الباب التاسع

طريقة تابع المسار
Path Following Method

• مقدمة • مقترح تابع المسار واتجاهات بحث NT • الحلول المسموح بها لخطوة NT الكاملة • التقارب التربيعي للمسار الأوسط • تحديث وسيط دالة الحاجز μ • خطوة طويلة لطريقة تابع المسار • طرق التنبؤ والتصحيح

1.9 مقدمة Introduction

إن أحد أسماء طرق تابع المسار هي طرق الأساسية الثنائية لتابع المسار وهذا الاسم يعبر بشكل جميل وواضح عن هذه الطرق، والفكرة أن الخوارزمية تتبع المسار الأساسي الثنائي الأوسط بشكل تقريبي، وذلك للوصول لمجموعة الحلول المثلى. وبشكل دقيق فإن شروط الأوسطية (1.7) حُلت تقريباً لقيمة معطاة $\mu > 0$ ، وبعد ذلك تخفض قيمة μ وتعاد العملية.

إن طريقة تابع المسار هي الأكثر نجاحاً من بين طرق النقطة الداخلية لحل مسألة البرمجة الخطية، وإن تمديد هذه الطريقة من البرمجة الخطية إلى البرمجة الموجبة شبه المعرفة حقق نجاح مماثل. وسوف ندرس في هذا الباب طرق تستخدم موازنة NT، والمسماة بطريقة الخطوة الصغيرة [DPRT]. وكذلك طريقة الخطوة الطويلة [Ji]، كما بينا ذلك سابقاً في الباب الثامن، وسوف نتطرق لبعض طرق التنبؤ والتصحيح predictor-corrector والتي تستخدم اتجاه NT.

2.9 مقترح تابع المسار واتجاهات بحث NT

The Path Following Approach and the NT Search Direction

لقيمة معطاة $\mu > 0$ ، من الممكن اعتبار μ−الأوسط $\left(X\left(\mu\right), S\left(\mu\right)\right)$ نقطة هدف على المسار الأوسط، بحيث تكون الفجوة الثنائية المرافقة هي $\operatorname{tr}\left(X\left(\mu\right), S\left(\mu\right)\right) = n\mu$. أو بمعنى آخر إذا استطعنا حساب μ−الأوسط بالضبط فإن الفجوة الثنائية سوف تساوي $n\mu$.

إن خوارزمية تابع المسار تحسب بشكل دوري قيمة $\left(X\left(\mu\right), S\left(\mu\right)\right)$ ، ويتبع ذلك تخفيض في قيمة μ .

وبفرض أن الزوج المعطى $\left(X, S\right) \in \left(\mathcal{P} \times \mathcal{D}\right)$ هما حلول مسموح بها فعلياً، وكذلك معطى $\mu > 0$. والمطلوب هو حساب $\left(\Delta X, \Delta S\right)$. بحيث أن $X + \Delta X \in \mathcal{P}$ و $S + \Delta S \in \mathcal{D}$ وكذلك

$$\left(X + \Delta X\right)\left(S + \Delta S\right) = \mu I \qquad (1.9)$$

وكما شرحنا في الجدول 1.5 الوارد في الباب الخامس حيث ذكرنا طرق مختلفة لتقريب الحل الناتج من نظام المعادلات غير الخطي. هذه الحلول المختلفة تقودنا إلى اتجاهات بحث مختلفة.

أحد أشهر اتجاهات البحث الأساسية الثنائية هو المسمى اتجاه NT، والمبين في [NT]، وسوف ندرس فقط هذا الاتجاه.

