الباب التاسع

عزم القصور الذاتى

9.1 أنواع عزم القصور الذاتى :

تعريف : يعرف عزم القصور الذاتى – ويعرف أحياناً بالعطالة – لمجموعة من النقاط المادية بالنسبة لمستوى أو محور أو نقطة على أنه حاصل ضرب كتل تلك النقاط المادية فى مربع المسافة بينها وبين المستوى أو المحور أو النقطة المراد حساب عزم القصور حولها .

ويمكننا أن نكتب صورته العامة كما يلى :

$$I = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \;\ldots\ldots\; + m_i d_i^2 + \ldots + m_n d_n^2$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (9.1)$$

حيث m_i هى كتلة النقطة المادية i ،

و d_i هى البعد بين النقطة المادية i والمستوى أو المحور أو النقطة المراد حساب عزم القصور الذاتى حولها .

ولندرس ذلك بشىء من التفصيل ، فدعنا نعتبر مجموعة النقاط المادية :

$$A_1 \;,\; A_2 \,,\, \ldots\ldots \,,\, A_i \,,\; \ldots \;,\; A_n$$

والتى كتلها على التوالى : $m_1 \,,\, m_2 \,,\, \ldots \,,\, m_i \,,\; \ldots\ldots \;,\; m_n$

وليكن متجه الموضع لها بالنسبة لنقطة الأصل o كما بالشكل 9,1 هو :

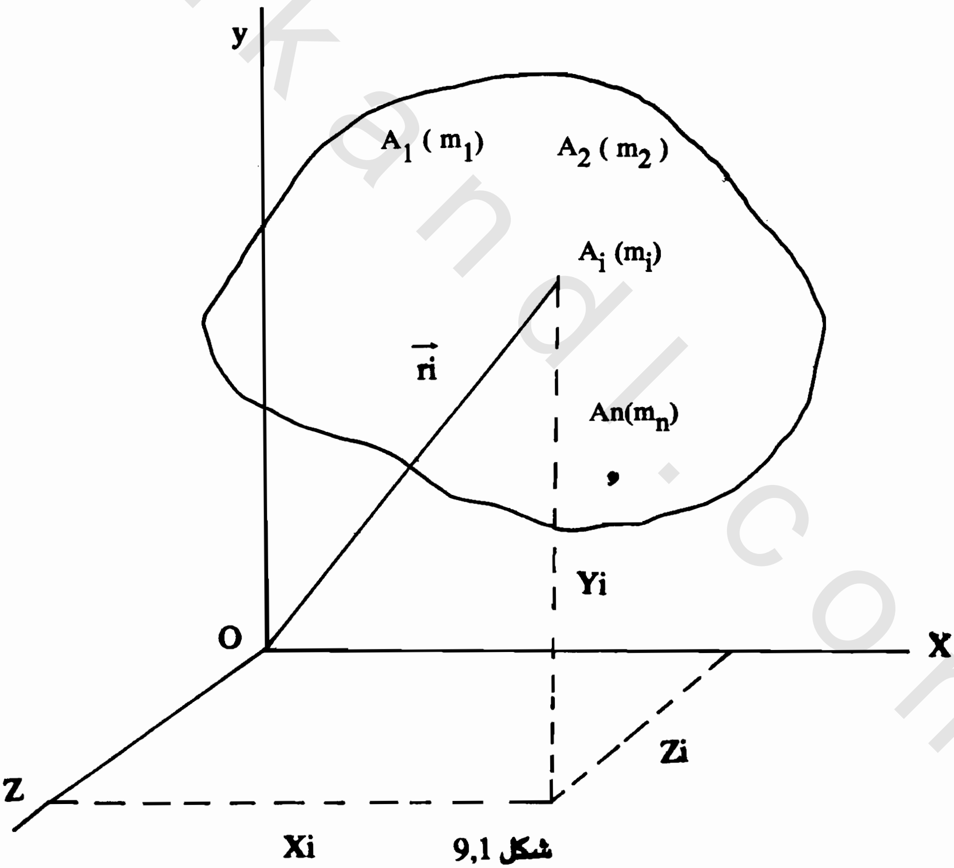
$$\vec{r}_1 \ , \ \vec{r}_2 \ , \ \ldots\ldots \ , \ \vec{r}_i \ , \ldots\ldots , \ \vec{r}_n$$

وتكون مركبات متجه الموضع $\vec{r}_i$ كما هو معروف من دراستنا السابقة :

$$\vec{r}_i = X_i \ \vec{i} + y_i \ \vec{j} + z_i \ \vec{k}$$

وبالتالى فإننا يمكننا أن نكتب المعادلات التالية بالنسبة لمختلف عزوم القصور الذاتى ، وذلك تبعاً للتعريف المبين أعلاه :

١ – عزم القصور الذاتى بالنسبة للمستويات :



شكل 9,1

$$
\left.
\begin{aligned}
I(xoy) &= \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 \\
I(yoz) &= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \\
I(zox) &= \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2
\end{aligned}
\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (9.2)
$$

٢ - عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحاور :

$$
\left.
\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) \\
I_{yy} &= \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i^2 + x_i^2) \\
I_{zz} &= \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)
\end{aligned}
\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (9.3)
$$

٣ - عزم القصور الذاتى بالنسبة لنقطة ،

ويعرف هذا العزم أيضاً بعزم القصور الذاتى القطبى ؛

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \qquad \ldots\ldots\ldots \; (9.4)$$

ونلفت النظر أن معادلات عزم القصور الذاتى أعلاه كانت لنقاط مادية أما إذا كان الجسم متصلاً فإننا نستبدل علامة التكامل بعلامة التجميع ..

$$I = \int P\, d^2 .\, dV \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (9.5)$$

حيث P هى كثافة الجسم الحجمية .

