الجزء الثاني

البرمجة الموجبة شبه المعرفة
Semi-Definite Programming

الباب الخامس

من البرمجة الخطية إلى البرمجة الموجبة شبه المعرفة

From Linear Programming to Semi-Definite Programming

• مقدمة • أهمية البرمجة الموجبة شبه المعرفة • حالات خاصة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة • التطبيقات • طريقة النقطة الداخلية • اختيار طول خطوة الوسيط • تحليل التقارب

1.5 مقدمة Introduction

البرمجة الموجبة شبه المعرفة semidefinite programming هي حقل جديد نسبياً في البرمجة الرياضية، وأكثر الأبحاث والكتابات عنها كانت في التسعينيات، بالرغم من أن جذور هذا الموضوع ممتدة منذ عقود أبعد من ذلك. حيث أن بعض الأبحاث القديمة تسمي هذا الموضوع بالبرمجة الخطية حيث المتغيرات على شكل مصفوفات.

إن الهدف هو تصغير الضرب الداخلي التالي:

$$C \bullet X = \operatorname{tr}(CX)$$

لكل من المصفوفتين $n \times n$ المتماثلتين C مصفوفة ثابتة و X مصفوفة متغيرات، حيث "tr" تدل على الأثر trace وهو مجموع العناصر القطرية للمصفوفة. وهي خاضعة لعدة قيود، أول هذه القيود خطي وهو:

$$\operatorname{tr}(A_i X) = b_i,\ i = 1, \ldots\ldots, m$$

حيث A_i تمثل المصفوفات المتماثلة المعطاة و b_i تمثل المقاييس المعطاة. إن المسألة الموضحة أعلاه هي مجرد مسألة برمجة خطية حيث عناصر المصفوفة X تمثل المتغيرات. نضيف الآن القيد الغير خطي المحدب X أي يجب أن تكون X متماثلة موجبة شبة معرفة، يرمز لها $X \succeq 0$.

التحدب ينتج من تحدب مخروط المصفوفات الموجبة شبة المعرفة S_n^+. وبالتالي فإن المسألة تكون على الشكل:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \operatorname{tr}(CX) \\ \text{subject to} & \operatorname{tr}(A_i X) = b_i, \qquad i = 1, \ldots\ldots, m \\ & \quad X \succeq 0 \end{array}$$

والتي لها مسألة لاجرانج الثنائية المرافقة التالية:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^T y \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + S = C \\ & \qquad S \succeq 0, \qquad y \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

إن النظرية الثنائية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة أضعف منها في البرمجة الخطية. ولكن شرط الثنائية الضعيف لازال متحقق للمسألتين، إن الحلول المسموح بها X, y, S تحقق:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(CX) - b^T y &= \operatorname{tr}\left(\left(S + \sum_{i=1}^{m} y_i A_i\right) X\right) - \sum_{i=1}^{m} y_i \operatorname{tr}(A_i X) \\ &= \operatorname{tr}(SX) \geq 0 \end{aligned}$$

حيث أن عدم المساواة الموجود في $\operatorname{tr}(SX) \geq 0$ هو بسبب المتباينات $X \succeq 0$ و $S \succeq 0$، أي إن الفجوة الثنائية ليست سالبة للحلول المسموح بها.

إن الحلول (X, y, S) هي حلول مثلى عندما تكون الفجوة الثنائية تساوي الصفر:

$$\operatorname{tr}(CX) - b^T y = \operatorname{tr}(SX) = 0$$

لمسألة البرمجة الخطية، إذا كانت المسألة الأساسية أو الثنائية لها حل أمثل، فإن كلتا المسألتين لهما حل أمثل، وتكون الفجوة الثنائية عند الحل الأمثل تساوي صفراً. هذه إحدى أقوى خصائص الثنائية وتسمى خاصية الثنائية القوية strong duality. وفي حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة فإن هذه الخصائص أضعف: إما لعدم وجود حلول مسموح بها للمسألة الثنائية أو أن تكون الفجوة الثنائية موجبة عند الحل، وهذه الأسباب من الممكن التغلب عليها. إن وجود الحلول المثلى الأساسية والثنائية مضمونة إذا كانت كلتا المسألتين الأساسية والثنائية لها حلول مسموح بها موجبة معرفة، على سبيل المثال، $X \succ 0$ و $S \succ 0$. وهذه تسمى: شرط قيد سلتر المؤهل slater constraint qualification (أو تسمى شرط سلتر للانتظام slater regularity condition). وسوف يناقش موضوع الثنائية بالتفصيل في الباب السادس.

