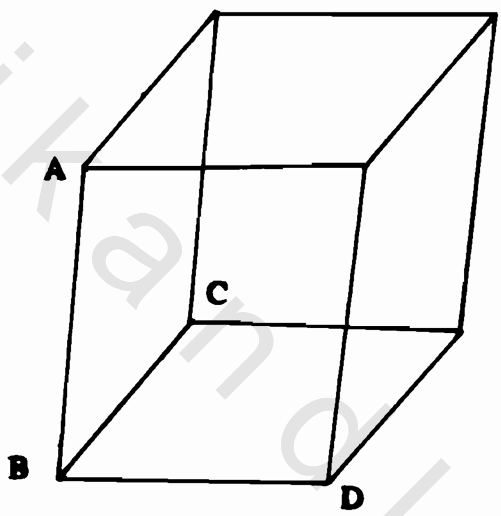
الباب العاشر

مسائل متنوعـــة

1.1 المطلوب إيجاد ارتفاع الشكل المبين بالرسم التالى حيث :

A(3,2,1) B(1,1,0) , C(3,-1,1) , D(-1,0.2)



الحــل :

نعلم أن حجم هذا الشكل يمكن الحصول عليه بإجراء عملية ضرب مختلط تبعاً لما جاء بالفقرة (1.36) :

$$\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}) = 2 \triangle DBC \cdot h \qquad (1)$$

وتبعا لحاصل الضرب الاتجاهى

فإننا نجد بتطبيق المعادلة (1.29) أو (1.34) أو

$$2 \triangle DBC = \overrightarrow{BD}$$

ثم بإجراء عملية قسمة يمكن أن نجد ارتفاع الشكل h . وتكون الخطوات كالتالى

$$\overrightarrow{BA} = (3-1)\ \vec{i} + (2-1)\ \vec{j} + (1-0)\ \vec{k} = 2\ \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\ \vec{i} + (-1-1)\ \vec{j} + (1-0)\ \vec{k} = 2\ \vec{i} + 2\ j + \vec{k}$$

$$\overrightarrow{BD} = (-1-1)\ \vec{i} + (0-1)\ \vec{j} + (2-0)\ \vec{k} = 2\ \vec{i} + \vec{j} + 2\ \vec{k}$$

من المعادلة (1.35) :

$$\vec{a} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+4)\ \vec{i} + (4+2)\ \vec{j} + (4+2)\ \vec{k} = 3\ \vec{i} + 6\ \vec{j} + 6\ \vec{k}$$

وتكون قيمة $\vec{a}$ من (1.16)

$$|\ a\ | = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (6)^2} = 9 = 2 \triangle DBC$$

والآن بتطبيق المعادلة (1.36) نحصل على :

$$\overrightarrow{BA} . \vec{a} = (2\ \vec{i} + \vec{j} + k) . (3\ \vec{i} + 6\ \vec{j} + 6\ \vec{k})$$

$$= 6 + 6 = 18 = 2 \triangle DBC . h$$

ويكون بالتالى ارتفاع الشكل هو :

$$h = \frac{18}{9} = 2$$

1.2 إذا علم أن :

$$\vec{A} = t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{k} \quad , \quad \vec{B} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k}$$

حيث t متغير . فالمطلوب إيجاد التفاضل التالى :

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

الحـــل :

من المعادلة (1.26) :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{k}) \quad (\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k}) = t\cos t - \sin t$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \cos t - t\sin t - \cos t = t\sin t$$

1.3 أوجد مركبات واتجاهات متجه الوحدة المتعامد على كل من $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ حيث :

$$\vec{V_1} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \quad , \quad \vec{V_2} = \vec{i} + \vec{j} - 2$$

الحـــل :

نفرض أن متجه الوحدة هو :

$$\vec{U} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

فلدينا من المعادلة (1.16) :

$$|\vec{U}| = 1 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a_x^a + a_y^2 + a_z^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ومن تعامد $\vec{U}$ مع $\vec{V}_1$ يمكن أن نطبق (1.28) :

$$3\,a_x - z\,a_y + 4\,a_z = 0 \qquad (2)$$

ومن تعامد U مع V_2 يعطى :

$$a_x + a_y - 2\,a_z = 0 \qquad (3)$$

بحل هذه المعادلات الثلاث نجد أن مركبات متجه الوحدة :

$$a_x = 0 \quad , \quad a_y = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad , \quad a_z = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad \vec{U} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{K}$$

وتكون اتجاهات متجه الوحدة من (1.17) :

$$\cos\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = 90°$$

$$\cos\beta = \frac{2/\sqrt{5}}{1} \longrightarrow \beta = 26.565°$$

$$\cos\gamma = \frac{1/\sqrt{5}}{1} \longrightarrow \gamma = 63.435°$$

1.4 – أوجد التفاضل الجزئى التالى : $(\vec{A} \wedge \vec{B})\ \dfrac{\delta^2}{\delta x\, \delta y}$ عند النقطة

(1,- 1,2)

علماً بأن

$$\vec{A} = x^2\,\vec{i} - y\,\vec{j} + xz\,\vec{k} \quad , \quad \vec{B} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} - xyz\,\vec{k}$$

الحـــل :

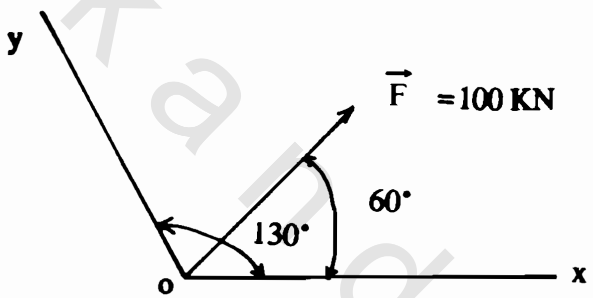
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x^2 & -y & xz \\ y & x & -xyz \end{vmatrix} = (xy^2Z - x^2Z)\,\vec{i} + (xyz + x^3 yz)\,\vec{j} + (x^3 + y^2)\,\vec{k}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta x\, \delta y}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = 2yz\,\vec{i} + (Z + 3x^2 Z)\,\vec{j}$$

عند النقطة (1, - 1, 2) نجد :

$$= 2(-1)2\,\vec{i} + (2 + 3(1)^2\,2)\,\vec{j} = -4\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$$

2.1 المطلوب إيجاد مركبات القوة F على المحورين بالشكل هذا علماً بأن قيمتها (100 KN) .



الحـــل :

مسقط | $\vec{F}$ | على المحور الأفقى X :

$$F \cos 60° = 100 \cos 60 = 50 \text{ KN}$$

وهذا المسقط يكون مساوياً لمركبات | $\vec{F}$ | على كل من X وكذلك مركبة Y على $\vec{X}$

ومنها :

$$\therefore\ \vec{F} = \vec{OX} + \vec{OY'}$$

$$OX + (-oy' \cos 50°) = 50$$

$$0X - (0{,}643)\,oy' = 50 \qquad \text{.....................} \quad (1)$$

وإذا أسقطنا على المحور العمودى على الرأسى نجد :

$$oy' \text{ Cos } 40° = F \cos 30° \quad \text{.....................} \quad (2)$$

من المعادلة (2) نجد أن :

$$oy' = \frac{100\ (0.866)}{0.766} = 113.055 \text{ KN}$$

ومن (1) نجد :

$$Ox = 50 + 0.643 \times 113.055 = 122{,}694 \text{ KN}$$

2.2 – بالإشارة للرسم بالمثال السابق إذا كان :

$$|\overrightarrow{OY'}| = 105 \text{ KN} \quad , \quad |ox| = 130 \text{ KN} \; , \quad |\overrightarrow{F}| = 100 \text{ KN}$$

المطلوب إيجاد الزاوية بين القوة $\overrightarrow{F}$ والمحور الأفقى ، وكذلك الزاويه بين المحورين .

الحـــل :

نفرض أن الزاوية بين القوة $\overrightarrow{F}$ والمحور الأفقى هى α ، وأن الزاوية بين المحورين هى β .

الإسقاط على المحور الأفقى يعطى :

$$130 + 105 \cos \beta = 100 \cos \alpha \qquad (1)$$

وعلى المحور الرأسى :

$$105 \sin \beta = 100 \sin \alpha \qquad (2)$$

من المعادلة (2) نجد :

$$\sin \alpha = 1.05 \sin \beta \quad \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - (1.05 \sin \beta)^2}$$

$$(1) \rightarrow 130 + 105 \cos \beta = 100 \sqrt{1 (1.05 \sin \beta)^2}$$

بتربيع الطرفين نجد :

$$16900 + 27300 \cos \beta + 11025 \cos^2 \beta = 10000 - 11025 \sin^2 \beta$$

$$= 10000 - 11025\ (1 - \cos^2 \beta)$$

$$= 10000 - 11025 + 11025 \cos^2 \beta$$

$$27300 \cos \beta = 10000 - 11025 - 16900$$

$$\cos \beta = -0.6566 \quad \rightarrow \quad \beta = 131°$$

ومن المعادلة (1) :

$$\cos\alpha = 1.3 + 1.05\ (-0.6566) = 0.61057$$

$$\therefore \alpha = 52.37°$$

2.3 – قوة مقدارها 250 KN تعمل بنقطة الأصل فى الاتجاهات :

$$\alpha = 65° \quad , \quad \beta = 40°$$

ومعروف كذلك أن المركبة فى اتجاه المحور العمودى Z موجبة .

فالمطلوب إيجاد :

(أ) قيمة الزاوية التى تصنعها القوة مع المحور Z .

(ب) قيمة المركبات الثلاثة .

(جـ) عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة : A(1,-2,2)

الحـــل :

نتيجة للمعادلات (2.6) يمكن أن نكتب :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

وبالتعويض عن α , β نحصل على :

$$\cos^2 65° + \cos^2 40° + \cos^2\gamma = 1$$

$$\because \cos^2\gamma = 1 - 0.179 - 0.587 = 0.234$$

$$\gamma = 61°$$

$$X = |\vec{F}| . \cos\alpha = 250 \cos 65° = 105.65 \text{ KN} \qquad (1.2) \ , \ (2.6)$$

$$Y = |\vec{F}| . \cos\beta = 250 \cos 40° = 191.51 \text{ KN}$$

$$Z = |\vec{F}| . \cos\gamma = 250 \cos 61° = 121.2 \text{ KN}$$

$$\therefore \vec{F} = 105.65\ \vec{i} + 191.51\ \vec{j} + 121.2\ \vec{k}$$

ولإيجاد عزم هذه القوة حول النقطة A نكتب متجه الموضع فى الصورة :

$$\vec{r} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad \text{.........................} \quad (2.12)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ (105.65) & (191.51) & (121.2) \end{vmatrix} = (-2(121,2) - 2(191.51)]\,\vec{i} + [2(105.65) - 1(121.2)]\,\vec{j} + [1(191.51) + 2(105.65)]\,\vec{k}$$

$$= -625.42\,\vec{i} + 90.1\,\vec{j} + 402.81\,\vec{k}$$

وتكون مركبات هذا العزم :

$$|M_x| = -625.42\,,\ |M_y| = 90.1\ ,\ |M_z| = 402.81 \qquad (2.13)$$

وقيمتـــه :

$$|M_A| = \sqrt{(-65.42)^2 + (90.1)^2 + (402.81)^2} = 749.349 \qquad (2.5)$$

أما الاتجاهات فتكون :

$$\cos\alpha_1 = \frac{-625.42}{749.349} = -0.8346 \rightarrow \alpha_1 = 146.576\sim$$

$$\cos\beta_1 = \frac{90.1}{749.349} = +0.12 \rightarrow \beta_1 = 83.\sim \qquad (2.6)$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{802.81}{749.349} = +0.5375 \rightarrow \gamma_1 = 57.483\sim$$

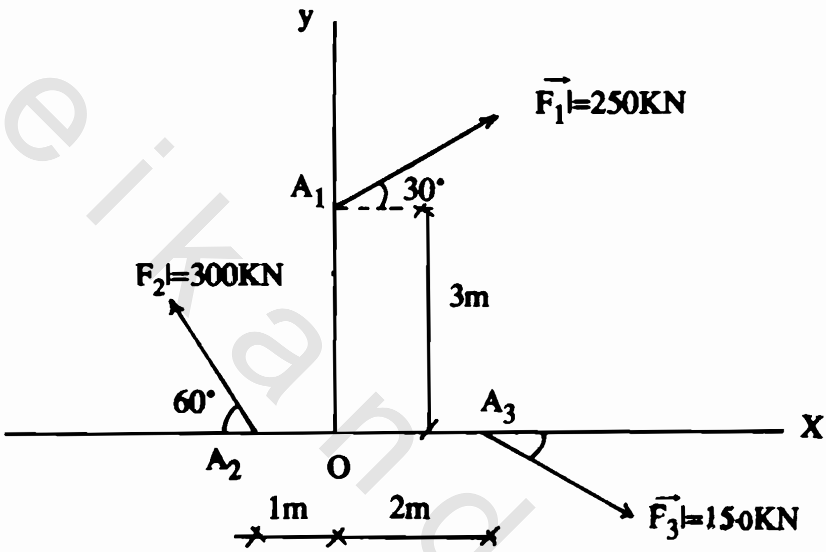
2.4 القوى $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ ، $\vec{F}_3$ تؤثر فى النقط A_1 ، $\vec{A}_2$ ، A_3 بالمستوى XY كما هو موضح بالشكل والمطلوب :

(أ) إيجاد متجه كل قوة ومتجه موضعها .