ولاستنتاج اتجاهات بحث NT ، سوف نقوم بتقديم بعض الترميز لاتجاهات NT. للحل المسموح به فعلياً $X \succ 0$ للمسألة الأساسية، وكذلك $S \succ 0$ للمسألة الثنائية. إن المصفوفة الموازنة هي

$$D = S^{-\frac{1}{2}}\left(S^{\frac{1}{2}} X S^{\frac{1}{2}}\right) S^{-\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

والتي تحقق $D^{-1}X = SD$ أو

$$D^{-\frac{1}{2}} X D^{-\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}} S D^{\frac{1}{2}} = V \tag{3.9}$$

وبمعنى آخر نستطيع استخدام المصفوفة D لموازنة المتغيرات X و S لنفس المصفوفة المتماثلة الموجبة المعرفة V.

$$V^2 = D^{-\frac{1}{2}} \; X \; S \; D^{\frac{1}{2}} \sim XS \tag{4.9}$$

وكنتيجة للمعادلة (4.9) أعلاه فإن الفجوة الثنائية عند $(X,S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$ معطى كالتالي:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(XS) &= \operatorname{tr}(V^2) \\ &= \|V\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(V) \end{aligned}$$

إن اتجاه البحث الموزون معرف على الشكل التالي:

$$D_X = D^{-\frac{1}{2}} \; \Delta X \; D^{-\frac{1}{2}}$$

و

$$D_S = D^{\frac{1}{2}} \; \Delta S \; D^{\frac{1}{2}}$$

ولهما خاصية التعامد بحيث $\operatorname{tr}\left(D_X D_S\right)=0$. إن اتجاه البحث الأساسي الثنائي الموزون معرف على الشكل التالي:

$$D_V = D_X + D_S \; .$$

وباستخدام مصفوفة الموازنة D المعرفة في (2.9) تستطيع كتابة (1.9) على الشكل التالي:

$$\left(V + D_X\right)\left(V + D_S\right) = \mu I \; . \tag{5.9}$$

الآن نستطيع إضعاف الشرط (5.9) بتبديل الطرف الأيسر، وذلك بجعله متماثلاً ومن ثم نحصل على

$$\frac{1}{2}\left[\left(V + D_X\right)\left(V + D_S\right) + \left(\left(V + D_X\right)\left(V + D_S\right)\right)^T\right] = \mu I$$

بعد ذلك نجعل النظام خطياً بإهمال الحد المضروب $D_X D_S$ و $D_S D_X$، وسنحصل على

$$\frac{1}{2}\left(\left(D_X + D_S\right)V + V\left(D_X + D_S\right)\right) = \mu I - V^2 \; . \tag{6.9}$$

إن المعادلة (6.9) تسمى معادلة ليبنوف Lyapunov equation، ولها حل وحيد متماثل معطى على الشكل التالي:

$$D_V = D_X + D_S = \mu V^{-1} - V$$

وبضرب المعادلة قبل وبعد D_V بـ $D^{\frac{1}{2}}$ نحصل على معادلات NT

$$\Delta X + D\Delta S D = \mu S^{-1} - X \tag{7.9}$$

تحت القيود

$$\operatorname{tr}\left(A_i \Delta X\right) = 0, \quad i = 1,\ldots,m$$
$$\Delta S = \sum_{i=1}^{m} \Delta y_i A_i \tag{8.9}$$

وبسهولة نحصل على

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta y_j \operatorname{tr}(A_i D A_j D) = \mu \operatorname{tr}(A_i S^{-1}) - \operatorname{tr}(A_i X)$$

$$= \mu \operatorname{tr}(A_i S^{-1}) - b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

لاحظ أن هذا النظام له مصفوفة موجبة معرفة، وبالتالي نستطيع حلها بالنسبة لـ Δy، وبعد ذلك لـ ΔS وذلك من المعادلة (8.9). كما نحصل على ΔX من المعادلة (7.9). وبالتالي نحصل على الاتجاه $(\Delta X, \Delta S)$ اتجاه NT.

