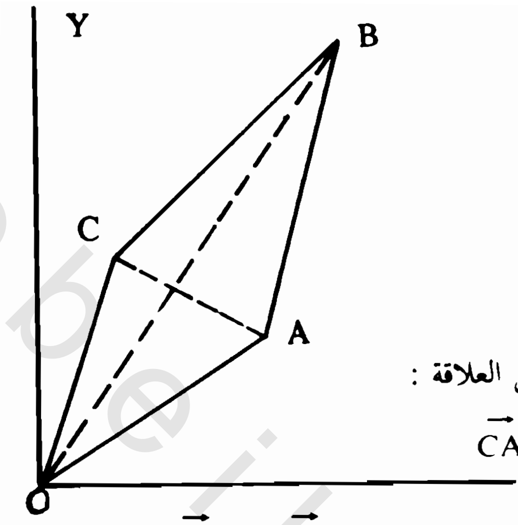
$$\cos\alpha = \frac{(5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}).(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})}{\sqrt{(5)^2 + (-3)^2 + (3)^2} . \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = \frac{17}{3\sqrt{43}}$$

ويكون إسقاط $\vec{D}$ على $\vec{B}$ هو :

$$|\vec{D}| . \cos\alpha = \sqrt{43} . \frac{17}{3\sqrt{43}} = \frac{17}{3}$$

2 – أوجد الزاوية الحادة المحصورة بين قطرى الشكل الرباعى الذى إحداثيات رؤوسه :

$C(1,3,0)$, $B(4,6,0)$, $A(3,2,0)$, $O(0,0,0)$



الحل :

$$\vec{OA} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

$$\vec{OB} = 4\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$$

$$\vec{OC} = \vec{i} + 3\,\vec{j}$$

يلاحظ أن القطر CA يمكن إيجاده من العلاقة :

$$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = 2\,\vec{i} - \vec{j}$$

بتطبيق المعادلة (1.27) يمكن إيجاد الزاوية بين المتجهين $\vec{OB}$ و $\vec{CA}$:

$$\cos\Theta = \frac{\vec{OB}\cdot\vec{CA}}{|\vec{OB}|\cdot|\vec{CA}|} = \frac{(4\,\vec{i} + 6\,\vec{j})\cdot(2\,\vec{i} - \vec{j})}{\sqrt{(4)^2 + (6)^2}\cdot\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{5}}$$

$\Theta = 82^\circ\ 58'$

3 – أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه P Q R حيث :

P(2,3,5) , Q(4,2,-1) , R(3,6,4)

الحـــل :

$$\vec{PQ} = (4-2)\,\vec{i} + (2-3)\,\vec{j} + (-1-5)\,\vec{k} = 2\,\vec{i} - \vec{j} - 6\,\vec{k}$$

$$\vec{PR} = (3-2)\,\vec{i} + (6-3)\,\vec{j} + (4-5)\,\vec{k} = \vec{i} - 3\,\vec{j} - \vec{k}$$

بتطبيق حاصل الضرب الاتجاهى والمعادلة (1.35) نجد :

$$\triangle = \frac{1}{2}(\vec{PQ}\wedge\vec{PR}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{426}$$