2.5 أهمية البرمجة الموجبة شبه المعرفة

In the Important of Semi Definite Programming

مسائل البرمجة شبه المعرفة هي محل اهتمام لعدة أسباب، من ضمنها:

- البرمجة الموجبة شبه المعرفة تحتوي على مواضيع مهمة كثيرة ويكفي أن نعلم أن البرمجة الخطية والبرمجة التربيعية هما حالات خاصة من البرمجة الموجبة شبه المعرفة.
- نجد تطبيقات مهمة في الأمثلة التوافقية ونظرية التقارب ونظرية التحكم والنظام و الهندسة الميكانيكية والكهربائية.
- مسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة يمكن أن تُحل بدقة عالية وبوقت قياسي بواسطة خوارزميات النقطة الداخلية، فخوارزميات النقطة الداخلية للبرمجة شبه المعرفة تمت دراستها بشكل كبير في التسعينيات، وهذا يفسر وجود نهوض في البحث العلمي فيما يتعلق بالبرمجة شبه المعرفة.

كل هذه المواضيع ستناقش بشكل مختصر فيما تبقى من هذا الباب.

3.5 حالات خاصة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة

Special Cases of Semi Definite Programming

إذا كانت المصفوفة X مقيدة بحيث تكون قطرية، فإن المتطلب أن $X \succeq 0$ يتحول للمتطلب بأن عناصر القطر X يجب أن تكون غير سالبة، من ناحية أخرى لدينا مسألة البرمجة الخطية ومسائل الأمثلة مع قيود محدبة من الدرجة الثانية. هذه المسائل تعتبر أيضاً حالات خاصة من البرمجة الموجبة

شبه المعرفة، وهذا واضح من نظرية متممة شورshcur complement المشهورة.

وهكذا يمكننا أن نُمثل القيد من الدرجة الثانية بالشكل التالي:

$$(Ax+b)^T(Ax+b)-(c^T x+d)\le 0, \qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

وذلك بواسطة القيد شبه المعرف

$$\begin{bmatrix} I & Ax+b \\ (Ax+b)^T & c^T x+d \end{bmatrix}\succeq 0$$

بالطريقة نفسها يمكننا تمثيل المخروط من الدرجة الثانية:

$$\left\{(t,x)\,\middle|\, t\ge\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right\}$$

باختيار مصفوفة سهم arrow matrix مناسبة تكون موجبة شبه معرفة ينتج لدينا

خطأ! يتعذر إنشاء كائنات من تحرير رموز الحقول.

مثال آخر غير خطي:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \dfrac{(c^T x)^2}{d^T x} \\ \text{subject to} & Ax\ge b \end{array}$$

حيث أن $d^T x>0$ إذا كانت $Ax\ge b$. إن المسألة المكافئة وعلى شكل برمجة موجبة شبه معرفة هي:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} t & c^T x & 0 \\ c^T x & d^T x & 0 \\ 0 & 0 & Diag(Ax-b) \end{bmatrix}\succeq 0$$

عدة مسائل تتضمن تحقيق معيار المصفوفة أو مسألة تصغير القيم الذاتية eigenvalues من الممكن أن تكتب على شكل برمجة موجبة شبه معرفة. مجموعة من هذه المسائل ممكن أن نجدها في [VB]. أبسط مثال المسألة الكلاسيكية وهي إيجاد القيمة الذاتية العظمى $\lambda_{\max}(A)$ للمصفوفة المتماثلة A . إن مفتاح المسألة هنا هو أن $t \geq \lambda_{\max}(A)$ إذا وإذا فقط $tI - A \succeq 0$. لذا مسائل البرمجة شبه المعرفة تصبح على الشكل التالي:

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & t & \\ \text{subject to} & tI - A \succeq 0, & t \in \mathbb{R} \end{array}$$

إن خوارزمية البرمجة شبه المعرفة لهذه المسألة موضحة في [JRT].

4.5 التطبيقات Applications

هناك الكثير من التطبيقات للبرمجة شبه الموجبة في الرياضيات والهندسة، سوف نذكر بعض منها.