(ب) محصلة تلك القوى واتجاهها مع المحور الأفقى .

(جـ) عزم هذه القوى حول النقطة O .

(د) نقطة تأثير المحصلة .



الحــــــل :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$$

$$\vec{F_1} = 250\cos 30\ \vec{i} + 250\cos 60\ \vec{j} \quad , \quad \vec{r_1} = \vec{OA_1} = 3\,\vec{j}$$

$$\vec{F_2} = 300\,\mathrm{Cos}\,120\ \vec{i} + 300\cos 30\ \vec{j} \quad , \quad \vec{r_2} = \vec{OA_2} = -\,\vec{i}$$

$$\vec{F_3} = 150\,\mathrm{Cos}\,330\ \vec{i} + 150\cos 240\ \vec{j} \quad , \quad \vec{r_3} = \vec{OA_3} = 2\,\vec{i}$$

$$X = \sum_{i=1}^{3} X_i = 250\,\mathrm{Cos}\,30 + 300\,\mathrm{Cos}\,120 + 150\,\mathrm{Cos}\,330 = 196.4\ \mathrm{kn}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{3} Y_i = 250 \text{ Cos } 60 + 300 \text{ Cos } 30 + 150 \text{ Cos } 240 = 309.8$$

$$\vec{R} = 196.4 \; \vec{i} + 309.8 \; \vec{j}$$

$$\tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{309.8}{196.4} = 1.577 \quad \rightarrow \quad \alpha = 57.625°$$

$$\vec{M_0} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} \; \Lambda \; \vec{F_i} = [+3(250 \cos 30) - 300 \cos 30 + 2(150 \cos 240)] \; \vec{k}$$

$$\vec{M_0} = [-649.519 - 259.8 - 150] \; \vec{k} = -1059.3 \; \vec{k}$$

$$|\vec{M_0}| = 1059.3 \text{ KN.m}$$

لإيجاد نقطة تأثير المحصلة C لدينا :

$$X_c = \frac{\Sigma Y_i X_i}{\Sigma Y_i} \quad , \quad Y_c = \frac{\Sigma X_i Y_i}{\Sigma X_i}$$

حيث X_c ، Y_c هما إحداثيى نقطة تأثير المحصلة :

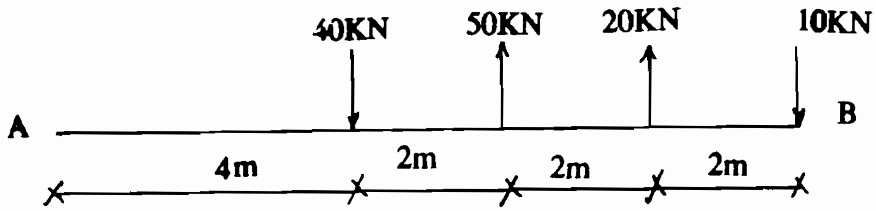
$$X_c = \frac{-300 \cos 30 + 2(150) \cos 240}{309.8} = -1.3$$

$$Y_c = \frac{-3 \times 250 \cos 30}{196.41} = -3.3$$

وبالتالى يكون متجه الموضع $\vec{r_C}$:

$$\vec{r_c} = -1.3 \; \vec{i} - 3.3 \; \vec{j}$$

2.5 عارضة AB طولها lom تؤثر عليها مجموعة القوى الرأسية المتوازية المبينة بالشكل التالى . المطلوب إيجاد محصلة هذه القوى وعزمها حول النقطة A .



الحـــــل :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F_i}$$

$$|\vec{R}| = -40 + 50 + 20 - 10 = 20 \text{ KN} \uparrow$$

أى أن المحصلة تصنع زاوية مقدارها 90° مع المحور الأفقى ويمكن كتابتها كما يلى :

$$\vec{R} = 20 \ \vec{j}$$

لإيجاد نقطة تأثير المحصلة سوف نحسب العزم حول النقطة A .

$$|\vec{M_A}| = 40(4) + 50(6) + 20(8) - 10(10) = 200 \text{ KN.m}$$

$$X_c = \frac{|M_A|}{|R|} = \frac{200}{20} = 10 \text{ m}$$

ويكون متجه الموضع :

$$\vec{r_c} = 10 \ \vec{i}$$

أما متجه العزم حول A فهو :

$$\vec{M_A} = 200 \ \vec{K}$$

وواضح أن العلاقة بين المتجهات الثلاثة هى :

$$\vec{M_A} = \vec{r_c} \wedge \vec{R}$$

2.6 أثبت أن فى حالة تغيير القوة 10 KN بالمثال السابق مع تغيير نقطة تأثير إلى 9 m عن A فإن المجموعة تؤول إلى ازدواج .

الحـــــل :

فى هذه الحالة تصبح محصلة القوى :

$$\vec{R} = -40 + 50 + 20 - 30 = \vec{0}$$

وهذا أول شرط من شروط الازدواج

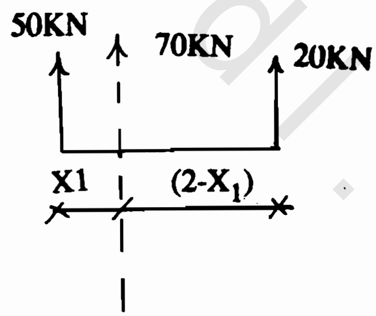
$$\Sigma M_A = -40(4) + 50(6) + 20(8) - 30(9) = 30 \text{ KN.m} \neq 0$$

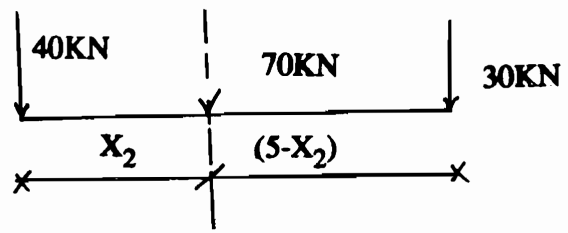
أى أن المجموعة غير متزنة ، وبالتالى تؤول إلى ازدواج انظر المعادلة (2.19) ويكون هذا الازدواج 30 KN.m حيث إن عزم مجموعة القوى لا يتغير .

ولإيجاد ذراع الازدواج أو المسافة بين قوتى الازدواج ، فواضح أن قوة الازدواج مقدارها 70 KN فتكون ذراع الازدواج .

$$d = \frac{30}{70} = \frac{3}{7} \text{m}$$

ولإيجاد نقطة تأثير كل قوة من قوى الازدواج فإننا نجد نقطة تأثير محصلة كل قوتين فى نفس الاتجاه :



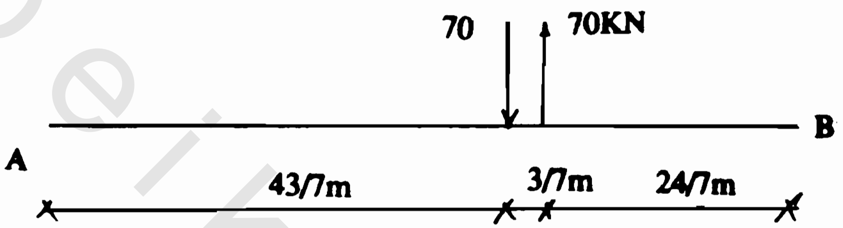


بأخذ العزوم حول القوة اليسرى لكل حالة نجد :

$$X_1 = \frac{30 \times 2}{70} = \frac{4}{7}\,m = 0.57\ m$$

$$X_2 = \frac{30 \times 5}{70} = \frac{15}{7}\,m = 2.14\ m$$

ويكون لدينا الشكل التالى للازدواج :



3.1- نقطة مادية معرضة للقوى :

$$\vec{F_1} = 5\ \vec{i} - 10\ \vec{j} + 15\ \vec{k} \qquad \vec{F_2} = 10\ \vec{i} - 25\ \vec{j} + 20\ k$$

$$\vec{F_3} = 15\ \vec{i} - 20\ \vec{j} + 10\ \vec{k}$$

أوجد القوة اللازمة لكى تصبح النقطة المادية فى حالة اتزان .

الحـــــل :

نفرض أن القوة اللازمة للاتزان هى F_4

بتطبيق المعادلات (3.2) نجد أن :

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \rightarrow 5\text{-}10 + 15 + X_4 = 0 \rightarrow X_4 = -10$$

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 0 \rightarrow -10 + 10 + 15 - 20 + Y_4 = 0 \rightarrow Y_4 = 5$$

$$\sum_{i=1}^{4} Z_i = 0 \rightarrow 15 - 20 + 10 + Z_4 = 0 \rightarrow Z_4 = -10$$

$$\vec{F_4} = -10\ \vec{i} + 5\ \vec{j} - 5\ \vec{k}$$

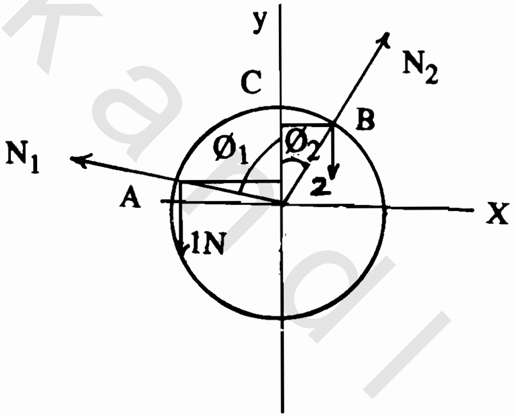
3.2 – بليتان A , B أبعادهما مهملة ، متصلتان بخيط AB طوله 0.2 متر ، وموضوعتان على اسطوانة دائرية المقطع وملساء محورها أفقى ونصف قطرها OA = 0.1 متر . وزن البلية 1A نيوتن و B 2 نيوتن . أوجد الزاويتان Φ_1 , Φ_2 التى يصنعها نصفى القطر OA , OB مع الخط الرأسى OC وذلك فى حالة الاتزان . أوجد كذلك ردى الفعل N_1 , N_2 للأسطوانة على كل بلية عند النقطتين A , B .

الحـــــل :

محيط الدائرة $= 2\Pi r = 2\Pi(0,1)$

$= 0.628$

وهذا المحيط يقابل زاوية مركزية عند 0 مقدارها °360



وبالتالى فإن القوس AB يقابل زاوية مركزية يمكن الحصول عليها بالتناسب :

$$\therefore \phi_1 + \phi_2 = \frac{0.2 \times 360}{0.628} = 114.59°$$

بما أن البلية A = 1 نيوتن ، و B = 2 فإن محصلتهما تكون 3 نيوتن وهى تقسم المسافة بينهما بنسبة $\frac{1}{3}$ من B إلى $\frac{2}{3}$ من A . وبتطبيق نظرية القوى الثلاث فإن تلك المحصلة يجب أن تمر بنقطة تلاقى القوتين N_1 , N_2 أى بنقطة 0 .

