الباب الثاني

المسار الأوسط
The Central Path

• مقدمة • معادلة الحاجز • مضاريب لاجرانج • دالة لاجرانج • المرتبة الثانية لشرط الأمثلية و وجود الحل

1.2 مقدمة Introduction

في هذا الباب سوف ندرس الأسلوب الأبسط والبديل لحل مسائل البرمجة الخطية. والخوارزمية التي نحن بصدد شرحها تسمى طريقة تابع المسار path-following method. وهي تنتمي إلى صنف الطرق التي تسمى طرق النقطة الداخلية interior-point methods. إن طريقة النقطة الداخلية هي الطريقة الأسهل والأكثر طبيعية بين جميع الطرق من هذا الصنف. وقبل البدء في شرح هذه الطريقة، يجب أن نشرح المسار الذي يظهر في مسمى هذه الطريقة. هذا المسار يسمى المسار الأوسط central path وهو موضوع هذا الباب. وقبل مناقشة وشرح المسار الأوسط يجب وضع بعض الأسس عن طريق تحليل

مسألة غير خطية والتي تسمى مسألة الحاجز barrier problem المرتبطة بمسائل البرمجة الخطية التي نحن بصدد حلها.

2.2 معادلة الحاجز The Barrier Equation

في هذا الفصل، سوف نعتبر مسألة البرمجة الخطية الأساسية prime مع قيود متباينة و متغيرات غير سالبة كالتالي:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(x) = c^T x \\ \text{subject to} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{1.2}$$

إن المسألة الثنائية dual المقابلة لها هي:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y^T b \\ \text{subject to} & y^T A \leq c^T \\ & y \geq 0 \end{array}$$

وإذا ما أضفنا بعض المتغيرات المكملة (إضافية أو زائدة) لتحويل كلتا المسألتين إلى صيغة المساواة:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax + w = b \\ & x, w \geq 0 \end{array} \tag{2.2}$$

و

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y^T b \\ \text{subject to} & y^T A - z = c^T \\ & y, z \geq 0 \end{array}$$

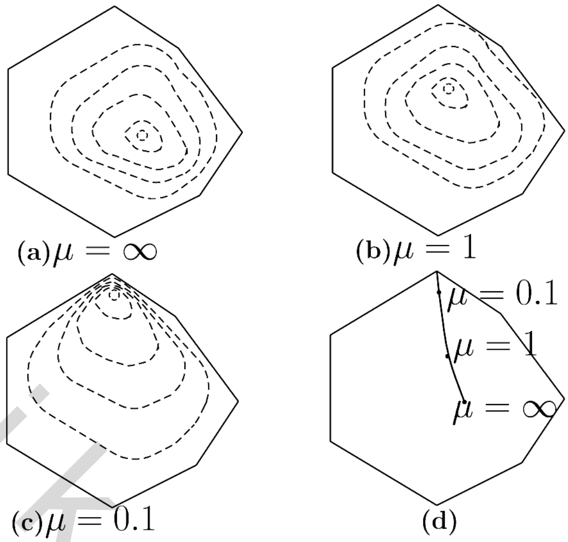
فيكون لدينا هنا مسألة تعظيم ذات قيود، حيث يوجد فيها بعض القيود متباينة مثل مسائل البرمجة الخطية الأساسية. ويمكننا استبدال أي قيد متباين بحد إضافي في دالة الهدف. على سبيل المثال، في (2.2) يمكننا إزالة