مسائلة القاطع الأعظم MAX-CUT وامتداداتها:

تطبيق آخر مشهور للبرمجة الموجبة شبه المعرفة لتحقيق الأمثلية التوافقية هو مسألة القاطع الأعظمي. اعتبر الرسم graph $G = (V, E)$ حيث أن كل حرف (i, j) له وزن معطى $w_{ij} \geq 0, \ (i \neq j)$.

الهدف أن نقوم بتلوين جميع رؤوس الرسم G باستعمال لونين (ولنختار الأحمر والأزرق) بطريقة معينة بحيث يكون الوزن الكلي للحرف الذي لطرفيه لونين مختلفين أكبر ما يمكن، ويسمى الحرف غير المعيب Non defect edges . إن هذه الأحرف غير المعيبة تعرِّف قاطع في الرسم، بحيث لو تم قطع جميع الأحرف الغير معيبة لتم فصل الرؤوس ذات اللون الأحمر من

الرؤوس ذات اللون الأزرق. لذا فإن الوزن الكلي للأحرف الغير معيبة يسمى وزن القاطع.

اشتق [GW] خوارزمية عشوائياً لهذه المسألة باستخدام البرمجة شبه المعرفة، الخطوة الأولى كانت بكتابة مسألة القاطع الأعظم على أنها مسألة أمثلة بولين التربيعية Boolean quadratic optimization problem. حيث متغير بولين يأخذ أحد العددين الصحيحين واحداً أو صفراً، بمعنى آخر هي مسألة أمثلة مع دالة هدف تربيعية ومتغيرات بولين. سوف نعين لكل رأس في V إحدى القيمتين $\{-1,1\}$ بحيث:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الرأس } i \text{ أحمر} \\ -1 & \text{إذا كان الرأس } i \text{ أزرق} \end{cases}$$

حيث $|V|$,.....,$i=1$ و $|V|$ تمثل عدد العناصر في V. لاحظ أن للحرف المعطى $(i,j)\in E$ لدينا

$$x_i x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } (i,j) \text{ معيب} \\ -1 & \text{إذا كان } (i,j) \text{ غير معيب} \end{cases}$$

وبناء على ذلك يكون وزن القاطع الأكبر هو:

$$\text{MC}= \max_{x\in\{-1,1\}^{|V|}} \frac{1}{2}\sum_{i<j} w_{ij}(1-x_i x_j) = \max_{x\in\{-1,1\}^{|V|}} \frac{1}{4} x^T L x, \qquad (1.5)$$

حيث L هي المصفوفة

$$L = -W + Diag(We)$$

و W مصفوفة عناصر قطرها أصفار وأما العناصر الغير قطرية فهي غير سالبة تمثل أوزان الأحرف، و e هو متجه جميع مركباته تساوي الواحد.

إذا كانت كل الأوزان صفراً أو واحداً، فمن ثم تكون L ببساطه هي عبارة عن لابلاس الرسم Laplacian of the graph. لاحظ أن L هي مصفوفة قطرية مهيمنة diagonally dominant، وهي بالتالي موجبة شبه معرفة.

يمكننا تخفيف المسألة (1.5) وبالتالي تحويلها إلى مسألة برمجة شبه معرفة وذلك بملاحظة أربعة أشياء:

1. $x^T Lx = \mathrm{tr}\ (Lxx^T)$ ، من خصائص مؤثر الأثر trace operator.

2. المصفوفة $X = xx^T$ موجبة شبه معرفة.

3. عناصر قطر المصفوفة $X = xx^T$ معطاة بـ $x_i^2 = 1$.

4. المصفوفة $X = xx^T$ لها الرتبة واحد.

إذا أسقطنا آخر الشروط (الرتبة واحد) نصل إلى التخفيف المطلوب، فيكون لدينا مسألة البرمجة شبه المعرفة التالية:

$$\begin{aligned} \mathrm{MC} \le \mathrm{MCR} = \ \text{maximize} \quad & \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,(LX) \\ \text{subject to} \quad & diag(X) = e \\ & X \succeq 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

ابتكر [GW] مخططاً عشوائياً تقريبياً، حيث استعمل الحل الأمثل في (2.5) لتوليد القواطع في الرسم.