9.2 العلاقة بين مختلف عزوم القصور الذاتى :

بجمع عزوم القصور الذاتى بالنسبة للمحاور الثلاثة (أى بجمع المعادلات (9.3)) نحصل على المعادلات (9.4) وذلك بعد قسمة الجمع على 2 :

$$I_0 = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9.6)$$

هذا ويمكن للقارىء أن يستنتج عزم القصور الذاتى بالنسبة لمختلف المستويات من المعادلات (9.3) حيث :

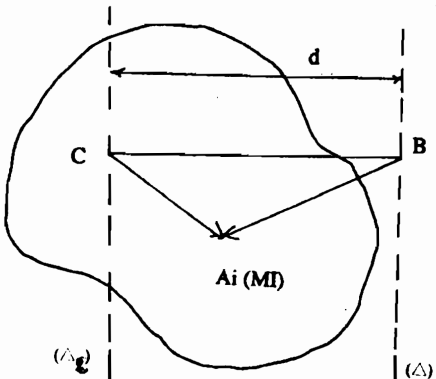
$$I_{(xoy)} = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})$$

$$I_{(yoz)} = \frac{1}{2} (I_{yy} + I_{zz} - I_{xx}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9.7)$$

$$I_{zox} = \frac{1}{2} (I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})$$

9.3 نظرية هيجنز للمحاور المتوازية :

عزم القصور الذاتى لمجموعة من النقاط المادية بالنسبة لمحور ما (Δ) يكون مساوياً لحاصل جمع عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحور (Δ_G) الموازى للمحور (Δ) والمار بمركز الكتلة C ، وعزم القصور الذاتى بالنسبة لـ (Δ) للكتلة الكلية المركزه فى C .



شكل 9,2

الإثبـــات :

لتكن A_i نقطة مادية من مجموعة النقاط . عند هذه النقطة يمر مستوى عمودى على كل من المحورين المتوازيين ($\triangle_c$) و ($\triangle$) كما بالشكل 9.2 . ولتكن المسافة بين المحورين هى d .

عزم قصور الذاتى بالنسبة للمحور ($\triangle$) يكون :

$$I_{\triangle\triangle} = \Sigma m_i \cdot \vec{BA}_i^2$$

ومن العلاقات الاتجاهية نكتب :

$$\vec{BA}_i = \vec{BC} + \vec{CA}_i$$

بالتعويض عن المتجه $\vec{BA}_i$ نجد :

$$I_{\triangle\triangle} = \Sigma m_i \cdot (\vec{BC} + \vec{CA}_i)^2 = \Sigma m_i \cdot \overline{BC}^2 + \Sigma m_i \cdot \overline{CA_i}^2$$

$$+ 2\Sigma m_i \cdot \vec{CA}_i \cdot \vec{BC} = \vec{BC}^2 \Sigma m_i + \Sigma m_i \cdot \vec{CA}_i^2$$

$$+ 2 \vec{BC} \cdot \Sigma m_i \cdot \vec{CA}_i$$

ومن النظريات الخاصة بالعزوم نجد أن :

$$\Sigma m_i \vec{CA}_i = M \cdot \vec{r}_c = 0$$

$$\therefore I_{\triangle\triangle} = I_{\triangle c} + M.d^2 \qquad \text{.........................} \quad (9.8)$$

حيث :

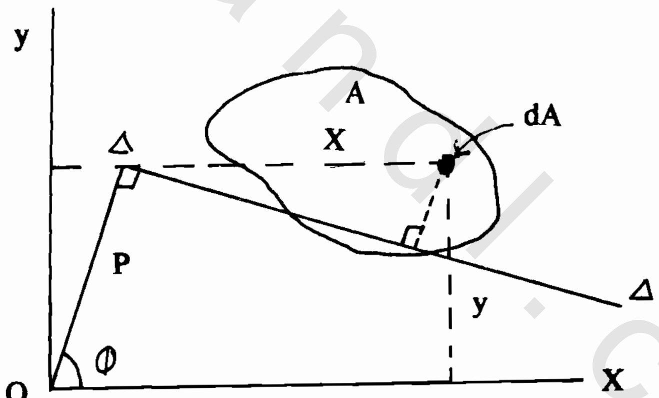
$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

9.4 عزم القصور الذاتى بالمستوى :

إذا كانت الأشكال المتعامل معها عبارة عن مساحات تقع فى مستوى فإننا فى هذه الحالة يمكننا أن نختصر ونبسط المعادلات أعلاه ، فإذا فرض وأن المستوى المعنى هو XOY وأن المراد دراسة عزوم قصور الذاتى لمساحة بهذا المستوى فإننا يمكن أن نستعين بالمعادلات (9.3) فتصبح :

$$I_{xx} = \int_A y^2 \, dA \quad , \quad I_{yy} = \int_A X^2 \, dA \qquad \text{.................... (9.9)}$$

حيث dA هى مساحة عنصر صغير بالمساحة المطلوب دراستها . انظر شكل 9.3 . أما A فهى مساحة القطاع كله .