وبناء على ذلك فإنه إذا كانت المسافة فى اتجاه محور X بين AB (أى المسافة الأفقية بين البليتين) هى 1 . فإن الإسقاط على محور X يعطينا :

مسقط $AC = (\frac{2}{3})\ell$

مسقط $BC = (\frac{1}{3})\ell$

ومن التحليل السابق يمكن أن نجد بالاستعانة بالمعادلة (1) :

$$\phi_1 = \frac{2}{3}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{2}{3} \times 114.59 = 76.4°$$

$$\phi_2 = \frac{1}{3}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{3} \times 114.59 = 38.2°$$

وبتطبيق (3.3) :

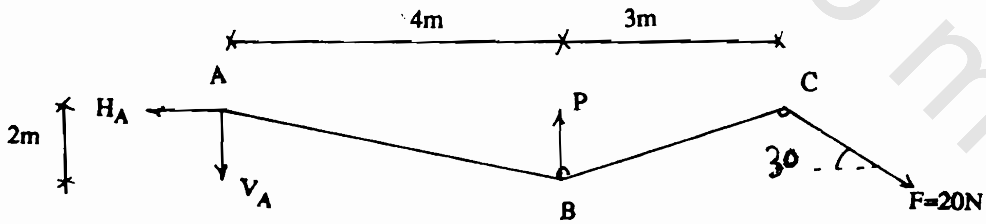
$$\Sigma X = 0 \rightarrow N_1 \sin\phi_1 = N_2 \sin\phi_2 \qquad (2)$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow N_1 \cos\phi_2 + N_2 \cos\phi_2 = 3 \qquad (3)$$

من (2) , (3) نجد أن :

$$N_1 = 2\,N \quad , \quad N_2 = 3.2\,N.$$

3.3 – حبل ABC مشدود إلى وتد عند نهايته C ، بقوة مقدارها 20 نيوتن تميل على الأفقى بزاوية 30° ومثبت عند A . فإذا علم أن C , A فى مستوى أفقى واحد فالمطلوب إيجاد قيمة القوة P التى يجب أن تؤثر عند B لحفظ الاتزان ، وكذلك قيم ردود الأفعال عند الطرف A



الحـــل :

بتطبيق معادلات الاتزان بالمستوى (3.3) , (3.6) نجد أن :

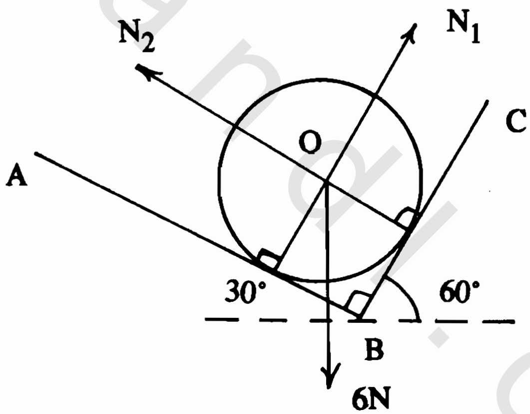
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 4P - 20 \sin 30° (7) = 0$$

$$P = +35 \sin 30° = 17.5 \text{ N} \uparrow$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 20 \cos 30 = 17.5 \text{ N} \leftarrow$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A = 17.5 - 20 \sin 30° = 7.5 \text{ N} \downarrow$$

3.4 – قرص متجانس وزنه 6 نيوتن يتزن على مستويين مائلين ومتعامدين على بعضهما البعض AB و BC . أوجد رد فعل كل مستوى على القرص ، وذلك مع العلم أن المستوى BC يصنع زاوية مقدارها °60 مع الأفقى .



الحــل :

بتطبيق معادلات الاتزان فى المستوى (3.3) نجد ما يلى :

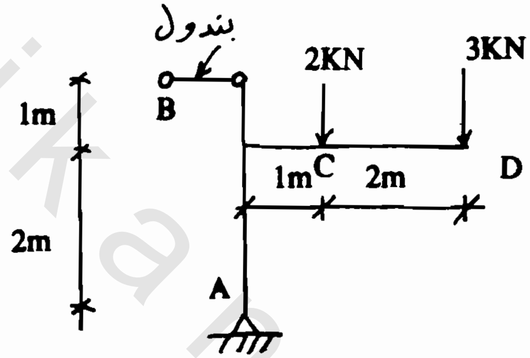
$$N_1 \cos 60° = N_2 \cos 30° \quad \ldots\ldots (1)$$

$$N_1 \sin 60° + N_2 \sin 30° = 6 \quad \ldots\ldots (2)$$

ومن المعادلتين (1) و (2) يمكننا إيجاد ردى الفعل N_1 , N_2 :

$$N_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} N \quad , \quad N_2 = \frac{3}{2} N$$

35 – المطلوب حساب ردود أفعال المنشأ ABCD بالشكل التالى :



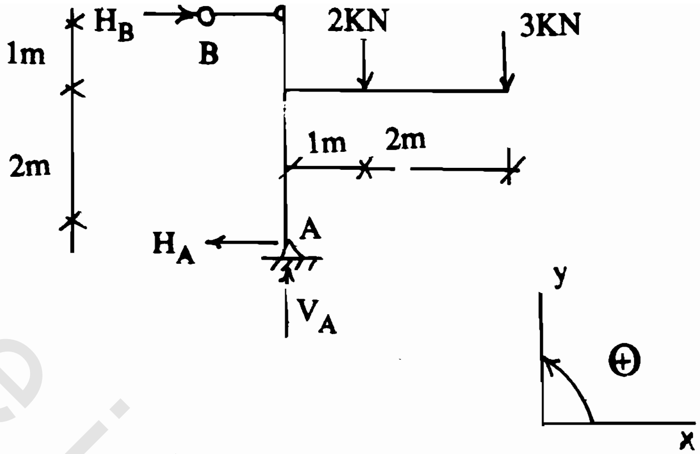
الحـــــل :

عدد ردود الأفعال بهذا المنشأ ثلاثة : اثنان عند الركيزة المزدوجة A رأسى V_A وأفقى H_A والبندول يتحمل رد فعل فى اتجاه محوره أى أفقى وليكن H_B .

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A = 2 + 3 = 5 \text{ KN} \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -H_B(3) - 2 X 1 - 3 \times 3 = 0$$

$$H_B = - \left[\frac{9 + 2}{3} \right] = - \frac{11}{3} \text{ KN}$$

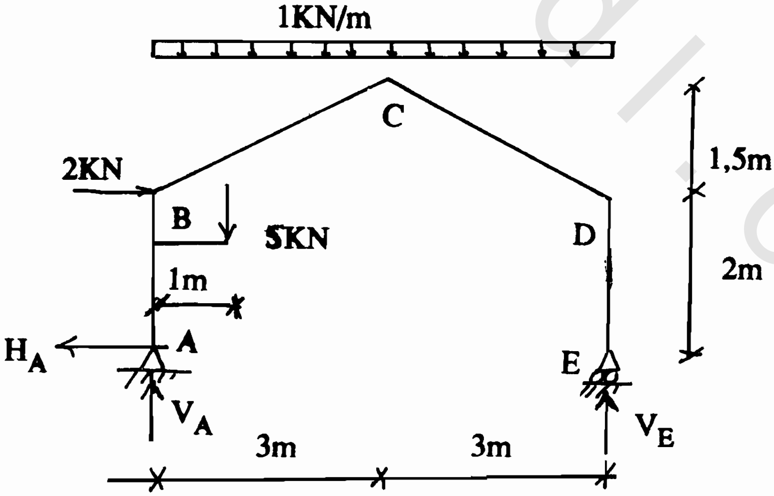


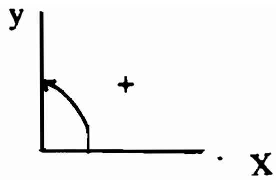
وحيث إن الإشارة سالبة فهذا يعنى أن H_B اتجاهها عكس المفترض أى إلى اليسار بدلاً من اليمين .

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = H_B = \frac{11}{3}\,KN \rightarrow$$

3.6 – أوجد ردود أفعال المنشأ ABCD بالشكل :

الحـــل :





نفرض أن ردود الأفعال كما هو موضح بالرسم وإذا خرجت النتيجة سالبة نعكس الاتجاه .

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 2\ KN \leftarrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 6V_E - 1 \times 6 \times \frac{6}{2} - 5 \times 1$$

$$- 2 \times 2 = 0 \rightarrow V_E = 4.5\ KN \uparrow$$

$$\Sigma M_E = 0 \rightarrow -6V_A + 1 \times 6 \times \frac{6}{2} + 5 \times 5 - 2 \times 2 = 0 \rightarrow$$

$$V_A = 6.5\ KN \uparrow$$

تحقيق صحة النتائج :

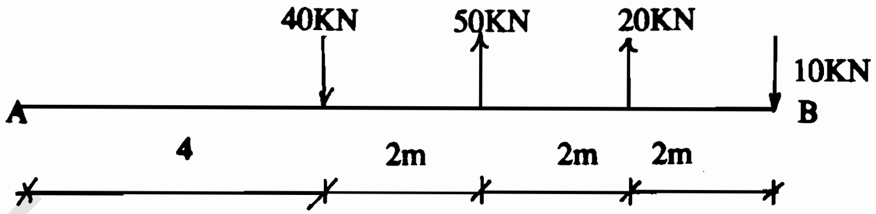
يجب أن نحقق المعادلة :

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Sigma Y = V_A + V_E - 1 \times 6 - 5 = 0$$

هـ . ط .

4.1 المطلوب إيجاد الحل البيانى للتمرين 2.5

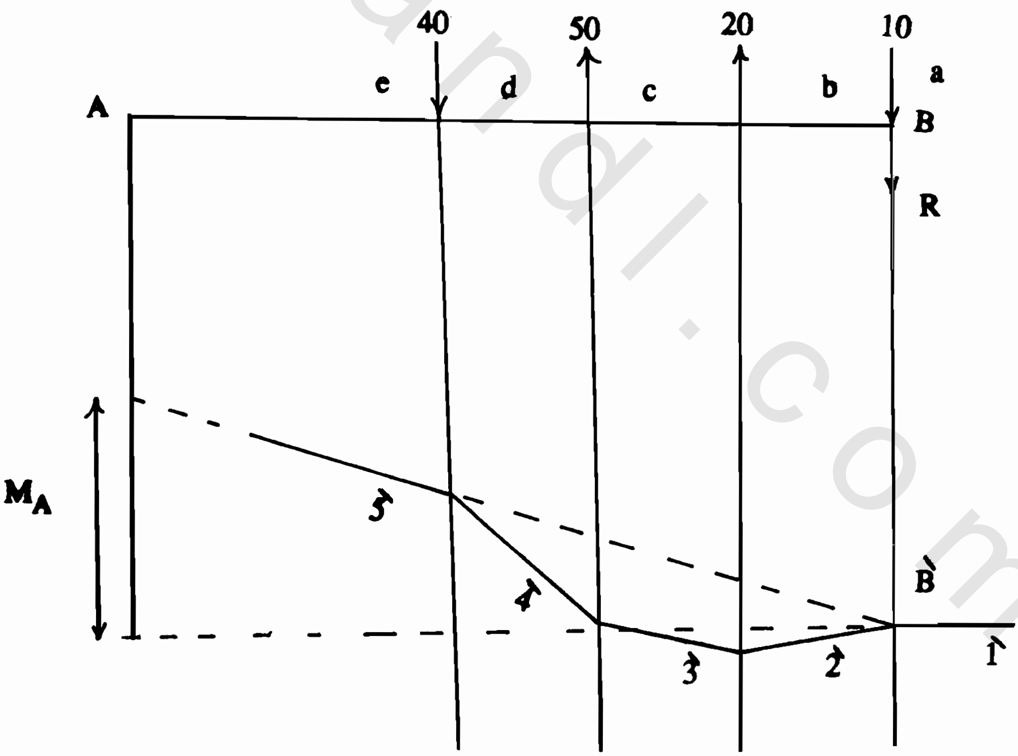


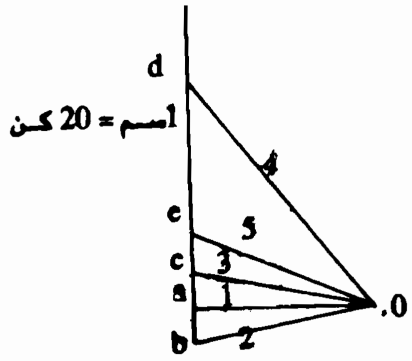
الحـــل :

نبدأ بتقسيم المساحة إلى مناطق (انظر الفقرة 4.4 المثال 4) وبعد ذلك نرسم مضلع القوى وهو فى هذه الحالة خط رأسى .

وتكون المحصلة من المضلع هى قيمة المتجه $\vec{ae}$ وذلك مع أخذ مقياس الرسم فى الاعتبار :

$$|\vec{R}| = |\vec{ae}| = 20\ KN$$





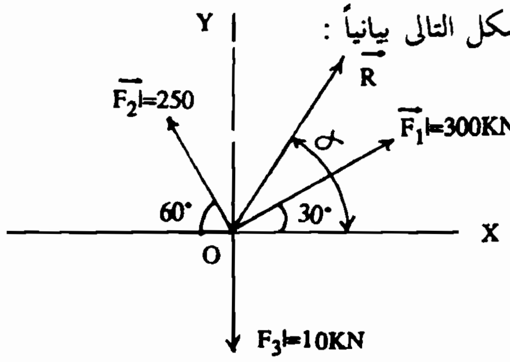
مضلع الأشعة القطبى

لإيجاد نقطة تأثير المحصلة نرسم مضلع الأشعة القطبى (على نفس مضلع القوى) وذلك باختيار نقطة مثل 0 على نفس الخط الأفقى المار بالنقطة a ، ونصل 0 بكل المناطق لنحصل على الأشعة القطبية ، وبعمل موازيات لتلك الأشعة بالمناطق المناظرة لها بالشكل الأصلى نحصل على الأشعة 1́ , 2́ , 3́ , 4́ , 5́ امتداد 1́ , 5́ يلتقيان فى النقطة B` ، وبالتالى تكون نقطة تأثير المحصلة هى مسقط B` على العارضة أى نقطة B (كما سبق وحسبناها بالمثال 2.5) .