كثيرة الحدود الغير سالبة

من المعروف أن أُحادي المتغير لكثيرة الحدود المتجانسة غير سالب على $\mathbb{R}$ إذا وإذا فقط أمكن كتابتها كمجموعة مربعات، وهذا غير صحيح في حالة وجود أكثر من متغير. إن البرمجة شبه المعرفة يمكن أن تستخدم لتحديد ما إذا كانت كثيرة حدود متجانسة لها مجموع مربعات قابل للتحليل.

إذا كانت كثيرة الحدود متعددة الحدود المتجانسة $p(x)$ موجبة على $\mathbb{R}^n$ ، من ثم

$$p(x)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^r \qquad (3.5)$$

فإنه يمكن أن تكتب كمجموعة مربعات لـ r بحيث تكون كبيرة بشكل كافٍ، حتى ولو كان هذا غير متحقق لـ $p(x)$. هذه النظرية بواسطة [Po] لها علاقة بالمسألة 17 لهيلبرت الشهيرة Hilbert problem 17th.

لقيمة معطاة r نستطيع استخدام البرمجة الموجبة شبه المعرفة لتحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود (3.5) يمكن أن تكتب كمجموعة مربعات. إن أحد التطبيقات هو أن نضع شروط كافية للمصفوفة مزدوجة الإيجاب، ونقول أن المصفوفة المتماثلة A مزدوجة الإيجاب copositive إذا كانت

$$p_A(x) = \sum_{ij} a_{ij} x_i^2 x_j^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

أو بشكل مكافئ

$$x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$$

حيث $\mathbb{R}_{+}^{n}$ تمثل المتجهات ذات المركبات الموجبة. وبالتالي فإنه من الممكن أن نعط الشرط الكافي لمزدوجة الإيجاب عن طريق تحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود المتجانسة $p_A(x)\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^r$ قابلة للتحليل إلى مجموعة مربعات لمعطى $r \geq 1$. لمزيد من المعلومات انظر [Pa].

التطبيقات الهندسية

أحد أغنى الحقول التطبيقية حالياً للبرمجة الموجبة شبه المعرفة هي نظرية التحكم والنظام، حيث أصبحت البرمجة الموجبة شبه المعرفة أداة مؤسسة وقائمة بذاتها. من الممكن الرجوع إلى بعض هذه التطبيقات في [BGFB]. والتغطية الأكثر حداثة لهذا الموضوع كانت لـ [BW]. ويوجد تمهيد للأمثلة في بحث [VB] و[Ol]. إن المرجع الأخير يتعامل مع مسائل التحكم والسيطرة على نشاط الضوضاء، كما أن مستوى الضوضاء داخل قبة يقل عن طريق إصدار موجات صوتية مع نفس التردد، ولكن مع التغيير المناسب للمرحلة. تتضمن مسألة التحكم التحتية تحقيق الأمثلة على مخروط الرتبة الثانية الموضح في الفصل 3.5 على أنه حالة خاصة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة.

التطبيقات الهندسية الأخرى للبرمجة الموجبة شبه المعرفة تتضمن مقياس الترانزيستور و نمط الاعتراف التي تستعمل للقطع الناقص [VB].

تطبيق آخر مهم هو التصميم الإنشائي، حيث أن البرمجة الموجبة شبه المعرفة تتضمن التصميم الجملوني الأمثل. هناك مسألتا أمثلة مختلفتان هما:

1- تقليل وزن البنية، بحيث يبقى التردد الأساسي للمبنى بعيداً عن الوضع الحرج والخطير.

2- التقليل من الالتزام بخزن الطاقة في الدعامة في أسوإ الأحوال، حيث القيود هي مجموع القوى التي يجب على البنية مقاومتها.

من الأمور التي يجب التركيز عليها في التصميم المثالي هي القوة. بمعنى آخر : في معظم الأحوال علينا أن نضع مجالاً لعدم دقة البيانات في مسائل تحقيق الأمثلة وحساب أفضل الحلول في أسوإ الأحوال. لمزيد من المعلومات في تطبيقات البرمجة الموجبة شبه المعرفة في التصميم المثالي يرجع إلى [BGN] و[BN]. وهناك تطبيقات آخري كثيرة على سبيل المثال ارجع إلى [AW,AF,Alh].

5.5 طريقة النقطة الداخلية Interior Point Method

علينا تذكر الصلة بين البرمجة الخطية والبرمجة الموجبة شبه المعرفة، وأن خوارزمية النقطة الداخلية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة هي عبارة عن امتداد ناجح لنفس الخوارزمية في البرمجة الخطية.