شكل 9.3

ويكون عزم القصور الذاتى بالنسبة لأى محور بالمستوى كالمحور △△ بالشكل :

$$I_{\triangle\triangle} = \int_A d^2 \, dA \qquad \text{.................... (9.10)}$$

هذا ونعرف نصف قطر القصور الذاتى لأى محور بالمعادلة التالية :

$$r_{\triangle} = \sqrt{\frac{I_{\triangle\triangle}}{A}} \quad \text{..................} \quad (9.11)$$

هذا ويمكن تعريف حاصل ضرب القصور الذاتى (أو عزم القصور الذاتى المختلط) بالمعادلة التالية :

$$I_{xy} = \int_A x\,y\,d\,A \quad \text{..................} \quad (9.12)$$

ويكون I_{XY} صفر إذا كان أحد المحورين محور تماثل للشكل .

أما عن عزم القصور الذاتى القطبى بالمستوى فيمكن أن يشتق من المعادلة (9.4) .

$$I_o = \int_A r^2\,d\,A = \int_A (x^2 + y^2)\,d\,A \quad \text{..................} \quad (9.13)$$

$$\therefore I_0 = I_{xx} + I_{yy} \quad \text{..................} \quad (9.14)$$

والمعادلة (9.14) بالمستوى XOY هى المعادلة التى تشبه المعادلات (9.6) بالفراغ .

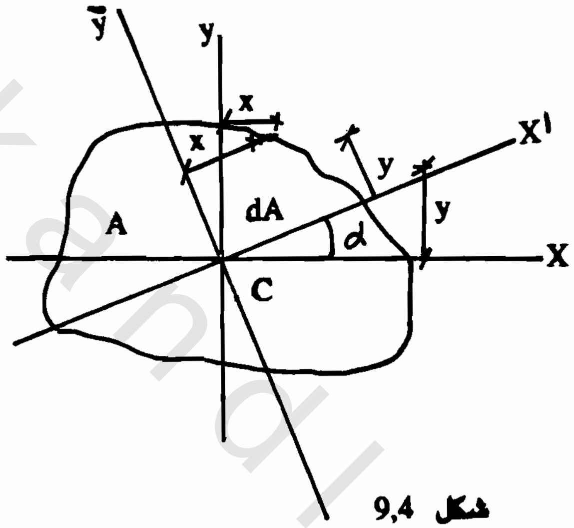
9.5 عزم القصور الذاتى الأقصى والأدنى :

لنفرض أن هناك قطاع ما مساحته A ومركز ثقله C كما بالشكل 9.4 . إذا علم كل من I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} . فالمطلوب حساب $I_{x`x`}$, $I_{y`y`}$ بالنسبة للمحاور $X`$, $Y`$ المعرفة بالشكل 9.4 والتى تميل بزاوية α على المحور الأفقى .

المطلوب كذلك إيجاد القيمة العظمى والصغرى للعزم $I_{xx'}$ وذلك بإجراء عملية دوران للمحاور (بتغير قيمة α) .

بتطبيق المعادلات (9.9) نجــد :

$$I_{xx}`` = \int_A y`^2 \, dA$$



شكل 9,4

ومن هندسة الشكل نجد العلاقة التالية بين المحاور XY من ناحية و `x`y من ناحية أخرى :

$$Y` = Y \cos\alpha - X \sin\alpha$$

$$X` = Y \sin\alpha + X \cos\alpha$$

بالتعويض عن `y نجد :

$$I_{x\grave{x}} = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 \, dA$$

$$= \cos^2 \alpha \int y^2 \, d A + \sin^2 \alpha \int x^2 \, d A - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int x y \, d A$$

$$= I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \sin \alpha \cos a$$

$$= I_{xx} \left(\frac{1 + \cos 2 \alpha}{2} \right) + I_{yy} \left(\frac{1 - \cos 2 \alpha}{2} \right) - I_{xy} \sin 2 \alpha$$

$$I_{x\grave{x}} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \right) \cos 2 \alpha - I_{xy} \sin 2 \alpha \qquad \dots\dots\dots (9.15)$$