القيد الذي يحدد المتغير، لنقل x بأنه غير سالب، وذلك بإضافة حد لدالة الهدف يكون سالب مالا نهاية عندما تكون x سالبة، وصفر في الحالات الأخرى. ولا يظهر فائدة على وجه الخصوص من إعادة صياغتها بهذا الشكل. وذلك لأن دالة الهدف الجديدة فيها عدم اتصال مفاجئ، وهذا يمنعنا من استخدام حساب التفاضل والتكامل لدراستها. ولكن لنفترض أننا قمنا باستبدال هذه الدالة الغير متصلة بدالة أخرى تكون سالب مالا نهاية عندما تكون x سالبة وتكون منتهية عندما تكون x موجبة وتقترب من سالب مالا نهاية عندما تكون x تقترب من الصفر. بمعنى آخر فإن هذا يملّس smoothness عدم اتصال الدالة ويكون سبباً في تحسين قدرتنا على تطبيق حساب التفاضل والتكامل لدراستها. وأبسط هذه الدوال هي دالة اللوغاريتم. ولذلك فإننا نضيف حد لكل متغير في دالة الهدف والذي يكون عبارة عن ثابت مضروب في لوغاريتم المتغير:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^T x + \mu \sum_j \log x_j + \mu \sum_i \log w_i \\ \text{subject toe} & Ax + w = b \end{array} \qquad (3.2)$$

في الواقع إن هذه المسألة رغم أنها لا تكافئ المسألة الأصلية، ولكنها لا تختلف كثيراً عنها، وذلك لأنه عندما يبدأ الوسيط μ بالتناقص (والذي فرضنا أنه موجب) تقترب المسألة (3.2) شيئاً فشيئاً من المسألة (2.2).

وتسمى المسألة (3.2) بمسألة الحاجز وهي المقابلة لـ (2.2). علماً بأنها ليست مسألة واحدة، بل مجموعة كاملة من المسائل. ودليل كل مسألة هو الوسيط μ . كل واحدة من هذه المسائل هي مسألة برمجة غير خطية لأن دالة الهدف غير خطية. وهذه الدالة الغير خطية تسمى مسألة الحاجز أو بالتحديد تسمى دالة الحاجز اللوغاريتمية.



شكل 1.2 : مجموعة مستويات لقيم مختلفة لـ μ . (d) تبين المسار الأوسط

ومن المفيد أن تكون الصورة الهندسية لدالة الحاجز في مخيلتنا. تذكر أن مجموعة الحلول المسموح بها للمسائل المصاغة بالشكل القياسي هي عبارة عن متعدد سطوح يتميز كل سطح من سطوحه بخاصية أن أحد المتغيرات في هذا السطح يساوي صفراً. لذلك فإن دالة الحاجز هي عبارة عن سالب مالا نهاية في كل وجه من وجوه متعدد السطوح. علاوة على ذلك فإن قيمة دالة الحاجز منتهية في المناطق الداخلية من متعدد السطوح وتقترب من سالب مالا نهاية عندما نقترب من الحدود. **الشكل** 1.2 يوضح مستوى بعض المجموعات لدالة الحاجز لمسألة محددة ولقيم مختلفة للوسيط μ . لاحظ أن لكل μ تكون القيمة العظمى عند نقطة داخلية، ومع اقتراب قيمة μ من الصفر تقترب النقطة الداخلية من الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الأصلية (حيث تكون في أعلى الرأس). بالنظر في دالة الحاجز للمتغير μ ، فإن مجموعة الحلول المثلى تشكل مسار في المنطقة الداخلية للمتعدد السطوح في منطقة

الحلول المسموح بها. يسمى هذا المسار بالمسار الأوسط central path. سوف نقوم الآن بتطوير هذه الآلية لدراسة المسار الأوسط. وهذه الآلية تسمى بمضاريب لاجرانج Lagrange multipliers.