إن حقل طريقة النقطة الداخلية للبرمجة الخطية بدأ تقريباً بخوارزمية المجسم الناقص لكاشيان [Kh] سنة 1979م. إن خوارزمية المجسم الناقص تضع حداً للدورات السيئة. وهذا حل لسؤال ما إذا كانت مسائل البرمجة الخطية قابلة للحل في وقت قياسي، ولكن التجربة العملية بطريقة المجسم الناقص لم تكن كما هو متوقع. إن التطوير الأساسي كان عن طريق الأبحاث التي قدمها كارماركر [Kr] سنة 1984م، التي قدمت الخوارزمية ولكن بشكل مطور ومعقد ومرتبط وتظهر فيه الكفاءة الحسابية. في العقد التالي ظهرت آلاف البحوث في هذا الموضوع. إن تقرير [Go] عبارة عن مسح كامل يغطي الفترة الأخيرة لطرق النقطة الداخلية للبرمجة الخطية حتى سنة 1992م. وهناك عدة كتب جديدة ظهرت مؤخراً، من ضمنها كتب لـ روز

وآخرون [RTV]. إن تثبيت إدعاء الكفاءة الحسابية لطرق النقطة الداخلية أخذ أكثر من عشر سنوات تقريباً، خرج خلالها عدة دراسات أشارت إلى أن هذه الطرق لها أداء متفوق على طريقة السمبلكس عند حل المسائل ذات الحجم الكبير large scale problem. انظر على سبيل المثال [LMS,AA].

إن أول تمديد لطريقة النقطة الداخلية من البرمجة الخطية إلى البرمجة الموجبة شبه المعرفة كان من قبل [Ali1] سنة 1991م، وبشكل مستقل كان من قِبل [NN] سنة 1994م. هذا يوضح نهوض البحث العلمي المهتم بالبرمجة الموجبة شبه المعرفة في التسعينات. درس [NN] مسائل الأمثلة المحدبة في الصياغة المخروطية العامة conic formulation:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & x \in (\mathcal{L} + b) \cap \mathcal{C} \end{array}$$

حيث $\mathcal{L}$ تمثل الفضاء الجزئي الخطي لـ $\mathbb{R}^n$ ، $b, c \in \mathbb{R}^n$ و $\mathcal{C}$ هو مخروط محدب مغلق مدبب غير خالي الداخل nonempty interior. إن المسألة الثنائية المرافقة هي:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^T y \\ \text{subject to} & y \in (\mathcal{L}^{\perp} + c) \cap \mathcal{C}^* \end{array}$$

حيث $\mathcal{L}^{\perp}$ هي المتممة المتعامدة مع $\mathcal{L}$ في $\mathbb{R}^n$ ، و $\mathcal{C}^*$ هي المخروط الثنائي لـ $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}^* = \left\{ x \middle| \langle x, y \rangle \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C} \right\}.$$

لاحظ أننا تخلصنا من كون المسألة غير خطية بالمخروط المحدب. وفي حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة هذا المخروط هو مخروط المصفوفات الموجبة شبه المعرفة.

$$\mathcal{S}_n^+ = \left\{ X \middle| X \in \mathcal{S}_n,\ X \succeq 0 \right\},$$

حيث $\mathcal{S}_n$ تمثل فضاء المصفوفات المتماثلة $n \times n$. قام [NN] بتوضيح أن مسائل الأمثلة المخروطية يمكن أن تحل بتقنية متتالية من مسائل التصغير، حيث أن القيد المخروطي أُبعد و أضيف حد دالة الحاجز إلى دالة الهدف. هذه دوال محدبة وملساء smooth وقابلة للاشتقاق من الدرجة الثانية وتحقق شرط لبشتز Lipschitz condition بالنسبة إلى مقياس متري محلي (هذا المقياس هو المقياس المقدم بواسطة مصفوفة هاس للدالة نفسها).

إن دالة الحاجز تقترب من مالا نهاية كلما اقتربنا من حد المخروط، ويمكن أن نحصل على الحل الأمثل بطريقة فعالة وذلك بطريقة نيوتن. إن كل مخروط محدب $\mathcal{C}$ يمتلك حاجزاً طبيعياً ذاتياً، بالرغم من أن مثل هذه الحواجز متوافق فقط مع بعض المخاريط الخاصة. إن الدالة

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$$

تمثل حاجز للثُمن الموجب لـ $\mathbb{R}^n$، ولها دور فعال في تصميم طرق النقطة الداخلية للبرمجة الخطية.