وبنفس الطريقة يمكننا إيجاد $I_{y\grave{y}}$ أو باستبدال α بالمعادلة (9.15) حيث :

$$\alpha = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

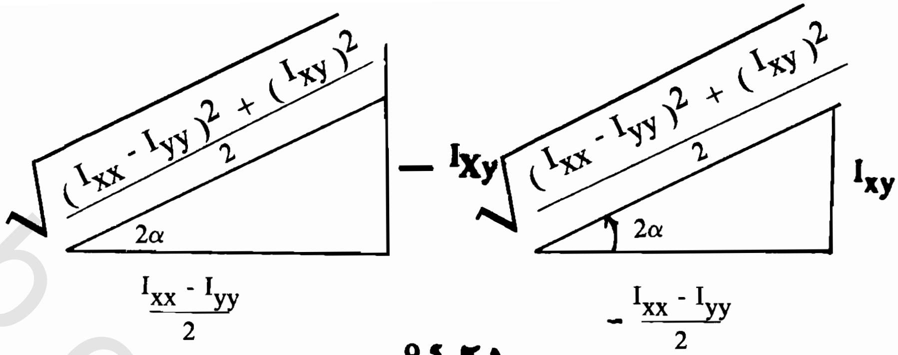
$$I_{y\grave{y}} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \left(\frac{I_{yy} - I_{xx}}{2} \right) \cos 2 \alpha - I_{xy} \sin 2 \alpha \qquad \dots\dots\dots (9.16)$$

هذا ويمكن الحصول على النهاية العظمى والصغرى لعزم القصور الذاتى $I_{x\grave{x}}$ بإجراء عملية تفاضل هذا العزم بالنسبة للزاوية α ومساواة بالصفر لنحصل على :

$$\frac{d I_{x\grave{x}}}{d \alpha} = - (I_{xx} - I_{yy}) \sin 2 \alpha - 2 I_{xy} \cos 2 \alpha = 0$$

$$\therefore \tan 2 \alpha = - \frac{I_{xy}}{\frac{1}{2} (I_{xx} - I_{yy})} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (9.17)$$

المعادلة (9.17) يمكن أن تعطى الزاوية التى تجعل $I_{x\grave{x}}$ عظمى ، وصغرى حيث إن (9.17) لها حلان كما يتضح من الشكل التالى (9.5) :



شكل 9.5

الحل الثانى الحـــل الأول

وبالتعويض عن α 2 فى المعادلة (9.15) نحصل على :

$$I_{x`x`\,\substack{max\\min}} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{yy})^2}{4} + (I_{xy})^2} \qquad \text{.........................} \quad (9.18)$$

حيث الإشارة + تكون للحل الثانى ، والسالبة للحل الأول بالشكل 9.5 .

وتعتبر المعادلة (9.18) هى التى تعطى عزم القصور الذاتى الأقصى والأدنى ، وذلك بالنسبة للمحاور التى بالشكل 9.4 وتسمى هذه العزوم بعزوم القصور الأساسية والمحاور التى تحسب حولها أى `x و `y بالمحاور الأساسية .

ويمكننا الآن أن نثبت أن عزم القصور الذاتى المختلط $I_{x`y`}$ يكون صفراً .

$$I_{x`y`} = \int x`y`\,d A$$

$$= \int (x \cos\alpha + y \sin\alpha)(y \cos\alpha - x \sin\alpha)\, d A$$

$$= \cos^2\alpha \int (xy)\,d A - \sin^2\alpha \int xy\, d A$$

$$+ \sin\alpha \cos\alpha \int y^2\, d A - \sin\alpha\cos\alpha \int x^2\, d A$$

$$= I_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + (I_{xx} - I_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha$$

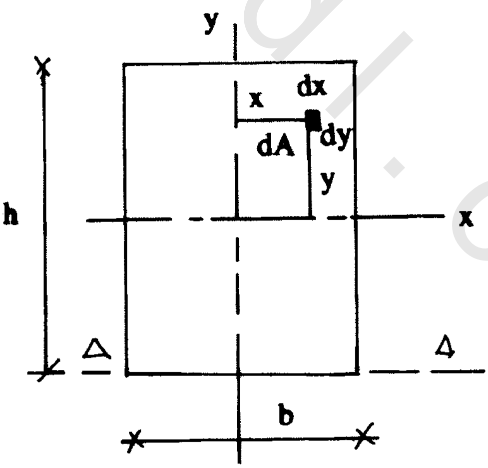
$$I_{x'y'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9.19)$$

بالتعويض في (9.19) عن قيمتي 2α من الرسم بالشكل 9.5 فإننا نجد أن المعادلة (9.19) تتلاشى .

ونستنتج مما سبق أن هناك محورين يكون عزم القصور الذاتى حولهما ذو قيمة عظمى وصغرى ، وأن هذين المحورين يتلاشى حولهما حاصل ضرب القصور الذاتى ، ويعرف المحوران بالمحورين الأساسيين .

9.6 أمثلة محولة :

١ - أوجد I_{xx} ، I_{yy} ، $I_{\Delta\Delta}$ ، r للمستطيل بالشكل التالى :



الحـــل :

بتطبيق المعادلة (9.9) : I_x

$$I_{xx} = \int_A Y^2 \, d A \quad = \int \int y^2 \, dx \, dy$$

$$= b \int y^2 \, dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yy} = \int dA = \int \int X^2 \, dy \, dx = h \int dx = h \left[\frac{X^3}{2} \right]$$

$$I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية (9.8) نجد :

$$I_{\triangle\triangle} = I_{xx} + A \, . \, d^2 + b \frac{h^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^2}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

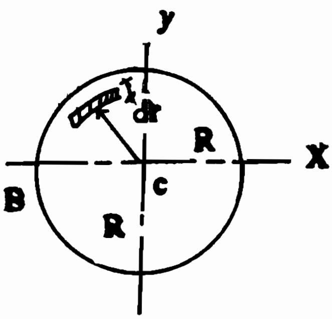
$$r_{\triangle} = \sqrt{\frac{I_{\triangle\triangle}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3 / 3}{bh}} = \frac{h}{3} \sqrt{3}$$

2 – أحسب عزم القصور الذاتى لقرص متجانس ثابت السمك وذلك بالنسبة :

(أ) محور عمودى على القرص ومار بمركزه .