أما المسافة المحصورة ما بين امتداد كل من الشعاعين 1́ , 5́ أسفل A وعلى المحور الرأسى فتمثل قيمة العزم عند النقطة A لمجموعة القوى (انظر الفقرة 4.4 مثال 6) .

$$\therefore \left| \overrightarrow{M_A} \right| = 200 \text{ KN.M}$$

4.2 – أوجد محصلة القوى بالشكل التالى بيانياً :



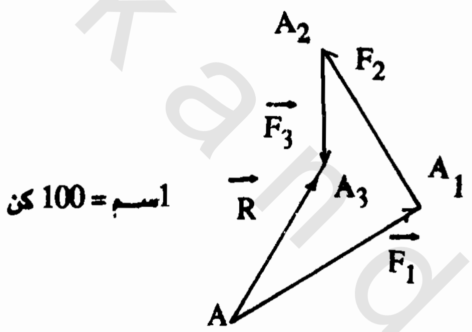
الحـــــل :

فى هذه المسألة نكتفى برسم مضلع القوى للثلاث قوى ، وتكون المحصلة هى المتجه الذى يقفل هذا المضلع باتجاه دورى مضاد . أما نقطة تأثيرها فلابد وأن تكون نقطة تلاقى القوى أى النقطة 0 .

$$|\vec{R}| = \overrightarrow{AA_3} = 255\ KN$$

ومن الرسم يمكن أن نقيس الزاوية مع الأفقى (α)

$$\alpha = 58°$$



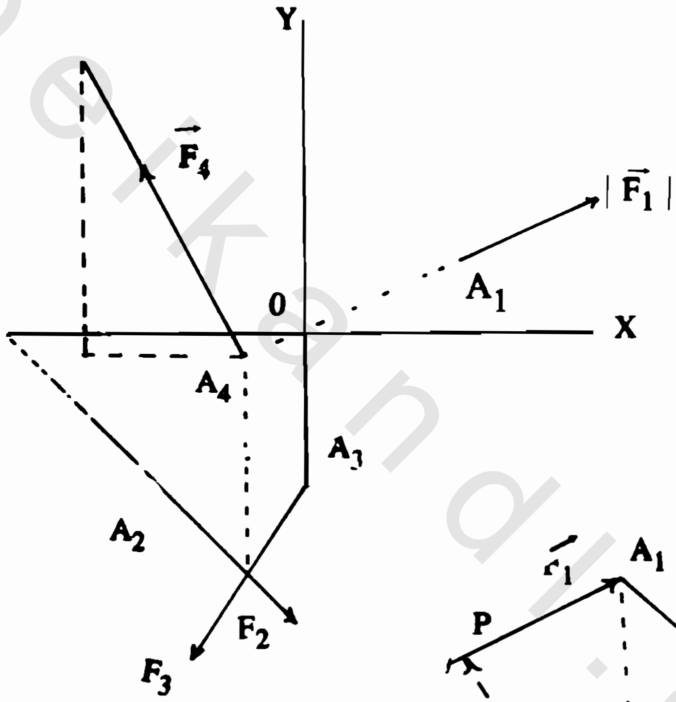
4.3 – المطلوب إيجاد القوة التى تتزن مع القوى التالية بطريقة بيانية :

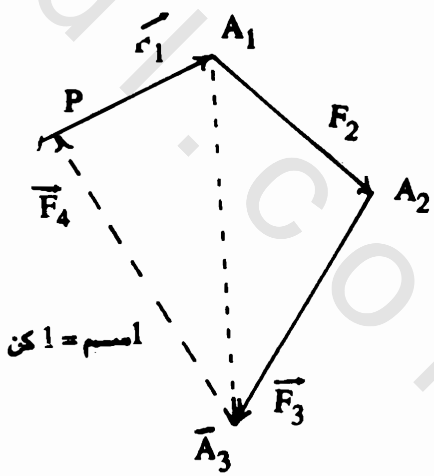
$$\vec{F_1} = 2\,\vec{i} + \vec{j} \quad , \quad \vec{F_2} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \ , \ \vec{F_3} = -2\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$$

والتى تؤثر بالنقاط : $A_1(2,1)$, $A_2(2,-2)$, $A_3(0,-2)$

الحـــــل :

نحاول أولاً توقيع هذه القوى على المستوى XY كما بالرسم التالى ، وبعد ذلك نرسم لها مضلع القوى والضلع الذى يقفل المضلع ، ولكن فى نفس الاتجاه هو القوة التى تجعل تلك المجموعة متزنة .





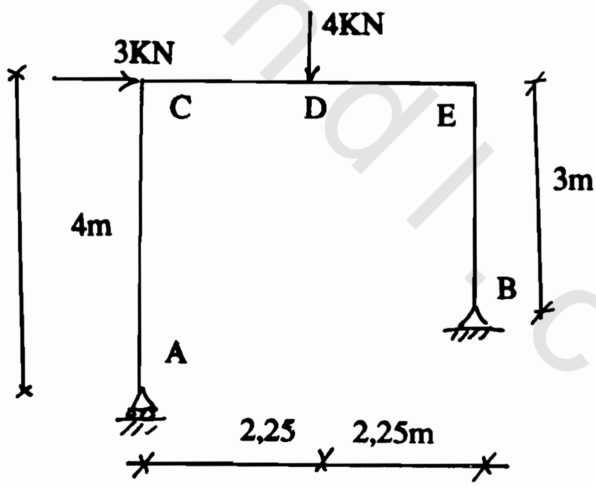
لإيجاد نقطة تأثير القوة التى تجعل هذه المجموعة متزنة أى $\overrightarrow{F_4}$ فإننا نحصل $\overrightarrow{F_2}$ و F_3 وحدهما فتكون المحصلة هى $A_3^{`}A_1$ بمضلع القوى والموازى لهذا المتجه ماراً بنقطة تلاقى تلك القوتين يعطى المحل الهندسى فى نقطة A_4 وهى نقطة التأثير المطلوبة – بقياس هذه القوة والزاوية التى نصنعها مع المحور الأفقى نجد ما يلى :

$$|\overrightarrow{F_4}| = 4.5 \text{ KN} , \alpha = 117°$$

ويمكن كتابة القوة فى الصورة

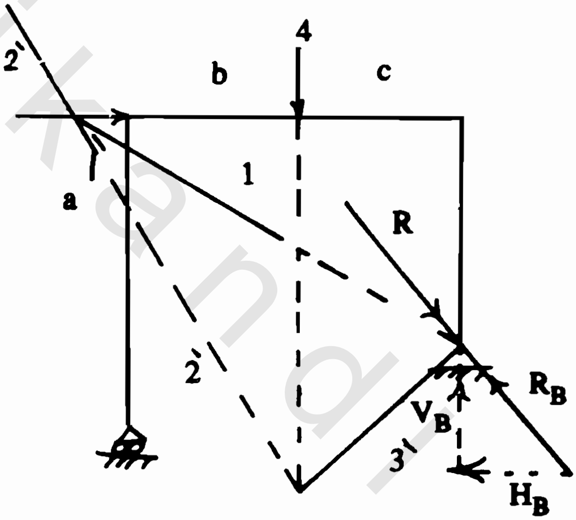
$$\overrightarrow{F_4} = -2 \vec{i} + 4 \vec{J}$$

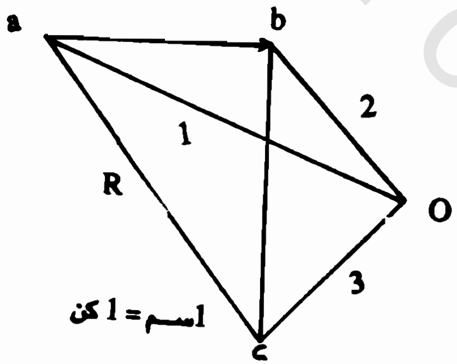
4.4 – المطلوب إيجاد ردود أفعال الهيكل التالى بيانياً :



الحـــــل :

فى هذه المسألة نحاول تقسيم المساحة إلى عدة مناطق كخطوة أولى للحل ، وبعد ذلك نرسم مضلع القوى لنحصل على محصلة القوتين ، ونستكمله إلى مضلع الأشعة القطبية لنحصل على نقطة تأثير تلك المحصلة .





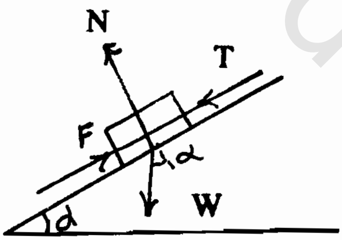
وبعد مضلع الأشعة القطبى نوقع الأشعة على الشكل الأصلى فنجد أن نقطة التقاء أول شعاع `1 وآخر شعاع `3 هى النقطة B ، وبالتالى تكون هى نقطة تأثير المحصلة .

وبما أن الهيكل متزن – فعل ورد فعل – فإن محصلة ردود الأفعال أيضاً يجب أن تمر بالنقطة B ، وهذا غير ممكن لرد الفعل عند A ؛ لأنه رأسى وبالتالى فلابد أن يكون صفراً . ويكون رد الفعل عند B مضاداً فى الاتجاه للمحصلة R ويمكن تحليله أفقياً ورأسياً لإيجاد مركبتيه ونحصل بالقياس على النتائج التالية :

والمركبات تكون : $|\vec{R}| = 5\ KN$, $|\vec{R_B}| = 5\ KN$

$|\vec{V_B}| = 4\ KN \uparrow$, $|\vec{H_B}| = 3\ KN \leftarrow$

5.1 – جسم موضوع على سطح مائل وخشن . وزن هذا الجسم w وهو معرض لقوة F موازية للسطح المائل وتمنع الجسم من الانزلاق . فإذا علم أن $W = F$ وأن معامل الاحتكاك الإستاتيكى للسطح الخشن $\mu = \frac{1}{2}$ أوجد زاوية ميل السطح الخشن على الأفقى فى وضع الاتزان .



الحـــل :

تكون معادلات الاتزان فى هذه الحالة فى اتجاه موازى للسطح وعمودى عليه كما يلى :

$$F_2 = T + W \sin \alpha \quad .... (1)$$

$$N = W \cos \alpha \quad .... (2)$$

أما معادلة الاحتكاك فتكتب :

$$T = N \tan \phi = N \mu \quad .... \quad (3)$$

من المعادلة الأولى والثالثة نجد :

$$F = N\mu + W \sin \alpha$$

وبالتعويض عن N من المعادلة الثانية :

$$F = W \cos \alpha . \mu + W \sin \alpha$$

$$= W [\mu \cos \alpha + \sin \alpha]$$

$$\frac{F}{W} = \frac{1}{2} \cos \alpha + \sin \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cos \alpha$$

$$\therefore \operatorname{Sin}^2 \alpha = 1 - \operatorname{Cos} \alpha + \frac{1}{4} \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

$$\frac{5}{4} \cos^2 \alpha - \cos \alpha \quad \because \quad \alpha = 36.87°$$

$$\frac{5}{4} \cos^2 \alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

5.2 – بالتمرين السابق أوجد قيمة α إذا كانت الزاوية التى تصنعها القوة F مع السطح المائل هى 30° .

أوجد كذلك α إذا كانت : $F = 0,9\ W$.