3.2 مضاريب لاجرانج Lagrange Multipliers

نود في البداية أن نناقش باختصار المسألة العامة لتحقيق الحد الأعظم لدالة خاضعة لقيد واحد أو أكثر من قيود المساواة. إن الدوال هنا مسموح لها أن تكون غير خطية، لكن من المفترض أن تكون ملساء وقابلة للاشتقاق مرتين. لنفترض بأن هناك معادلة قيد وحيدة. ومن ثم تكون المسألة العامة على النحو التالي:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(x) \\ \text{subject to} & g(x)=0 \end{array}$$

في هذه الحالة فإن التمثيل الهندسي للمسألة يكون واضحاً. إن انحدار f المرموز له بـ ∇f، هو متجه يُشير في اتجاه تزايد f عندما تتزايد أسرع ما يمكن. وفي حالة مسألة الأمثلة بدون قيود نقوم بوضع قيمة المتجه ∇f مساوياً للصفر لتحديد ما يسمى بالنقاط الحرجة لـ f، والنقطة العظمى إن وجدت يجب أن تكون ضمن هذه المجموعة. ولكن عندما يصبح لدينا القيد $g(x)=0$، لم يعد صحيحاً أن نبحث عن النقاط التي يتلاشى فيها الانحدار. بدلاً من ذلك يجب أن يكون الانحدار متعامد مع مجموعة الحلول المسموح بها $\{x : g(x)=0\}$. بالطبع عند كل نقطة x في مجموعة الحلول المسموح بها، $\nabla g(x)$ هو متجه متعامد مع مجموعة الحلول المسموح بها عند النقطة x لذلك فإن متطلبنا الجديد للنقطة x^* لتصبح نقطة حرجة بأن تكون ضمن

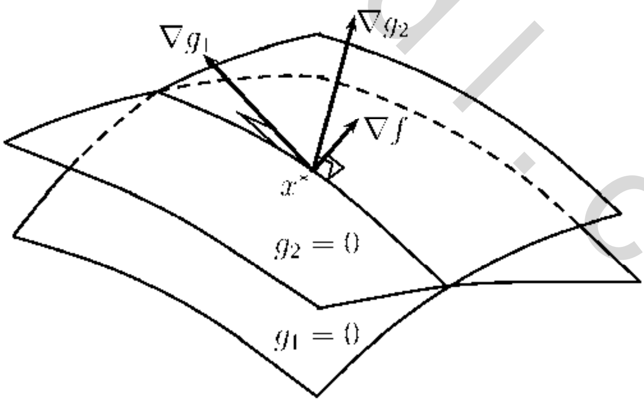
مجموعة الحلول المسموح بها وأن تكون $\nabla f(x^*)$ متناسبة مع $\nabla g(x^*)$ ، وعند كتابة هذا كنظام معادلات يكون لدينا:

$$g(x^*) = 0$$
$$\nabla f(x^*) = y\nabla g(x^*) \qquad (4.2)$$

حيث y هو حد التناسب، ومن الممكن أن يكون أي عدد حقيقي، إما سالباً أو موجباً أو صفراً. إن حد التناسب هذا يسمى مضروب لاجرانج.

الآن لنأخذ بعين الاعتبار عدة قيود:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(x) \\ \text{subject to} & \\ & g_1(x) = 0 \\ & g_2(x) = 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) = 0 \end{array}$$



شكل 2.2: مجموعة الحلول المسموح بها هي المنحنى المولد بتقاطع $g_1(x) = 0$ و $g_2(x) = 0$. إن النقطة x^* هي المثلى، لأن الانحدار عمودي على مجموعة الحلول المسموح بها.

في هذه الحالة إن منطقة الحلول المسموح بها هي تقاطع m فوق مستوى، انظر الشكل 2.2. إن الفضاء المتعامد مع مجموعة الحلول المسموح بها عند المتجه x لم يعد مجموعة ذات بعد واحد محدد بمتجه انحدار واحد، ولكن هو عبارة عن فضاء له بعد عالي (لنُعرّف هذا البعد بـ m) والمولد بجميع الانحدارات. لذا يتطلب وجود $\nabla f(x^*)$ في هذا التوليد. هذا ينتج المجموعة التالية من المعادلات للنقطة الحرجة:

$$g(x^*) = 0$$
$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g(x^*)$$

إن اشتقاق هذه المعادلات كان بشكل كلي هندسياً، لكن هناك صياغة جبرية بسيطة ينتج عنها نفس المعادلات. وهذه الفكرة يمكن أن تقدم بما يسمى دالة لاجرانج.