(ب) محور عمودى على القرص ومار بأحد نقط محيطة .

(جـ) محور ينطبق على أحد أقطاره .



الحـــل :

المحور العمود على القرص والمار بمركزه يكون هو المحور z وهو منطبق فى هذه الحالة على المركز c ، وبالتالى يكون عزم القصور الذاتى حول المحور العمودى مساوياً لعزم القصور الذاتى حول مركزه C . وهذا يتضح من مقارنة المعادلة (9.3) بالمعادلة (9.13) .

$$I_c = \int r^2 \, dA = \int (x^2 + y^2) \, dA = \int x^2 \, dA + \int y^2 \, dA$$

$$I_c = I_{xx} + I_{yy} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وفى هذه الحالة نجد أن العنصر المقترح مساحته :

$$dA = 2\pi r . dr$$

$$\therefore I_c = \int_0^R r^2 \, 2\pi r . dr = \int_0^R 2\pi r^3 . dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$I_c = \frac{R^4 \pi}{2}$$

وبتطبيق نظرية المحاور المتوازية يمكن إيجاد عزم القصور الذاتى حول محور عمودى على القرص ومار بأحد نقط محيطة فنجد :

$$I_B = I_C + AR^2 = \frac{R^4 \pi}{2} + \pi R^2 R^2 = \frac{3\pi R^4}{1}$$

من المعادلة رقم (1) أعلاه وكذلك من التماثل الواضح بالشكل نجد :

$$_{xx} = I_{yy} = \frac{I_c}{2} = \frac{R^4 \pi}{4}$$

٣ - احسب عزم القصور الذاتى لكرة مصمته متجانسة نصف قطرها R وذلك بالنسبة :

(أ) مركزها .

(ب) قطرهـــا .

الحـــــل :

فى هذه الحالة يكون مركز الكرة مثل المحور المار ، عمودى على مركز القرص بالمثال السابق ، وهذا كما ذكرنا واضح من مقارنة (9.4) مع (9.13) ، وبالتالى فإننا يمكن أن نستفيد من النتيجة بالمثال السابق فنجد أن عزم القصور للكرة حول مركزها :

$$I_o = \frac{R^4 \pi}{2}$$

وبتطبيق المعادلة (9.4) نجد :

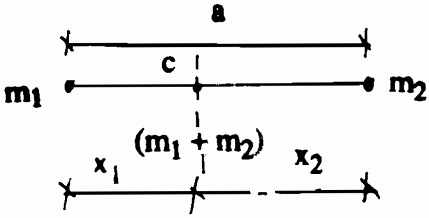
$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dV = \int (x^2\, d V + \int y^2\, d v + \int z^2\, d v$$

$$I_0 = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 3\, I_{xx} = 3\, I_{yy} = 3\, I_{zz}$$

وذلك نتيجة للتماثل ومن ثم فإننا نحصل على عزم القصور الذاتى حول القطر :

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I_0 = \frac{R^4 \pi}{4}$$

4 - كتلتان مركزتان كل منهما فى نقطة m_2 , m_1 وهما متصلتان بواسطة قضيب صلب وزنه يمكن إهماله ، وطوله a . أثبت أن عزم القصور الذاتى للمجموعة $(m_1 + m_1)$ بالنسبة لمحور عمودى على المستوى الذى يجمع الكتلتان والمار بمركز محصلتهما يكون مقداره μa^2 حيث : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$



الحـــــل :

كما بالشكل نفرض أن المحصلة تبعد X_1 عن m_1 وتبعد X_2 عن m_2 وبالتالى نحصل على :

$$X_1 = \frac{a\, m_2}{m_1 + m_2} , \quad X_2 = \frac{a\, m_1}{m_1 + m_2}$$

ولدينا أن :

$$X_1 + X_2 = a$$

بتطبيق المعادلة (9.1) لإيجاد عزم القصور الذاتى حول المحور المار بالنقطة C نجد :

$$I_{zz} = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2$$

$$= m_1 \frac{a\, m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_2 \frac{a^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$I_{zz} = \frac{a^2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu a^2$$

٥ – احسب عزم القصور الذاتى للقطاع على شكل حرف T وذلك حول :

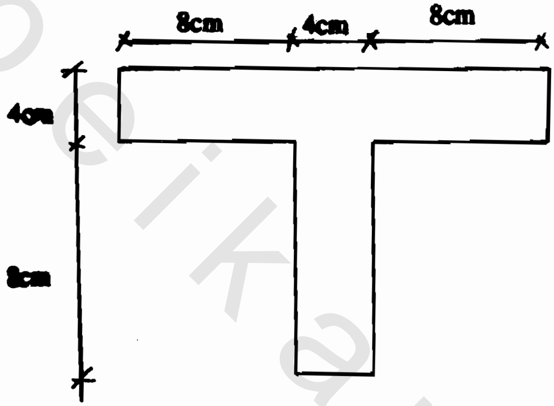
(أ) محور أفقى مار بمركز ثقله .