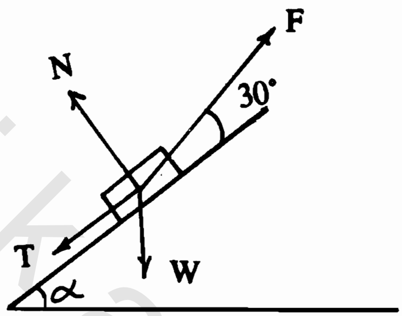
الحـــل :

فى هذه الحالة تصبح المعادلات (1) , (2) , (3) بالتمرين السابق كما يلى :

$$F \cos 30° = \mu (W \cos \alpha - F \sin 30) + \sin \alpha \quad .... \quad (1)$$

$$N = W \cos \alpha - F \sin 30 \qquad (2)$$

$$T = \mu N \qquad (3)$$



بالمثل – كما حدث فى التمرين السابق – يمكن إيجاد المعادلة :

$$F \cos 30° = \mu (W \cos \alpha - F \sin 30) + \sin \alpha \quad .... \quad (4)$$

وحيث إن $F = W$:

$$\cos 30° = \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sin 30) + \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1.245 - 1.116 \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = 0.4464 \pm 0.0572$$

$$\therefore \alpha_1 = 60° . \qquad , \alpha_2 = 67°$$

فى حالة ما إذا كانت $F = 0,9W$

فإننا نجد من المعادلة (4) بالتعويض عن F بدلالة W

$$0.9\ W \cos 30° = \mu\ (W \cos \alpha - 0.9\ W \sin 30) + W \sin \alpha$$

$$0.779 = \frac{1}{2}\ (\cos \alpha - 0.45) + \sin \alpha$$

$$1 = 0.5 \cos \alpha + \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cos \alpha$$

ومنها نحصل على $\alpha = 36.87\sim$

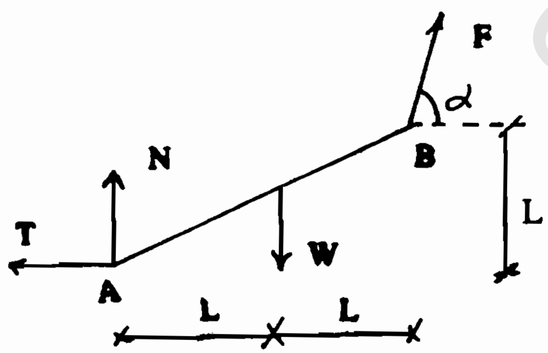
أى نفس القيمة بالتمرين السابق .

5.3 – قضيب وزنه W مشدود من أحد طرفيه بقوة F تميل على الأفقى بزاوية α والطرف الآخر يستند على سطح خشن أفقى . فإذا كان مسقط القضيب فى وضع الاتزان 2l , l على الأفقى والرأسى على الترتيب حيث l وحدة أطوال . فالمطلوب إثبات أن :

$$\tan \phi = \frac{1}{\tan \alpha - 1}$$

حيث ϕ هى زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح الخشن .

استنتج حدود α لكى يتم هذا الاتزان .



الحـــل :

معادلات الاتزان بالنسبة للمحور الأفقى والرأسى تكون :

$$T = F \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$N = W - F \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$W l = F \sin\alpha \,(2 l) - l F \cos\alpha$$

$$W = 2F \sin\alpha - F \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

أما معادلة الاحتكاك فهى كالعادة :

$$T = N \tan\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

بالتعويض عن N , T من المعادلتين (1) , (2) فى المعادلة (4) نجد :

اما معادلة الاحتكاك فهى كالعادة :

$$T = N \tan\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

بالتعويض عن N , T من المعادلتين (1) , (2) فى المعادلة (4) نجد :

$$F \cos\alpha = (W - F \sin\alpha) \tan\phi$$

المعادلة رقم (3) تعطى W بدلالة F ولذلك نعوض فى المعادلة أعلاه فنجد :

$$F \cos\alpha = (2 F \sin\alpha - F \cos\alpha - F \sin\alpha) \tan\phi$$

$$\tan\phi = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha - 1}$$

لكى يتم الاتزان فيجب أن يكون رد الفعل N موجباً (لأعلى) أو على أقل تقدير يساوى صفر ويمكن من المعادلة (4) إيجاد :

$$N \tan\phi = T = F \cos\alpha$$

$$N = F \frac{\cos\alpha}{\tan\phi} = F (\sin\alpha - \cos\alpha)$$

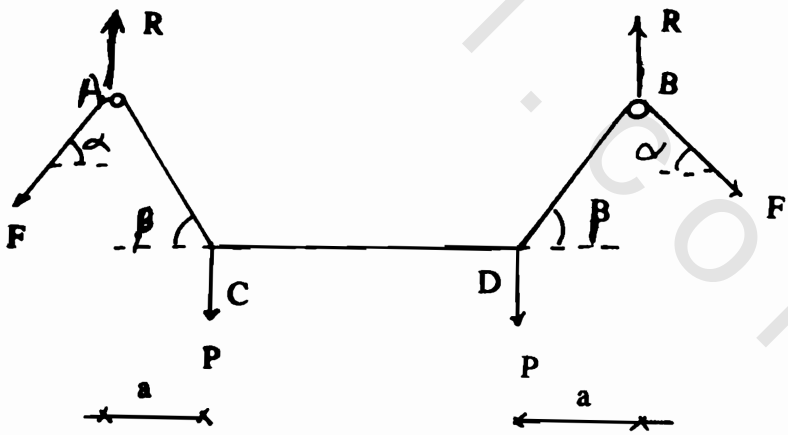
ولكى تكون N موجبة فلابد أن :

$$\sin \alpha > \cos \alpha$$

$$\therefore \quad \alpha \geq 45°$$

6.1 – خيط مربوط إلى مفصلتين B , A فى مستوى أفقى واحد . الخيط مشدود بقوتين F من كل طرف ، وتميل تلك القوة على الأفقى بزاوية α . علق فى الخيط وزنان P فى كل من النقطتين D , C على بعد a عن كل من B , A فأصبح الخيط مائلاً على الأفقى بزاوية β .

المطلوب رد الفعل الرأسى عند كل من المفصلتين . وكذلك العلاقة بين كل من الزاويتين α , β وذلك عندما تكون F = P .



واضح أن الشكل متماثل ولذلك يكون رد الفعل عند كل من B , A متساوى .

فإذا حللنا القوى عند المفصلة A فى اتجاه رأسى نجد أن رد الفعل عند A وهو R يكون :

$$R = P + F \sin \alpha$$

ولإيجاد العلاقة بين كل من الزاويتين α , β ندرس المفصلة C . فإذا حللنا القوى رأسياً عند C نجد أن :

$$P = T_{CA} \sin \beta \rightarrow T_{CA} = \frac{P}{\sin \beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث T_{CA} هو الشد فى الخيط $\overrightarrow{CA}$.

وبدراسة المفصلة A مرة أخرى ، وإجراء التحليل الأفقى هذه المرة نجد :

$$F \cos \alpha = T_{AC} \cos \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وحيث إن :

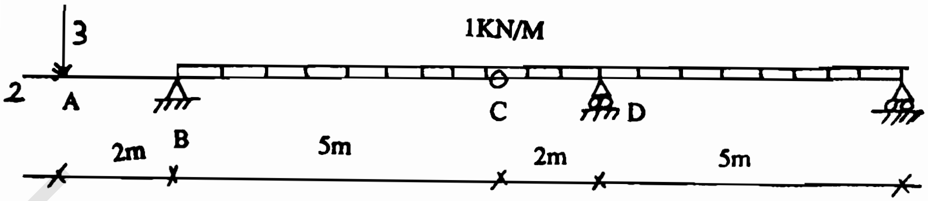
$$T_{CA} = T_{AC} \ , \ F = P$$

فإن المعادلة (2) تصبح :

$$F \cos \alpha = \frac{F}{\sin \beta} \cos \beta \quad \rightarrow \quad \cos \alpha = \cos \beta$$

وهى العلاقة المطلوبة .

6.2 – أوجد القوى بالمفصلة التى بالكمرة أسفله . أوجد كذلك ردود الأفعال



الحـــــل :

لإيجاد القوى بالمفصلة C نجرى قطع بها وندرس الجزء ABC أسفله .

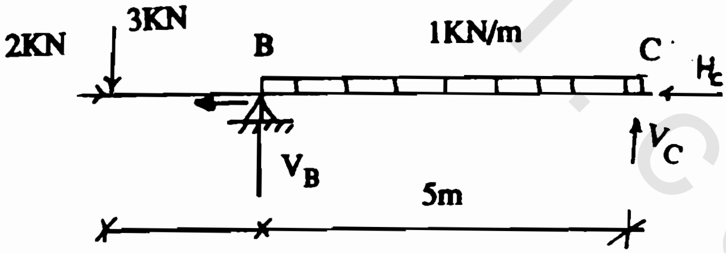
حيث إن الركيزة عند B مزدوجة

فلابد أن يكون لها مركبتين أفقية H_B

ورأسية V_B ومن ثم فإنه بتطبيق

قواعد الاتزان نجد أن : $H_B = 2\ KN \leftarrow$

وبناء على ذلك فإن H_C تكون صفراً . $H_c = 0$



ولإيجاد V_C نحسب العزوم حول B :

$$\sum_{A}^{C} M_B = 0 \rightarrow 3 \times 2 + V_c \times 5 - 1 \times 5 \times 2.5 = 0$$

$$V_C = 1.3\ KN \uparrow$$

ولإيجاد رد الفعل عند B الرأسى V_B يمكن أن نحسب العزوم حول C هذه المرة :

$$\sum_{A}^{C} M_C = 0 \rightarrow 3 \times 2 - V_B \times 5 + 1 \times 5 \times 2.5 = 0$$

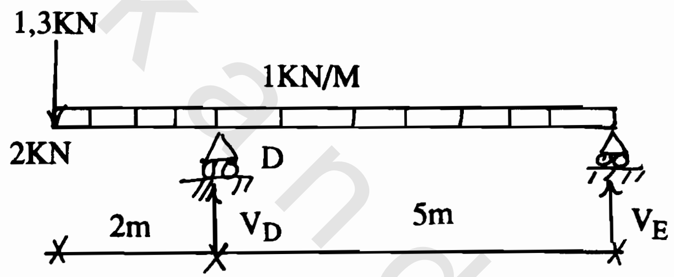
$$\therefore V_B = 6.7 \text{ KN} \uparrow$$

تحقيق صحة النتائج للجزء ABC :

يجب أن نحقق المعادلة $\Sigma Y = 0$:

$$\Sigma Y = V_B + V_C - 3 - 1 \times 5 = 6.7 + 1.3 - 3 - 5 = 0$$

ولإيجاد بقية ردود الأفعال ندرس الجزء CDE :



$$\sum_{C}^{E} M_D = 0 \rightarrow 5V_E - 1 \times 7 \times 1.5 + 1.3 \times 2 = 0$$

$$\therefore V_E = 1.58 \text{ KN} \uparrow$$

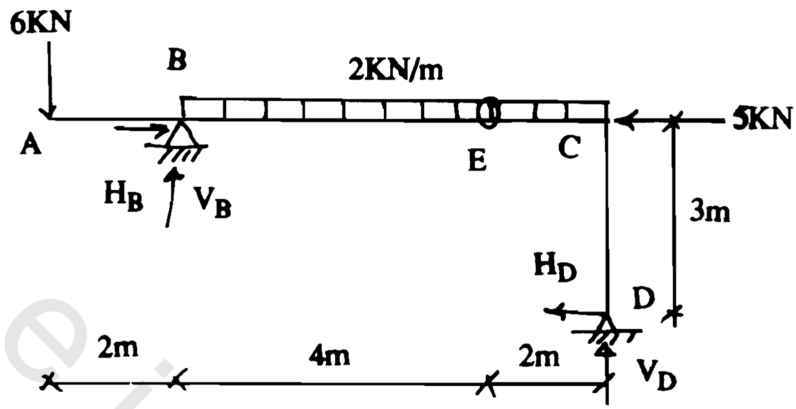
$$\sum_{C}^{E} M_E = 0 \rightarrow 1.3 \times 7 + 1 \times 7 \times 3.5 - 5 V_D = 0$$

$$\therefore V_D = 6.72 \text{ KN} \uparrow$$

تحقيق صحة النتائج للجزء CDE :

$$\Sigma Y = V_D + V_E - 1.3 - 1 \times 7 = 6.72 + 1.58 - 1.3 - 7 = 0$$

6.3 – أوجد القوى بالمفصلة التى بالهيكل التالى وكذلك ردود الأفعال .