$$L(x, y) = f(x) - \sum_i y_i g_i(x)$$

ونبحث عن نقاطها الحرجة للمتجهين y و x، وبما أنها الآن أصبحت مسألة أمثلة بدون قيود، فإن النقاط الحرجة محددة ببساطة عن طريق وضع جميع الاشتقاق الأول مساوياً للصفر:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_i y_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -g_i \qquad = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m,$$

إن كتابة هذه المعادلات على شكل متجهات، نرى بأنها مكافئة لتلك المشتقة باستعمال الطريقة الهندسية. هذه المعادلات عادة ما يطلق عليها المرتبة

الأولى لشرط الأمثلة first-order optimality conditions. لتحديد ما إذا كنا نحتاج إلى الحل الذي يحقق المرتبة الأولى لشرط الأمثلة، فإن إيجاد الحل الأعظم الشامل قد يكون صعباً. وعلى أية حال إذا كانت كل القيود خطية فإن الخطوة الأولى (في الغالب تكون كافية) وهي أن ننظر إلى مصفوفة الاشتقاقات الثانية:

$$H(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

هذه المصفوفة تسمى مصفوفة هاس لدالة f عند النقطة x Hessian matrix.

نظرية 1.2

إذا كانت القيود خطية، تكون النقطة الحرجة x^* نقطة عظمى محلية إذا كان

$$u^T Hf(x^*)u < 0 \qquad (5.2)$$

لكل $u \neq 0$ تحقق

$$u^T \nabla g_i(x^*) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, m. \qquad (6.2)$$

البرهان:

نبدأ بالحدين الأولين من متسلسلة تايلور فنمددها لـ f حول النقطة x^*

$$f(x^* + u) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T u + \frac{1}{2} u^T Hf(x^*)u + o(\|u\|^2).$$

إن المتجه u يمثل الإزاحة من النقطة الحالية x^*. إن عمليات الاستبدال الوحيدة ذات العلاقة هي تلك التي تكمن في مجموعة الحلول المسموح بها. لذلك نجعل u في اتجاه المتجه الذي يحقق (6.2). من (4.2) و (6.2) نرى أن $\nabla f(x^*)^T u = 0$، ولذا

$$f(x^* + u) = f(x^*) + \frac{1}{2} u^T Hf(x^*)u + o(\|u\|^2).$$

بتطبيق (5.2) ينتهي الإثبات. □

بالإشارة إلى أنه إذا كانت (5.2) متحققة ليس فقط في x^* بل في كل x ، فإن x^* هي الحل الأعظم الشامل الوحيد. في الفصل القادم سوف نستخدم مضاريب لاجرانج لدراسة المسار الأوسط بالاعتماد على مسألة الحاجز .

4.2 دالة لاجرانج Lagrange function

في هذا الفصل، سوف نستخدم آلية مضاريب لاجرانج لدراسة حلول مسألة الحاجز . بشكل خاص سوف نوضح أنه لكل قيمة من قيم وسيط الحاجز μ هناك حل وحيد لمسألة الحاجز . كذلك سوف نوضح أنه بينما μ تقترب من الصفر، يقترب حل مسألة الحاجز من حل مسألة البرمجة الخطية الأصلية. أثناء دراستنا سوف نُعرِّج بشكل طبيعي على المسار الأوسط للمسألة الثنائية. كذلك المعادلات التي تُعرِّف المسارات الأوسطية للمسألة الأساسية والثنائية، ولذا سوف نقدم ترميز للمسار الأوسط للمسألة الأساسية والثنائية.