(ب) محور أفقى مار بنهايته السفلى .

الحـــل :

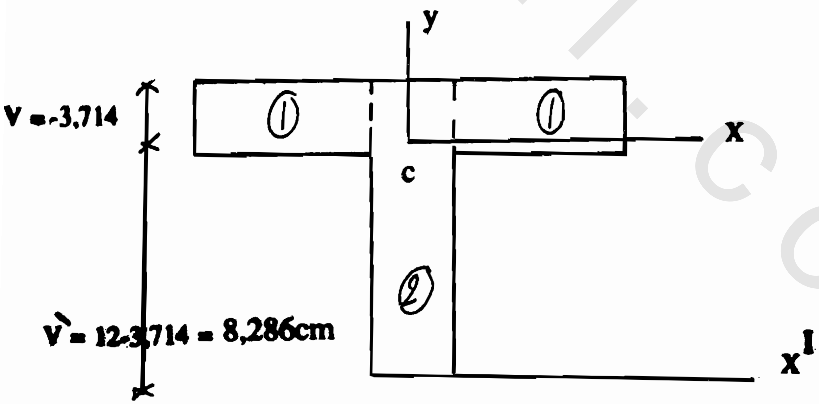
يمكن أن نستخدم نتائج المثال رقم 6 فى الفصل الثامن والخاص بتعيين مركز ثقل هذا القطاع وذلك بالتعويض عن قيمة

$l = 4$ cm



وبالتالى فإننا نجد :

$$\nu = \frac{13\,L}{14} = \frac{13 \times 4}{14} = 3.714 \text{ cm}$$



$$I_{xx} = I_1 + I_2$$

حيث : I_1 = عزم القصور الذاتى للمستطيل رقم (١) حول xx

حيث : I_2 = عزم القصور الذاتى للمسبتطيل رقم (2) حول xx

$$I_1 = \frac{8\,(4)^3}{12} \times 2 + 2 \times 8 \times 4\,(3.714 - 2)^2 = \frac{256}{3} + 188.019 = 273.352$$

$$I_2 = \frac{4\,(12)^3}{12} + 4 \times 12\,(6 - 3.714)^2 = 576 + 250.838 = 826.838$$

$$I_{xx} = 273.352 + 826.838 = 1100.19 \text{ cm}^4$$

ويمكن تطبيق نظرية المحاور المتوازية لإيجاد عزم القصور الذاتى حول `x هذا علماً بأن المساحة قد تم حسابها فى المثال رقم 6 بالفصل الثامن .

$$A = 7\ell^2 = 7\,(4)^2 = 112 \text{ cm}^2$$

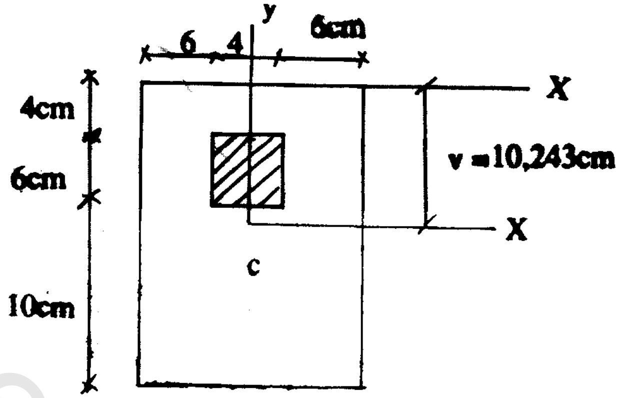
$$I_{xx'} = I_{xx} + A\,(y')^2$$

$$= 1100.19 + 112\,(8.286)^2 = 8789.863 \text{ cm}^4$$

6 – أحسب عزم القصور الذاتى للمستطيل الذى قطع منه جزء بالشكل التالى وذلك حول :

(أ) محور مار بمركز ثقله ويكون أفقياً .

(ب) محور مار بأعلى الشكل ويكون أيضاً أفقيا .



لنعتبر المستطيل الكامل (بدون استقطاع) هو رقم (1) . والجزء المستقطع (المهشر) هو رقم (2) لنقيم الجدول التالى :

	b	h	b h	d	d(bh)	s*	I_G**	$(bh)s^2$
1	16	20	320	10	3200	0,243	$\frac{3200}{3}$	18.8 * 957
2	4	6	24	7	-168	3,243	- 72	- 252,409
Σ			296		3032		10594,7	233,513

* S = المسافة بين مركز ثقل الجزء المعنى ((1) أو (2)) ومركز ثقل الشكل كله .