الحـــل :

فى هذه الحالة يمكننا أن نبدأ بإيجاد ردود الأفعال عند B حيث :

$$\sum_{A}^{E} M_E = 0 \rightarrow 6 \times 6 - 4V_B + 2 \times 4 \times 2 = 0$$

$$\therefore V_B = 13 \text{ KN} \uparrow$$

$$\sum_{A}^{D} M_D = 0 \rightarrow 6 \times 8 - 6V_B - 3H_B + 2 \times 6 \times 3 + 5 \times 3 = 0$$

$$\therefore H_B = 7 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_D = 7 - 5 = 2 \text{ KN} \leftarrow$$

$$\sum_{D}^{E} M_E = 0 \rightarrow 2V_D - 3H_D - 2 \text{ X } 2 \text{ X } 1 = 0$$

$$\therefore V_D = 5 \text{ KN} \uparrow$$

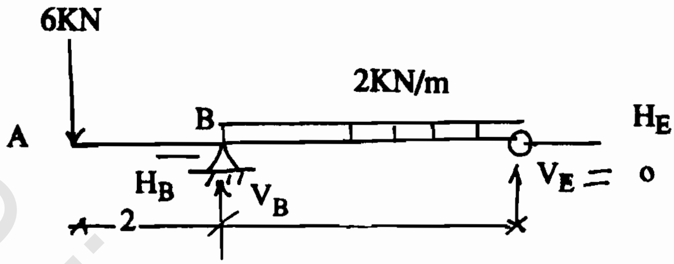
تحقيق صحة النتائج :

$$\Sigma Y = V_B + V_D - 6 - 2 \times 6 = 13 + 5 - 6 - 12 = 0$$

لإيجاد القوى بالمفصلة E يمكننا الآن أن ندرس الجزء ABE :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_E = 7 \text{ KN} \leftarrow$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_E = 13 - 6 - 2 \times 4 \quad \therefore V_E = 1 \text{ KN} \uparrow$$



6.4 – فى التمرين السابق المطلوب إيجاد موضع المفصلة E بحيث يكون قيمة المركبة الرأسية بها صفراً . أوجد ردود الأفعال فى هذه الحالة .

الحـــــل :

بأخذ العزوم حول B للجزء ABE :

وحيث إن المطلوب هو $V_E = O$.

$$\sum_A^E M_B = 0 \rightarrow X V_E - 2 \times \frac{x^2}{2} + 6 \times 2 = 0$$

$$\therefore X^2 = 12 \text{ KN} \rightarrow X = 3.464 \text{ m}$$

$$V_B = \sum_A^E F = 6 + 2 \times 3.464 = 12.928 \text{ KN} \uparrow$$

وتكون قيمة رد الفعل الرأسى عند D من الاتزان الرأسى للشكل كله :

$$V_D = 6 + 2 \times 6 - 12.928 = 5.072 \text{ KN} \uparrow$$

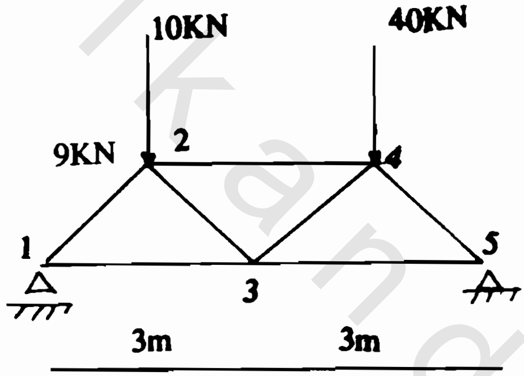
ولإيجاد ردود الأفعال الأفقية عند كل من B , D نحسب العزوم حول D لكل القوى فنجد :

$$\sum_{A}^{D} M_D = 0 \rightarrow 6 \times 8 - 6V_B - 3H_B + 2 \times 6 \times 3 + 5 \times 3 = 0$$

$$\therefore H_B = 7.144 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_D = 7.144 - 5 = 2.144 \text{ KN} \leftarrow$$

7.1 – أوجد بطريقة تحليلية القوى بقضبان الجمالون بالشكل التالى :



الحـــل :

ردود الأفعال :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_5 = 9 \text{ KN} \leftarrow$$

$$\Sigma M_5 = 0 \rightarrow -6V_1 + 10(4.5) + 10(1.5) - 9(1.5) = 0$$

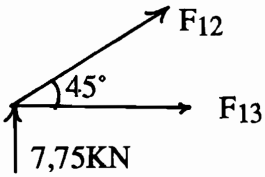
$$\therefore V_1 = 7.75 \text{ KN} \uparrow$$

$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow -6V_5 - 10(4.5) - 10(1.5) - 9(1.5) = 0$$

$$\therefore V_5 = 12.25 \text{ KN} \uparrow$$

القوى بالقضبان :

المفصلة (1) :



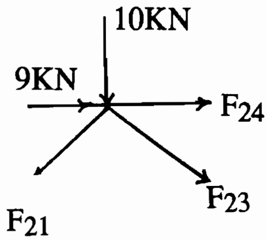
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow F_{12}\frac{1}{\sqrt{2}} + 7{,}75 = 0$$

$$\therefore F_{12} = -7{,}75\ \sqrt{2}$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{12}\ \frac{1}{\sqrt{2}} + F_{13} = 0$$

$$\therefore F_{13} = 7{,}75$$

المفصلة (2) :



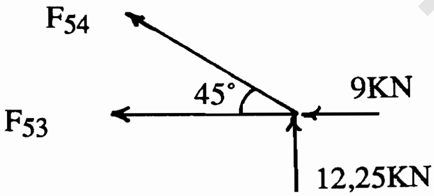
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow -10 - \frac{F_{21}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{23}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$-10 - \frac{1}{\sqrt{2}}(-7.75\sqrt{2}) - \frac{F_{23}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow 9 + F_{24} - \frac{F_{21}}{2} + \frac{F_{23}}{2} = 0$$

$$9 + F_{24} - \frac{1}{\sqrt{2}}(-7.75\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-2.25\sqrt{2}) = 0$$

المفصلة (5) :



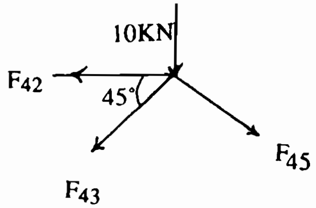
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow 12.25 + \frac{F_{54}}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow F_{54} = -12.25\sqrt{2}$$

$$\Sigma \times = 0 \rightarrow -9 - F_{53}\frac{F_{54}}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow$$

$$9 - F_{53} - \frac{1}{2}(-12.25\ \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \rightarrow F_{53} = 3.25\ KN$$

المفصلة (4) :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow -10 - \frac{F_{43}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{45}}{\sqrt{2}} = 0$$



$$-10 - \frac{F_{43}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (-12.25 \sqrt{2}) = 0$$

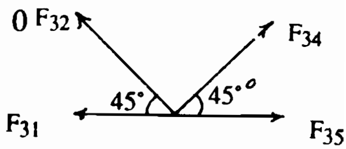
$$\therefore F_{43} = + 2.25 \sqrt{2} \text{ KN}$$

تحقيق صحة النتائج :

ندرس لذلك اتزان المفصلة رقم (3) :

$$\Sigma Y = (F_{34} + F_{32}) / \sqrt{2} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (+2.25 \sqrt{2} + (-2.25 \sqrt{2})) = 0$$

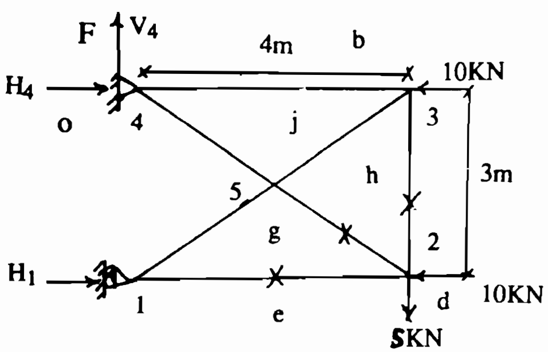


$$\Sigma X = F_{35} + \frac{F_{34}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{32}}{\sqrt{2}} - F_{31} = 0$$

$$3.25 + \frac{1}{\sqrt{2}} (2.25 \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-2.25 \sqrt{2}) - 7.75 = 0$$

وهو ما يحقق صحة النتائج .

7.2 – عن طريق الحل البيانى أوجد القوى بالجمالون التالى ، ثم حقق النتائج تحليلياً بالنسبة للقضبان المحددة بعلامة X .



الحـــل :

يبدأ أولاً بتقسيم المناطق وتعيينها ثم بعد ذلك نرسم مضلع القوى (الخارجية + ردود الأفعال) وبعدها ندرس كل مفصلة لتعيين القوى بالقضبان لديها .

ردود الأفعال :

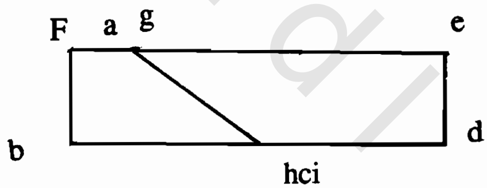
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_4 = 5 \text{ KN} \uparrow$$

$$\Sigma M_4 = 0 \rightarrow 3 H_1 - 10 \times 3 - 5 \times 4 = 0$$

$$\therefore H_1 = \frac{50}{3} \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow 3 H_4 - 10 \times 3 - 5 \times 4 = 0$$

$$\therefore H_4 = \frac{10}{3} \text{ KN} \rightarrow$$

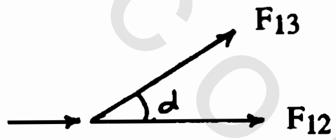


المفصلة	المناطق	القوى	الاتجاه	قيمة القوة ونوعها
①	aega	H1 = Qe ② - ① //eg ③ - ① //ge	تضغط ①	صفر - 16,7 كن
②	edchge	5 = ed 10 = dc ③ - ② // ch ④ - ② // hg ① - ② ge	تشد ②	8,3 كن
③	cbihc	10 = cb ④ - ③ // bi ⑤ - ③ // ih	تضغط ③	- 10,4 كن

تحقيق صحة النتائج تحليلياً للقضبان المحددة بالعلامة X .

المفصلة (1) :

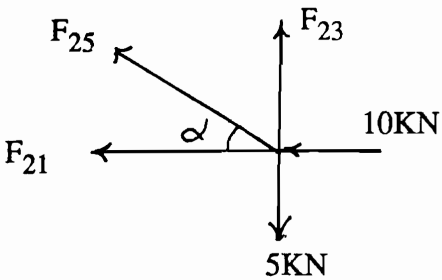
$$\cos \alpha = \frac{4}{5} , \sin \alpha = \frac{3}{5}$$



$$\Sigma Y = 0 \rightarrow F_{13} \sin \alpha = 0 \rightarrow F_{13} = 0$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_1 + H_{13} \sin \alpha + F_{12} = 0 \rightarrow F_{12} = -\frac{50}{3} \text{ KN}$$

المفصلة (2) :



$$\Sigma X = 0 \longrightarrow - F_{21} - F_{25} \cos \alpha - 10 = 0$$

$$\therefore F_{25} = [- (- \frac{50}{3}) - 10] \frac{5}{4} \longrightarrow$$

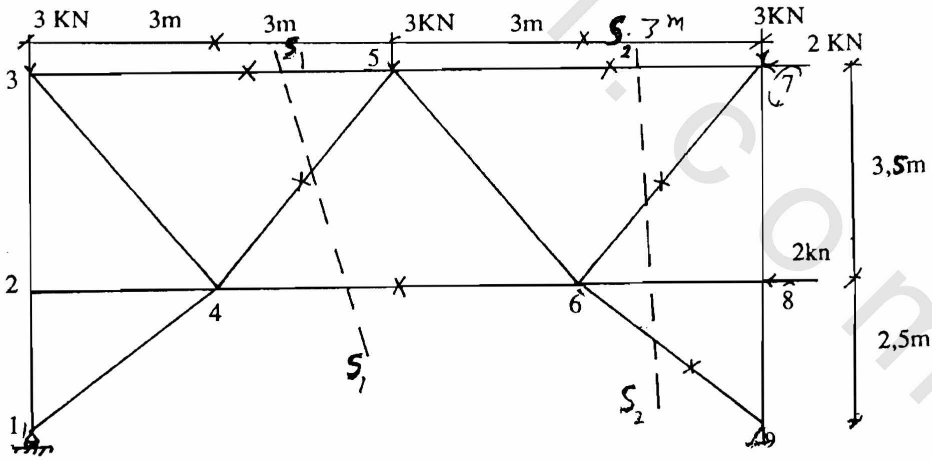
$$F_{25} = \frac{25}{3} \text{ KN}$$

$$F_{25} + F_{23} - 5 = 0 \longrightarrow$$

$$\therefore F_{23} = 5 - \frac{25}{3} (\frac{3}{5}) = 0 \text{ KN}$$

وهو ما يحقق صحة النتائج البيانية :

7.3 – أوجد القوى بالقضبان المحدددة بعلامة X فقط فى الجمالون بالشكل التالى :



الحـــــل :