نبدأ بالتذكير بمسألة الحاجز:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^T x + \mu \sum_j \log x_j + \mu \sum_i \log w_i \\ \text{subject toe} & Ax + w = b \end{array}$$

هذه مسألة أمثلة ذات قيود متساوية، نستطيع تطبيق أدوات مضاريب لاجرانج على هذه المسألة والتي قمنا بتطويرها في الفصل السابق. إن معادلة لاجرانج هي:

$$L(x,w,y) = c^T x + \mu \sum_j \log x_j + \mu \sum_i \log w_i + y^T (b - Ax - w)$$

وبأخذ الاشتقاقات بالنسبة لكل متغير ووضع قيمتها تساوي صفراً، نحصل على المرتبة الأولى لشرط الأمثلة:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = c_j + \mu \frac{1}{x_j} - \sum_i y_i a_{ij} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = \mu \frac{1}{w_i} - y_i = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = b_i - \sum_j a_{ij} x_j - w_i = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

نكتب هذه المعادلات على شكل مصفوفات فتصبح:

$$A^T y - \mu X^{-1} e = c$$
$$y = \mu W^{-1} e$$
$$Ax + w = b$$

حيث X وW مصفوفات قطرية عناصرها المتجهات x وw. أيضاً يجب أن نتذكر أننا نستخدم e للدلالة على المتجه الذي يحتوي على واحد في كل مركبة.

وبإضافة متجه جديد مُعرف بـ $z = \mu X^{-1} e$ يمكننا كتابة المرتبة الأولى لشروط الأمثلة على هذه الطريقة:

$$Ax + w = b$$
$$A^T y - z = c$$
$$y = \mu W^{-1} e$$
$$z = \mu X^{-1} e$$

أخيراً، إذا قمنا بضرب المعادلة الثالثة بـ W والمعادلة الرابعة بـ X نصل إلى الصيغة الأساسية الثنائية المتماثلة التالية:

$$
\begin{aligned}
&Ax + w = b \\
&A^T y - z = c \\
&YWe = \mu e \\
&XZe = \mu e
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

لاحظ أن المعادلة الأولى فيها قيد للمساواة والتي ظهرت في المسألة الأساسية، بينما المعادلة الثانية هي قيد المساواة للمسألة الثنائية. علاوة على ذلك تكتب مركبات المعادلة الثالثة والرابعة على الشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
&x_j z_j = \mu, \qquad j = 1, \qquad 2, \ldots, n \\
&y_i w_i = \mu, \qquad i = 1, \qquad 2, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

نرى بوضوح علاقة هذه المعادلات بشروط التمام. فإذا وضعنا قيمة μ تساوي صفراً، فسنحصل بالضبط على شروط المتممة المعروفة، التي يجب أن تتحقق عند الحل الأمثل. لهذا السبب نسمي المعادلتين الأخيرتين شروط المتممة.

كما هو واضح من (7.2) المرتبة الأولى لشرط الأمثلة تعطينا $2n+2m$ معادلة في $2n+2m$ مجهول. إذا كانت هذه المعادلات خطية، فيمكن حلها باستخدام طريقة جاوس للحذف Gaussian elimination، وبعد ذلك يصبح موضوع البرمجة الخطية أكثر سهولة من حل نظام معادلات خطية. ولكن للأسف هذه المعادلات غير خطية بفارق بسيط جداً عن المعادلات الخطية. إن التعابير الغير خطية في هذه المعادلات هي عمليات ضرب بسيطة مثل $x_j z_i$. وهذا الفارق هو الذي يجعل البرمجة الخطية غير سهلة.

ويجب أن نتساءل ما إذا كان كلا الحلين موجودين للمعادلة (7.2) وكذلك ما إذا كان وحيداً.