** I_G = عزم القصور الذاتى للجزء المعنى حول محور أفقى مار بمركزه .

ويكون عزم القصور الذاتى هو :

$$I_{xx} = \Sigma I_G + \Sigma (bh) s^2 = 10594.7 + (-233.513)$$

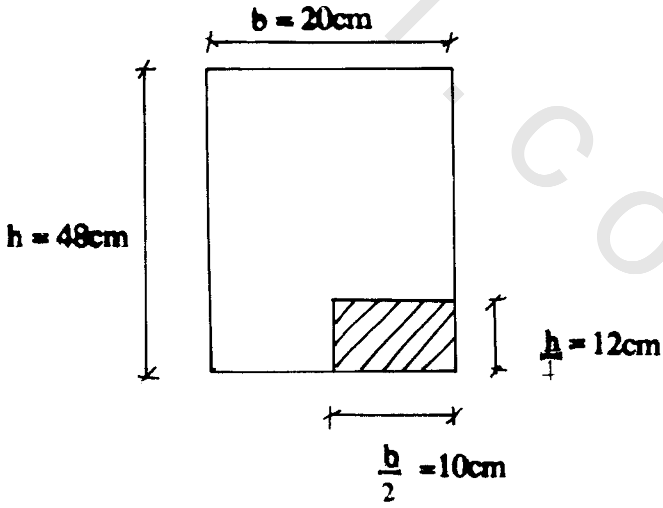
$$I_{xx} = 10361.187 \text{ cm}^4$$

وبتطبيق قاعدة المحاور المتوازية يمكن إيجاد عزم القصور الذاتى حول المحور x :

$$I_{xx} = I_{xx} + A(\nu)^2 = 10371.187 + 296(10.243)^2$$

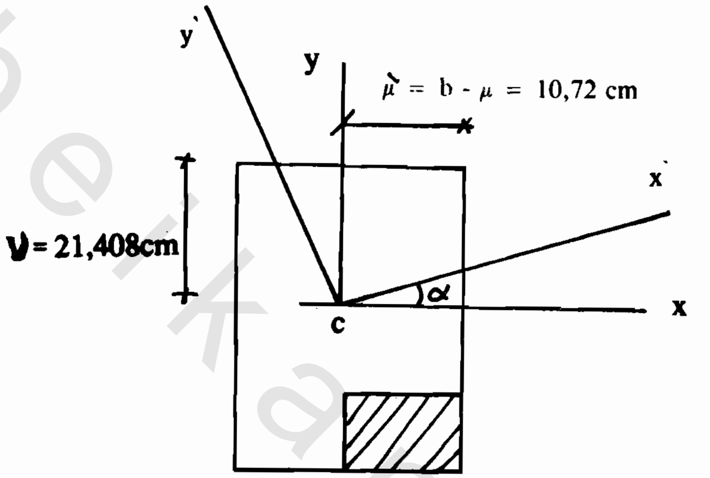
$$I_{xx} = 41417.226 \text{ cm}^4$$

٧ – أوجد المحاور الأساسية المارة بمركز ثقل الشكل التالى وعزم القصور الذاتى حولها .



الحـــل :

مركز ثقل هذا الشكل تم إيجاده بالمثال رقم 8 بالفصل الثامن ، ويمكن بالتالى التعويض فيه بالأرقام المبينة لكل من العرض والارتفاع لنحصل على :



$$\nu = 0.446(48) = 21{,}408 \text{ cm}$$

$$\mu = 0.464(20) = 9.28 \text{ cm}$$

نبدأ بإيجاد عزوم القصور الذاتى بالنسبة للمحاور X , Y أى :

$$I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}$$

وذلك بتطبيق العلاقات (9.9) و (9.12) بالإضافة إلى نظرية المحاور المتوازية نجد :

$$I_{xx} = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

حيث I_1 = عزم القصور الذاتى للمستطيل الكلى دون استقطاع حول X .

I_2 = عزم القصور الذاتى للفراغ (المهشر) حول X .

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + A \cdot d_1^2 = \frac{20\,(48)^3}{12} + 20 \times 48\left(\frac{48}{2} - 21.408\right)^2$$

$$I_1 = 184320 + 6449.725 = 190769.73 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = -\left[\frac{\frac{b}{2}\left(\frac{h}{4}\right)^3}{12} + \frac{b}{2}\,\frac{h}{4}\,(d_2)^2\right] = -\left[\frac{10(12)^3}{12} + 10 \times 12\,(26.592-6)^2\right]$$

$$= -\left[\,1440 + 50883.656\,\right] = -52323.656 \text{ cm}^4$$

من المعادلة (١) نجد :

$$I_{xx} = 190769.73 - 52323.656 = 138446.07 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = I_3 + I_4 \qquad (2)$$

حيث : I_3 = عزم القصور الذاتى للمستطيل الكلى دون استقطاع حول محور Y .

I_4 = عزم القصور الذاتى للفراغ (المهشر) حول المحور X .

$$I_3 = \frac{hb^3}{12} + A\,t_1^2 = \frac{48\,(20)^3}{12} + 48 \times 20\left(\frac{20}{2} - 9.28\right)^2$$

$$= 32000 + 497.664 = 32497.664 \text{ cm}^4$$

$$I_4 = -\left[\frac{\frac{h}{2}\left(\frac{b}{4}\right)^3}{12} + \frac{h}{4}\,\frac{b}{2}\,t_2^2\right] = -\left[\frac{10(12)^3}{12} + 12 \times 10\,(10.72 - 5)^2\right]$$

$$= -\left[\,1000 + 3926.208\,\right] \doteq -4926.208 \text{ cm}^4$$

بالتعويض فى (2) نجد :

$$I_{yy} = 32497.664 - 4926.208 = 27571.456 \text{cm}^4$$

$$I_{xy} = I_5 + I_6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

حيث : I_5 = عزم القصور الذاتى المختلط للمستطيل كاملاً حول XY .