وعلى نفس النمط، الدالة

$$f(X) = -\log \det(X)$$

هي حاجز طبيعي ذاتي لمخروط المصفوفات الموجبة شبه المعرفة. وباستعمال هذا الحاجز هناك الكثير من الخوارزميات التي قد تصاغ بحيث يكون لها

في اسوأ الحالات فعالية عالية في إيجاد الحلول المثلى في وقت قياسي، أي أن الحلول المسموح بها (X^*, S^*) لها فجوة ثنائية أقل من ε ، أي أن $\operatorname{tr}(X^*S^*) \leq \varepsilon$ ، حيث $\varepsilon > 0$ مقياس تحمل معطى.

طُرق الحاجز اللوغاريتمية

الطرق الأساسية: طرق الحاجز اللوغاريتمية الأساسية primal log-barrier methods تستعمل طريقة نيوتن الإسقاطية لحل المسائل التي لها الصيغة:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \operatorname{tr}(CX) - \mu \log \det(X) \\ \text{subject to} & \operatorname{tr}(A_i X) = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

حيث أن الوسيط μ يقل بشكل تدريجي إلى الصفر. مثل هذه الخوارزميات قام بتحليلها [Fa] ولاحقاً من قِبل مؤلفين آخرين مثل [HDRT,AF]. لاحظ أن الشرط $X \succeq 0$ أُستبدل بإضافة (حد حاجز) إلى دالة الهدف. الشرط $X \succeq 0$ يضمن التحكم بعملية نيوتن بعناية، والتناقص الكبير لـ μ يستلزم التمسك بخطوات نيوتن بينما التحديثات الصغيرة تسمح بخطوات نيوتن كاملة. هذه النتائج سوف نقوم بدراستها بشكل مفصل في الباب التاسع.

الطرق الثنائية: طرق الحاجز اللوغاريتمية الثنائية وهي تشابه الطريقة الأساسية، ونقوم من خلالها بحل سلسلة من المسائل

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^T y - \mu \log \det S \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + S = C \end{array}$$

حيث أن الوسيط μ مرة أخرى يقل بشكل تدريجي إلى الصفر.

لقد كان هناك نهوض في الاهتمام بهذه الطرق مؤخراً. والسبب في ذلك هو أننا نستطيع استغلال تناثر تركيبة المسألة ،مثل مسألة القاطع الأعظم

المخففة المبينة في الفصل الرابع من هذا الباب، حيث نستطيع حلها بشكل أكثر كفاءة من طرق النقطة الداخلية الأخرى. هذه التطورات سوف نقوم بدراستها بشكل مفصل في الباب التاسع.

الطرق الأساسية الثنائية: مثلما لقيت الطرق الأساسية الثنائية للبرمجة الخطية كثيراً من الاهتمام كذلك لقيت تلك الطرق للبرمجة الموجبة شبه المعرفة كثيراً من الاهتمام. وهذه الطرق تصغر الفجوة الثنائية

$$\operatorname{tr}(CX) - b^T y = \operatorname{tr}(XS)$$

وتستخدم ضم دالة الحاجز الأساسية والثنائية

$$.-\log\det(X) + \log\det(S)) = -\log\det(XS)$$

هذا يعني بأن سلسلة المسائل ذات الصيغة التالية محلولة

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \operatorname{tr}(XS) - \mu \log\det(XS) \\ \text{subject to} & \\ & \operatorname{tr}(A_i X) = b_i, \quad \forall\, i \\ & \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + S = C \end{array} \tag{4.5}$$

إن تصغير المسألة (4.5) يحقق

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{tr}(A_i X) = b_i, & & i = 1, \ldots, m \\ \sum_i^m y_i A_i + S = C & & \\ XS = \mu I & & \\ X, S \succ 0 & & \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

هذه المعادلات يمكن أن ينظر إليها كتشويش بسيط على شروط الأمثلة بالنسبة للمسألة الأساسية والثنائية، حيث $\mu = 0$. إن النظام (5.5) له حل وحيد تحت فرضية أن $A_i \ (i = 1, ..., m)$ مستقلة خطياً linearly independent، وتوجد حلول مسموح بها للمسألة الأساسية والمسألة الثنائية. هذه الحلول سوف يرمز لها بـ $X(\mu), S(\mu), y(\mu)$، ويمكن أن ينظر له كوسيط يمثل المنحنى الأملس بدلالة الوسيط μ ويسمى المسار الأوسط. وخصائص المسار الأوسط بالنسبة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة موضحه بشكل أكبر في الباب السابع.