ردود الأفعال :

$$\sum X = 0 \rightarrow H_9 = 2 + 2 = 4 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\sum M_9 = 0 \rightarrow 12 V_9 + 2(2.5) + 2(6) - 3(12) - 3(6) = 0$$

$$\therefore V_9 = \frac{37}{12} \text{ KN} \uparrow$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow -12 V_1 + 2(2.5) + 2(6) + 3(12) + 3(6) = 0$$

$$\therefore V_1 = \frac{71}{12} \text{ KN} \uparrow$$

لإيجاد القوى بالقضبان المحددة بعلامة X نلجأ إلى طريقة المقاطع . فندرس القطاع $S_1 - S_1$ وبالتحديد الجزء الأيسر لهذا القطاع :

$$\sum Y = 0 \rightarrow \frac{71}{12} - 3 + F_{45} \sin \alpha = 0$$

$$\sin \alpha = 0.759 \quad \cos \alpha = 0.651$$

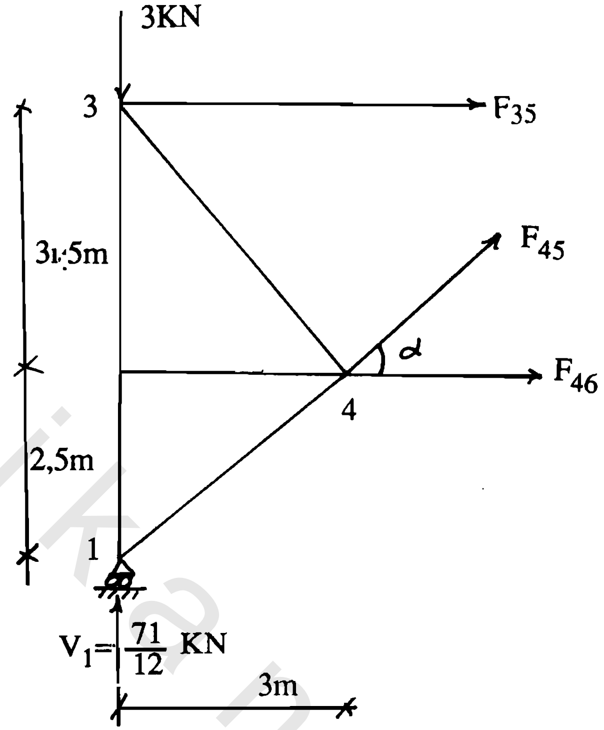
$$F_{45} = \frac{1}{0.759} [3 - \frac{71}{12}] = -2.214 \text{ KN}$$

$$\sum M_4 = 0 \rightarrow 3(3) - F_{35} (3.5) - \frac{71}{12} (3) = 0$$

$$F_{35} = -2.5 \text{ KN}$$

$$\sum X = 0 \rightarrow F_{35} + F_{45} \cos \alpha + F_{46} = 0$$

$$F_{46} = -(-2.5) - (-2.214)\, 0.651 = 3.941 \text{ KN}$$



بالنسبة للقضبان الثلاثة الأخرى ندرس المقطع $S_2 - S_2$ إلا أنه يمر بأربعة قضبان غير معلومة القوى ، وهذا يزيد عن الحد الأقصى المسموع به وهو ثلاثة قضبان ، ولذلك فإنه يجب إيجاد أحدى القضبان قبل دراسة هذا القطاع .

ويمكن إيجاد القوى بالقضيب (8) - (6) بسهولة وذلك واضح من دراسة المفصلة (8) حيث إن القوى بتلك القضيب تكون مساوية للقوة عند المفصلة ومضاده لها فى الاتجاه لحدوث الاتزان (انظر الفقرة 7.5) .

$$\therefore F_{8\text{-}6} = -2 \text{ KN}$$

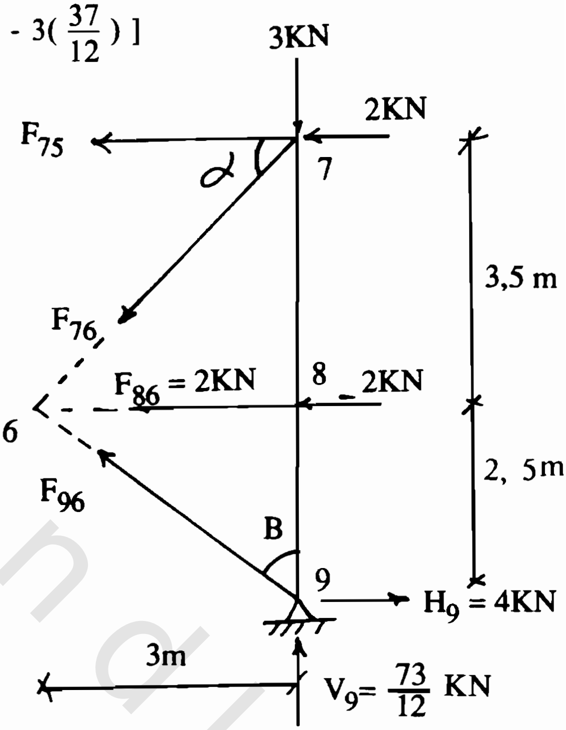
الآن ندرس الجزء على يمين القطاع $S_2 - S_2$:

$$\Sigma M_6 = 0 \rightarrow 3\,V_9 + 2.5\,H_9 + 2(3.5)$$

$$- 3\,(3) + F_{75}\,(3.5) = 0$$

$$F_{75} = \left(\frac{1}{3.5}\right)\left[\,9 - 7 - 25(4) - 3\left(\frac{37}{12}\right)\right]$$

$$\therefore F_{75} = -\,4.93 \text{ KN}$$



$$\Sigma M_7 = 0 \rightarrow 6\,H_9 - 2(3.5) - F_{86}(3.5)$$

$$- F_{96} \sin\beta\,(6) = 0$$

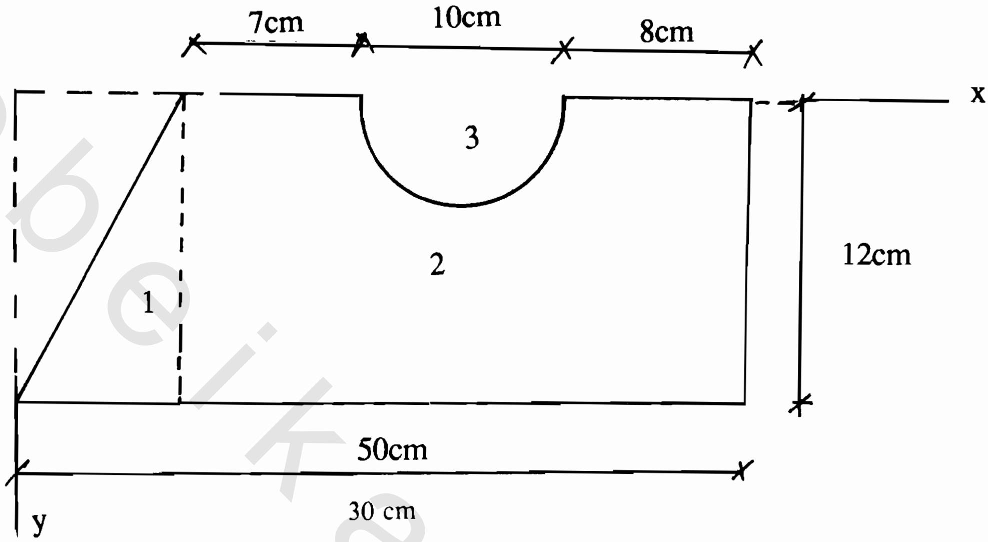
$$\sin\beta = 0.768 \quad , \quad \cos\beta = 0.64$$

$$F_{96} = \frac{1}{6(0.768)}\left[\,6(4) - 7 - (-2)\,3.5\,\right] = 5.2 \text{ KN}$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_9 + F_{96}\cos\beta - F_{76}\sin\alpha - 3 = 0$$

$$F_{76} = \frac{1}{0.759}\left[\,\frac{37}{12} + 5.2\,(0.64) - 3\right] = 4.495 \text{ KN.}$$

8.1 – المطلوب إيجاد مركز ثقل شبه المنحرف الذى استقطع منه نصف الدائرة بالشكل التالى :



الحـــل :

بأخذ المحاور كما بالشكل ، وبإجراء تقسيم الشكل إلى ثلاث مناطق حيث

المنطقة (1) هى مثلث مساحته = $A_1 = \frac{1}{2}(12x5) = 30$ سم^2

المنطقة (2) هى مستطيل مساحته = $A_2 = 25x12 = 300$ سم^2

المنطقة (3) وهى الجزء المستقطع ، وهو عبارة عن نصف دائرة ولذلك نعتبر أن مساحته سالبة $A_3 = -(5)^2 \frac{\pi}{2} = -39.37$ سم^2

بتطبيق المعادلات (8.3) نجد :

$$X_c = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + (-A_3) X_3}{A_1 + A_2 + (-A_3)}$$

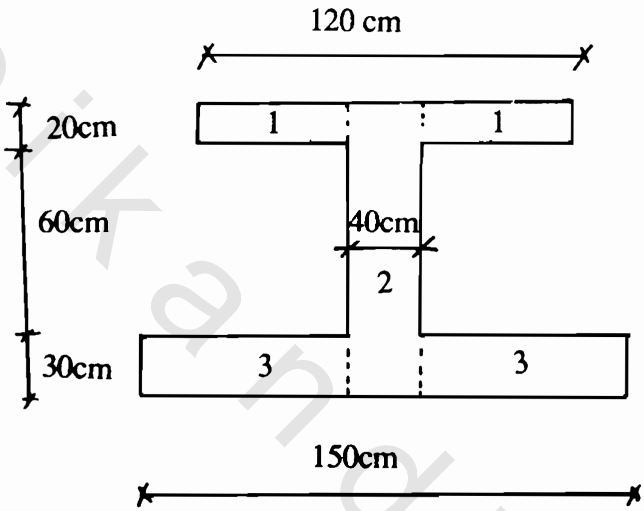
حيث X_1 , X_2 , X_3

الإحداثى الأفقى لمراكز ثقل المثلث والمستطيل والدائرة على الترتيب :

$$X_c = \frac{30 \times \frac{2}{3}(5) + 300\left(5 + \frac{25}{2}\right) - 39.27\left(12 + \frac{10}{2}\right)}{30 + 300 - 39.27} = 16.110 \text{ cm}$$

$$Y_c = \frac{30 \times \frac{2}{3}(12) + 300\left(\frac{12}{2}\right) - 39.27\left(\frac{4 \times 5}{3\pi}\right)}{30 + 300 - 39.27} = 6.73 \text{ cm}$$

8.2 – أوجد مركز ثقل القطاع على شكل حرف I بالشكل التالى :



الحــــل :

يتضح من تماثل الشكل حول محور رأسى يمر بمنتصفه أن مركز الثقل سيقع على هذا المحور ، ولذلك فالمطلوب فقط هو تحديد ارتفاع أو بعد هذا المركز عن الشريحة العلوية للقطاع (v) .

ونقسم الشكل إلى ثلاثة مستطيلات كما هو موضح ، ونلخص العمل فى الجدول التالى :

	b	h	(b.h)	d	d(b.h)
1	80	20	1600	10	16000
2	40	110	4400	55	242000
3	110	30	3300	95	313500
Σ			9300		571500

$$\nu = \frac{571500}{9300} = 61.45 \text{ cm}$$

8.3 – شكل رباعى ABCD على رؤوسه الأربع الكتل التى قيمها 1,2,3,4 وحدات على الترتيب فإذا علم أن إحداثيات رؤوس الشكل هى :

A(-1,-2,2) , B(3,2,-1) , C(1,-2,4) , D(3,1,2)

أوجد إحداثيات مركز هذه الكتل .

الحـــل :

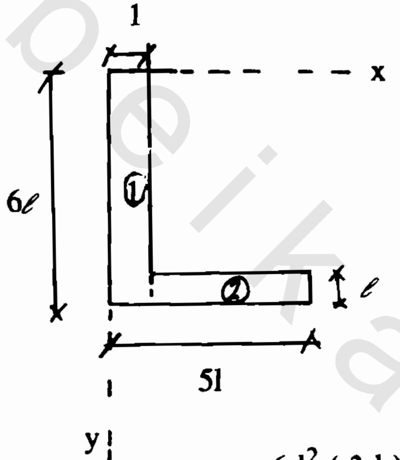
$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \ x_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{1(-1) + 2(3) + 3(1) + 4(3)}{1 + 2 + 3 + 4} = 2$$

$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \ y_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{1(-2) + 2(2) + 3(-2) + 4(1)}{1 + 2 + 3 + 4} = 0$$

$$Z_C = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \; z_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{1(2) + 2(-1) + 3(4) + 4(2)}{1 + 2 + 3 + 4} = 2$$

وبالتالى تكون إحداثيات مركز الكتلة : $(2 , 0 , 2)$

8.4 أوجد مركز ثقل القطاع على شكل زاوية .