I_6 = عزم القصور الذاتى المختلط للفراغ حول XY .

$$I_5 = 0 + A(-24 + 21.408)(-10 + 10.72) = -1791.59 \text{ cm}^4$$

$$I_6 = -\left[0 + \frac{b}{2}\frac{h}{4}(10.72 - 5)(-26.592 + 6)\right] = 14134.349 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_{xy} = -1791.59 + 14134.349 = 12342.859 \text{ cm}^4$$

لإيجاد قيمة α نطبق العلاقة (9.17) :

$$\tan 2 \quad = -\frac{1232.759}{\frac{1}{2}(138446.07 - 27571.456)} = -0.223$$

$$\therefore 2\alpha_1 = 347.429° \quad , 2\alpha_2 = 167.4290$$

$$\alpha_1 = 173.715° \quad , \quad \alpha_2 = 83.715°$$

لإيجاد عزم القصور الذاتى حول تلك المحاور الأساسية نطبق المعادلات (9.15) , (9.16) أو (9.18) .

$$I_{x`x`} = \frac{133446.07 + 27571.456}{2} + \frac{27571.456 - 138446.07}{2}$$

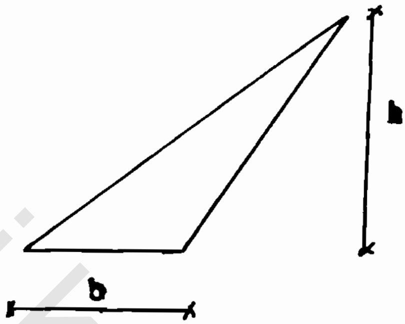
$$\cos 347.429 \quad - 12342.759 \sin 347.429° = 139803.47\text{cm}^4$$

$$I_{y`y`} = \frac{138446.07 + 27571.456}{2} + \frac{27571.456 - 138446.07}{2}$$

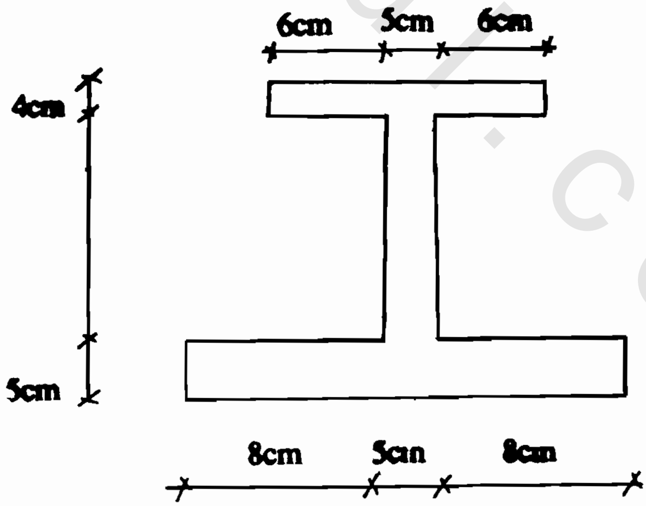
$$\cos 347.429 \left[+ 12342.759 \sin 347.429° = 26214.06 \text{ cm}^4\right.$$

9.7 تمارين :

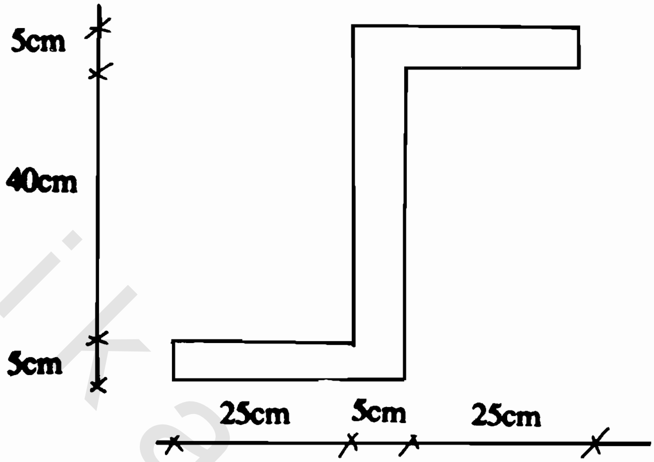
١ – أوجد عزم القصور الذاتى للمثلث حول محور يمر بقاعدته ، أوجد كذلك عزم القصور الذاتى حول محول مار بمركز ثقل المثلث وموازى لقاعدته .



٢ – المطلوب إيجاد عزم القصور الذاتى للقطاع التالى حول محور أفقى مار بمركز ثقله ، وكذلك إيجاد نصف قطر القصور الذاتى حول نفس المحور .



٣ – للشكل التالى أوجد المحاور الأساسية ، وكذلك عزم القصور الذاتى حولها .



٤ – المستطيل التالى استقطع منه نصف دائرة ، والمطلوب إيجاد عزم القصور الذاتى الأقصى والأدنى للشكل المتبقى .