طرق الحاجز اللوغاريتمية تسمى أيضاً طرق تابع المسار، بسبب العلاقة بين المسار الأوسط ودالة الحاجز اللوغاريتمية.

طرق الحاجز اللوغاريتمية الأساسية الثنائية يمكن من خلالها حل النظام (5.5) بشكل تقريبي، يتبعها تخفيض في μ. إن الهدف هو الحصول على اتجاهات أساسية وثنائية ΔX و ΔS على التوالي، وبذلك تحقق $X + \Delta X \succeq 0 \ , \ S + \Delta S \succeq 0$ بالإضافة إلى

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tr}(A_i \Delta X) &= 0, \qquad i = 1, ..., m \\ \textstyle\sum_{i=1}^{m} \Delta y_i A_i + \Delta S &= 0 \\ (X + \Delta X)(S + \Delta S) &= \mu I \\ \Delta X &= \Delta X^T \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

إن المعادلة الثالثة في (6.5) غير خطية، والنظام زائد التحديد overdetermined.

ربما الحل الأكثر بساطة هو جعل النظام (6.5) خطي وبعد ذلك البحث عن حل أصغر مربعات least squares للنظام الخطي زائد التحديد الناتج (طريقة جوس نيوتن Gauss-Newton method). هذا التوجه اشتقه وشرحه كلاً من [DPRT,KMRVW].

وهناك توجه آخر مِن قِبل [Zh] الذي اقترح استبدال المعادلة الغير خطية في (6.5) بـ

$$H_P(\Delta XS + X\Delta S) = \mu I - H_P(XS) \tag{7.5}$$

حيث H_P هي التحويل الخطي المعطى بـ

$$H_P(M) = \frac{1}{2}\left[PMP^{-1} + P^{-T} M^T P^T \right]$$

لأي مصفوفة M. أن مصفوفة الموازنة Scaling matrix P تحقق استراتيجية التماثل. هناك بعض الخيارات الأخرى الشائعة لـ P منها:

P	المرجع
I	[AHO]
$X^{-\frac{1}{2}}$	[Mo,HRVW,KSH]
$S^{\frac{1}{2}}$	[Mo,KSH]
$[X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}SX^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$	[NT]

جدول 1.5: خيارات مصفوفة الموازنة P

إذا قمنا باستبدال المعادلة الغير خطية في (6.5) بـ (7.5)، وأسقطنا المتطلب $\Delta X = \Delta X^T$ ، سوف نحصل على نظام خطي على شكل مربع كامل. علاوة على ذلك إذا كان لهذا النظام حل فإن ΔX متماثلة. إن إثبات وجود ووحدانية كلٌ من الاتجاهات أعلاه مذكور في [SSK].

إن الصيغة $[X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}SX^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$ في الجدول 1.5 عليها بعض الملاحظات منها: في [NT] شُرح أن لكل زوج $X \succ 0$, $S \succ 0$ يوجد مصفوفة D بحيث أن

$$\nabla^2 f\ (D) X = S.$$

إن مصفوفة هاس $\nabla^2 f\ (D)$ هي مؤثر خطي يحقق

$$\nabla^2 f\ (D)\ :\ X \mapsto D^{-1} X D^{-1}.$$

حيث يترتب على ذلك أن $X = DSD$ ، ومنها أيضاً أنه تبين لنا بسهولة أن $D = P^2$. وبهذه الطريقة نحصل على الموازنة الأساسية الثنائية المتماثلة $P^{-1}XP^{-1} = PSP$.

هناك العديد من اتجاهات البحث الأساسية الثنائية الأخرى غير المذكورة أعلاه.

تختلف الخوارزميات في كيفية تحديث μ ، وكيفية حل المعادلات المتماثلة. هناك الطرق التي تستخدم التخفيضات الكبيرة لـ μ تُتبع بعدة خطوات ثابتة لنيوتن تسمى طُرق الخطوة الطويلة أو التحديث الكبير. وقام بتحليلها [Ji] وغيره.