الحـــل :

حيث l هى وحدة أطوال .

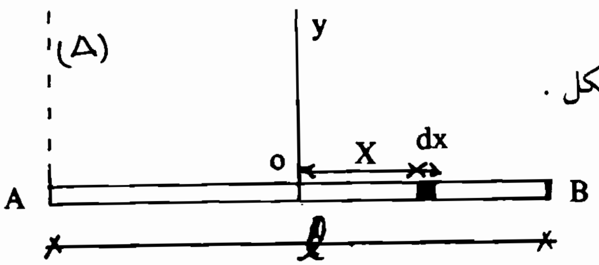
$$Y_c = \frac{6\,l^2\,(3\,l) + 4\,l^2\,(5.5\,l)}{l\,(6\,l) + l\,(4\,l)} = 4\,\ell$$

$$X_c = \frac{6\ell^2\,(0.5\ell) + 4\ell^2\,(3\ell)}{l\,(6\ell) + l\,(4\ell)} = 1.5\,\ell$$

9.1 – أحسب عزم القصور الذاتى لقضيب منتظم ومتجانس طوله l وكتلته M وذلك بالنسبة لمحور عمودى على القضيب ومار

(أ) مركز كتلته 0 .

(ب) مار بنهايته كما بالشكل .



الحـــل :

(أ) باعتبار العنصر dx على بعد x من المحور الرأسى oy والذى كتلته dm حيث :

$$dm = dx \cdot \lambda$$

ويكون عزم القصور الذاتى للقضيب بالنسبة للمحور oy :

$$I_{yy} = I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda x^2 \, dx = 2\lambda \int_0^{l/2} x^2 \, dx = 2\lambda \left[\chi^3 \right]_0^{l/2}$$

$$I_{yy} = \frac{2\lambda l^3}{24} = \frac{\lambda l^3}{12}$$

حيث λ هى الكثافة الطولية :

$$\therefore \lambda = \frac{M}{l}$$

$$I_{yy} = \frac{M l^2}{12}$$

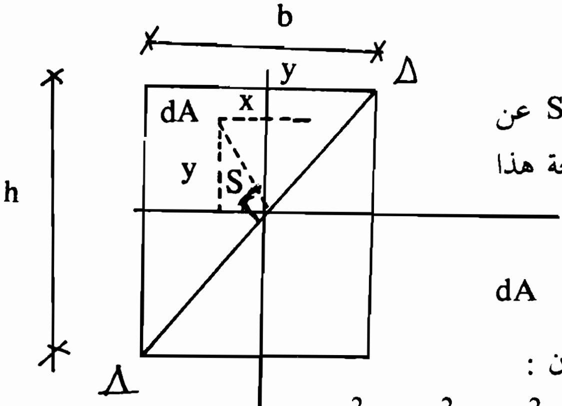
(ب) أما بالنسبة للمحور △ فإننا نستعمل نظرية المحاور المتوازية .

$$I_{\triangle\triangle} = I_{yy} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I_{\triangle\triangle} = \frac{M l^2}{12} + M\frac{l^2}{4} = \frac{M l^2}{3} = I_A$$

9.2 – أحسب عزم القصور الذاتى لمستطيل bxh وذلك حول أحد أقطاره (△△) .

الحـــل :



لنعتبر العنصر الذى يبعد مسافة S عن المحور القطرى △△ وتكون مساحة هذا العنصر dA حيث :

$$dA = dx \, dy$$

ونلاحظ من هندسة الشكل أن :

$$S^2 = X^2 + Y^2$$

$$\because I_{\triangle\triangle} = \int_A S^2\, dA = \int_A (x^2 + Y^2)\, dA = \int_A x^2\, dA + \int_A Y^2\, dA$$

$$\because I_{\triangle\triangle} = I_{yy} + I_{xx}$$

ويمكن أن نستفيد من نتائج المثال الأول بالفصل التاسع حيث وجدنا أن :

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{\triangle\triangle} = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) = \frac{A}{12}(h^2 + b^2)$$

حيث A هى مساحة المستطيل .

9.3 – أوجد عزم القصور الذاتى للمكعب حول أحد أحرفه علماً بأن طول الحرف هو a .

الحـــل :

نفرض أن الحرف المراد إيجاد عزم القصور الذاتى حوله هو موازى للمحور الرأسى oy وهو بالتالى يبعد عنه مسافة مقدارها $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ حيث إن المحور oy يكون مار بمركز المكعب .

من تعاريف عزم القصور الذاتى نجد أن هذا العزم حول المحور oy (المعادلة 9.3) .

$$I_{yy} = \iint (z^2 + X^2)\, dx\, dz$$

$$= \iint Z^2\, dx dz + \iint x^2\, dx dz$$

$$I_{yy} = \frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12} = \frac{a^4}{6}$$

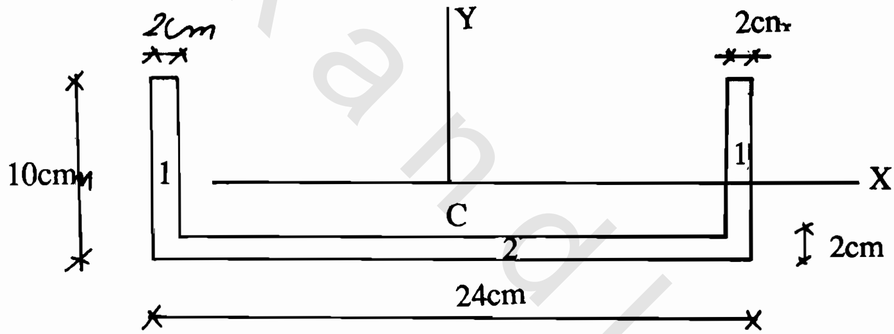
$$= \frac{\alpha^4}{3} + \alpha^2 \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\,\alpha^4}{3}$$

بإستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد أن عزم القصور الذاتى حول الحرف △△ يكون :

$$I_{\triangle\triangle} = I_{yy} + A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^4}{3} + a^2\,\frac{a^2}{2} = \frac{2\,a^4}{3}$$

9.4 – أحسب عزم القصور الذاتى ونصف قطر القصور الذاتى للقطاع بالشكل التالى ، وذلك بالنسبة لمحور أفقى مار بمركز ثقل الشكل :



الحـــــل :

من التماثل حول المحور الرأسى المار بمنتصف الشكل سيكون مركز الثقل عليه ، وبالتالى فالمطلوب فقط هو تعيين موضعه الرأسى ، وذلك قبل الشروع فى حساب عزم القصور الذاتى .

نقسم الشكل إلى مستطيلات كما هو موضح ونجرى كل العمليات بالجدول التالى :

	b	h	b h	d	d(bh)	s(b.h)	s^2(b.h)	(bh)s^2
1	2x2	10	40	5	200	2	160	1000 /3
2	20	2	40	9	360	2	160	160 / 3
Σ			80		560		320	1160 / 3

$$\nu = \frac{d\,(bh)}{bh} = \frac{560}{80} = 7 \text{ cm}$$

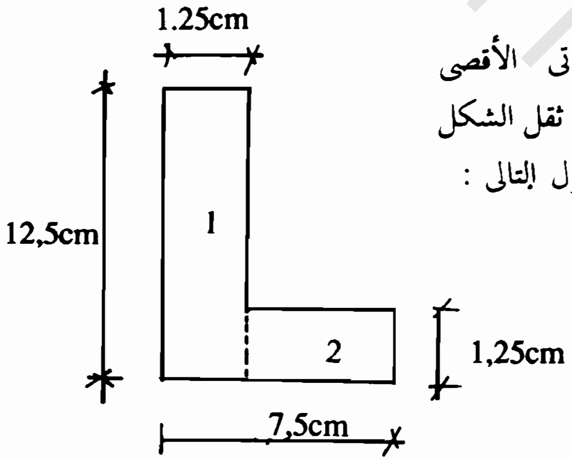
$$I_{xx} = \Sigma\, S^2\,(b.h) + \Sigma\,\frac{bh^3}{12} = 330 + \frac{1160}{3} = \frac{2120}{3} \text{ cm}^4$$

$$r_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{\Sigma\, bh}} = \sqrt{\frac{2120/3}{80}} = 2.972 \text{ cm}$$

9.5 – أوجد عزوم القصور الذاتى القصوى والدنيا للشكل التالى . أوجد كذلك اتجاهات المحاور التى تقع عليها .

الحــــل :

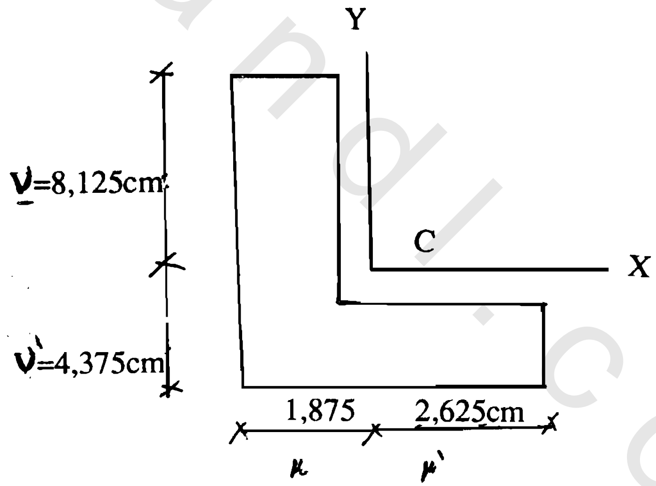
لإيجاد عزم القصور الذاتى الأقصى والأدنى لابد من إيجاد مركز ثقل الشكل أولاً وهذا نلخصه فى الجدول التالى :



	b	h	b . h	d	d(bh)	d`	d`(bh)
1	1,25	12,5	15,625	6,25	97,656	0,625	9,7656
2	6,25	1,25	7,8125	11,875	92,773	4,375	43,1797
Σ			23,4375		190,429		43,9453

$$\nu = \frac{190.429}{23.4375} = 8.125 \text{ cm} \quad , \quad \nu = 12.5 - 8.125 = 4.375 \text{ cm}$$

$$\mu = \frac{43.9453}{23.4375} = 1.875 \text{ cm} \quad , \quad \mu = 7.5 - 1.875 = 5.625 \text{ cm}$$



بعد توقيع مركز الثقل كما بالشكل السابق يمكن الآن حساب عزوم القصور الذاتى حول المحاور المارة بمركز الثقل ، وذلك فى الجداول التالية :

	b	h	b . h	S	S(bh)	S`	S`2 (bh)	$bh^3/12$	$bh^3/12$
1	1,25	12,5	15,625	1,875	54,93	-1,25	24,414	203,45	2,0345
2	6,25	1,25	7,8125	3,75	109,86	2,5	48,828	1,02	25,432
Σ			23,4375		164,79		73,242	204,47	27,466

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} + S^2\,(bh) = 204.47 + 164.79 = 369.26 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = \frac{b^3h}{12} + S^2\,(bh) = 27.466 + 73.242 = 100.708 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = (b_1 h_1)(S_1)(S`_1)(S_1) + (b_2 h_2)(S`_2)(S_2)$$

$$= 15,625\,(-1,25)(1,875) + 7,8125\,(2,5)(-3,75)$$

$$I_{xy} = -109.863 \text{ cm}^4$$

$$I_{max.} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

$$= \frac{369.26 + 100,708}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{369,26 - 100,708}{2}\right) + (109,863)^2}$$

$$= 234.984 \pm 173.465$$

$$I_{max.} = 408.45 \text{ cm}^4 \quad , \quad I_{min} = 61.52 \text{ cm}^4$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{I_{xy}}{\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}}$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{-109,863}{\frac{369,26 - 100,708}{2}} = 0,818$$

$$\therefore \quad 2\alpha_1 = 39,29^\circ \quad , \quad 2\alpha_2 = 219,29^\circ$$

$$\alpha_1 = 19,64^\circ \quad , \quad \alpha_2 = 109,645^\circ$$

ولمعرفة أى محور يوافق عزم القصور الذاتى الأقصى نعوض فى المعادلة :

$$I = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$= \frac{369,26 + 100,708}{2} + \frac{369,26 - 100,708}{2} \cos 39,29^\circ - (-109,863) \sin 29,29^\circ$$

$$I = 234,984 + 103,923 + 69,57 = 408,45 = I_{max}$$

∴ الزاوية 19.645 توافق عزم القصور الذاتى الأقصى .