5.2 المرتبة الثانية لشرط الأمثلية و وجود الحل
Second-Order Optimality Condition and Existence

لإظهار الحل إذا كان موجوداً ، يجب أن يكون الحل وحيداً. سوف نستخدم معلومات من المرتبة الثانية لدالة الحاجز:

$$f(x,w)=c^T x+\mu\sum_j \log x_j+\mu\sum_i \log w_i \qquad (8.2)$$

إن الاشتقاقات الأولى هي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=c_j+\frac{\mu}{x_j}, \qquad j=1,2,....,n,$$
$$\frac{\partial f}{\partial w_i}=\frac{\mu}{w_i}, \qquad i=1,2,.....,m,$$

و الاشتقاقات الثانية هي:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}=-\frac{\mu}{x_j^2}, \qquad j=1,2,....,n,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial w_i^2}=-\frac{\mu}{w_i^2}, \qquad i=1,2,.....,m.$$

كل هذه الاشتقاقات الثانية المختلطة تتلاشى، لهذا فإن مصفوفة هاس هي مصفوفة قطرية ذات مداخيل سالبة. ولذلك وباستخدام النظرية 1.2 يمكن أن يكون هناك على الأكثر نقطة حرجة واحدة إذا وجدت، وهي نقطة عظمى شاملة.

والسؤال الآن، هل يوجد دائماً حل لمسألة الحاجز؟ والجواب: ليس دائماً. اعتبر على سبيل المثال، مسألة الأمثلة البسيطة التالية على نصف الخط الغير سالب:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 0 \\ \text{subject to} & x \geq 0 \end{array}$$

لهذه المسألة، إن دالة الحاجز هي :

$$f(x) = \mu \log x$$

ليس لها نقطة عظمى (إن النقطة العظمى هي مالا نهاية وذلك عندما تكون $x = \infty$). على أية حال فإن مثل هذه الحالة نادرة. لنغير دالة الهدف في هذا المثال لكي تصبح $x = 0$ هي الحل الأمثل الوحيد :

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -x \\ \text{subject to} & x \geq 0 \end{array}$$

في هذه الحالة، إن دالة الحاجز هي:

$$f(x) = -x + \mu \log x$$

النقطة العظمى فيها تتحقق عندما $x = \mu$.

وبشكل عام لدينا النظرية التالية:

نظرية 2.2

يوجد حل لمسألة الحاجز إذا وإذا فقط كانت منطقة الحل المسموح بها للمسألة الأساسية والثنائية غير خالية.

البرهان: ارجع إلى كتاب [Va].

نلخص نتيجتنا الرئيسية والتي هي نتيجة مباشرة للنظرية السابقة بالنظرية التالية:

نظرية 3.2

إذا كانت مجموعة الحلول المسموح بها للبرمجة الخطية الأساسية (الثنائية) غير خالية ومحدودة، فإنه لكل $\mu > 0$ يوجد حل وحيد $(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$ للنظام (7.2).

البرهان: مباشر من نظرية 2.2.

إن المسار $\{(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu) : \mu > 0\}$ يسمى المسار الأساسي الثنائي الأوسط. وهو يلعب دوراً أساسياً في طريقة النقطة الداخلية للبرمجة الخطية. في الباب التالي سوف نُعرِّف أبسط أنواع طريقة النقطة الداخلية. وهو إجراء تكراري في كل دورة نحاول التحرك نحو نقطة على المسار الأوسط، والذي يكون أقرب إلى الحل الأمثل من النقطة الحالية.

تمارين الباب الثاني

1.2 احسب المسار الأوسط للدالة التالية:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{subject to} & \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_3 = 1 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2.2 لنفرض أن المجموعة $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ محدودة. وليكن $r \in \mathbb{R}^n$ و $s \in \mathbb{R}^m$ متجهين مُركباتهما عناصر موجبة. بواسطة دالة الحاجز. أثبت وجود حل وحيد لنظام المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} Ax + w &= b \\ A^T y - z &= c \\ YWe &= s \\ XZe &= r \\ x, y, z, w &> 0 \end{aligned}$$