وهناك الطرق التي تستخدم التحديثات الديناميكية لـ μ ومنها طُرق التنبؤ والتصحيح predictor-corrector methods. انظر المراجع [AHO,PS] وغيرها.

كانت هناك عدة تطبيقات لخوارزميات التنبؤ والتصحيح للبرمجة الموجبة شبه المعرفة، منها سدومي SeDuMi [St] و SDPT3 عن طريق [TTT].

في الباب التاسع سوف نقوم بمراجعة لطرق تابع المسار الأساسية الثنائية التي تستخدم اتجاه [NT].

هناك طرق تبدأ من نقاط خارج الحلول المسموح بها، من الطرق التي تستخدم هذه الإستراتيجية طريقة M الكبيرة big-M الموضحة في [VB]. وهناك مراجع أخرى لطرق التي تبدأ من حلول غير مسموح بها منها [KSS,PS] وغيرها.

طريقة أنيقة لتجنب وسائط M الكبيرة هي أن نطمرembed مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة في مسألة أكبر تكون لها نفس الثنائية، ويكون فيها نقطة البداية المسموح بها معروفة. إن حل مسألة الطمر الثنائية الذاتية self-dual embedding يعطي معلومات لحل المسألة الأساسية. وفكرة طمر الثنائية الذاتية للبرمجة الخطية تعود إلى الخمسينيات من هذا القرن بمجهودات كل من [GT]. وبعد طرق النقطة الداخلية للبرمجة الخطية أُنعشت فكرة الطمر لتستخدم في الخوارزميات التي تبدأ من نقاط خارج الحلول المسموح بها بواسطة [YTM].

إن تمديد فكرة طمر مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة في مسألة ثنائية ذاتية مع وجود نقطة بداية معلومة على المسار الأوسط للبرمجة الموجبة شبه

المعرفة قد قام بإثباتها [DRT] وغيرهم. وبشكل مستقل قام بإثباتها [LSZ]، كإمتداد للعمل الذي قام به [PS] باستخدام ما يدعى الطمر المتجانس. وسوف نقوم بشرح مفصل لنظرية الطمر في الباب الثامن.

قام [NN] بعمل كبير له الأثر الواضح، حيث درسا حالات خاصة لمسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة، بالإضافة إلى التطوير الكامل لمنهجية النقطة الداخلية. كما قام [VB] بتغطية جيدة تعاملت مع النظرية الأساسية والتطبيقات المتنوعة وخوارزميات التصغير المحتملة إلى العام 1995م. يوجد ثلاثة استطلاعات أكثر حداثة وهي تركز أكثر على تطبيقات البرمجة الموجبة شبه المعرفة في تحقيق الأمثلية التوافقية كانت من قِبل [Ali2,RP,Go]. كما تعامل [Ali2] مع المنهجية العلمية للنقطة الداخلية أيضاً، بينما [RP] استعرض الخصائص الهندسية للمجموعة العملية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة التي تسمى سبكتوهدرا spectrahedra وهي منطقة الحلول المسموح بها في البرمجة الموجبة شبه المعرفة، بالإضافة إلى النتائج المعقدة والثنائية. نظرة تاريخية لطيفة لتطور البرمجة الموجبة شبه المعرفة مفصلة عند [LO] حيث ركزا على علاقتها بتحقيق الأمثلة للقيمة الذاتية. وأما الأكثر حداثة فهو كتاب عن البرمجة الموجبة شبه المعرفة [WSV] الذي يغطي الجوانب النظرية والتطبيقية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة إلى عام 2000 م.

تمارين الباب الخامس

1.5 أوجد المسألة الثنائية المقابلة للمسألة التالية:

$$\text{minimize} \quad \frac{(c^T x)^2}{d^T x}$$

$$\text{subject to} \quad Ax \geq b$$

2.5 لتكن $n = m = 3$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ وأن:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن الحلول المثلى للمسألتين الأساسية والثنائية هي:

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y_i^* = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad S^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

أوجد المسألة الثنائية المقابلة للمسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة أعلاه؟

3.5 اثبت لتمرين 2.5 أن:

$$\text{tr}\,(CX) - b^T y = \text{tr}\,(SX) = 0 \text{ ؟}$$