ولنفرض أن $(X, S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$ معطى، وكذلك قيمة $\mu > 0$. سوف نستخدم دالة الأوسطية

$$\delta(X, S, \mu) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|D_V\|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\mu}\, V^{-1} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} V \right\|$$

التي قدمت بواسطة [Ji]. لاحظ أن $\delta(X, S, \mu) \geq 0$، وكذلك

$$\delta(X, S, \mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V^2 = \mu I \Leftrightarrow XS = \mu I$$

إن هذه الدالة هي عبارة عن تعميم لدالة الأوسطية للبرمجة الخطية المقدمة بواسطة [JRTP] للبرمجة الموجبة شبه المعرفة، وسوف نستخدمها بشكل مكثف. وقد وضح [Ji] أن $\delta(X, S, \mu)$ لها علاقة بالاتجاه الاشتقاقي directional derivative لخوارزمية الحاجز الأساسية الثنائية في اتجاه NT. ولكي نستنتج هذه العلاقة، نرمز $(\Delta X, \Delta S)$ لاتجاه NT عند (X, S). ولتكن f_μ ترمز لدالة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية الثنائية

$$f_\mu(X, S, \mu) = \frac{1}{\mu} \operatorname{tr}(XS) - \log \det(XS)$$

إن الاتجاه الاشتقاقي لـ f_μ عند (X,S) في اتجاه NT معطى على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\left(\left(\nabla_X f(X,S,\mu)\right)\Delta X\right)+\operatorname{tr}\left(\left(\nabla_S f(X,S,\mu)\right)\Delta S\right)\\
&=\operatorname{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}S-X^{-1}\right)\Delta X\right)+\operatorname{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}X-S^{-1}\right)\Delta S\right)\\
&=\operatorname{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}V-V^{-1}\right)D_X\right)+\operatorname{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}V-V^{-1}\right)D_S\right)\\
&=\operatorname{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}V-V^{-1}\right)D_V\right)\\
&=-\frac{1}{\mu}\operatorname{tr}\left(D_V^2\right)=-4\delta^2
\end{aligned}$$

هذه المساواة تبين أن δ هي بشكل طبيعي دالة وسطية مرافقة للاتجاه NT.

إن جميع خوارزميات هذا الباب تشابه الخوارزمية الهيكلية التالية:

خوارزمية 1.9

مدخلات زوج $(X^\circ,S^\circ)\in(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$

الوسائط وسيط أوسطي $\tau<1$

وسيط $\mu_\circ>0$ بحيث $\delta(X^\circ,S^\circ,\mu_\circ)\le\tau$

وسيط دقة $\varepsilon>0$

ابدأ $S=S^\circ\ ,y=y^\circ\ ,\mu=\mu_\circ$

بينما $\operatorname{tr}(XS)>\varepsilon$

احسب $\Delta X,\Delta S$ من المعادلتين (7.9) و(7.9)

اختر طول الخطوة $X\in(0,1]$

$X=X+\alpha\,\Delta X$

$S=S+\alpha\,\Delta S$

اختر وسيط التحديث $0<\theta<1$

$\mu=(1-\theta)\mu$

نهاية

نهاية

سوف نحدد

$$\left(X^{+},S^{+}\right):=\left(X+\Delta X,S+\Delta S\right)$$

على أنها خطوة NT الكاملة، و

$$\left(X_{\alpha},S_{\alpha}\right):=\left(X+\alpha\Delta X,S+\alpha\Delta S\right)$$

على أنها انقباض خطوة NT إذا كانت $0<\alpha<1$.

3.9 الحلول المسموح بها لخطوة NT الكاملة

Feasibility of the Full NT Step

لتكن $\left(X,S\right)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ وقيمة $\mu>0$ معطاة، سوف نحتاج النظرية التالية في إثبات نتائج لاحقة مهمة.

نظرية 2.9

لتكن $X\succ 0$ و $S\succ 0$ إذا كانت

$$\det\left(X_{\alpha}S_{\alpha}\right)>0,\qquad \forall\ 0\le\alpha\le\bar{\alpha}$$

حيث $\bar{\alpha}$ قيمة موجبة، $S_{\alpha}=S+\alpha\Delta S$ و $X_{\alpha}=X+\alpha\Delta X$ فإن $X_{\bar{\alpha}}\succ 0$ وكذلك $S_{\bar{\alpha}}\succ 0$.

البرهان:

لأن

$$\det\ \left(X_{\alpha}S_{\alpha}\right)=\det\ \left(X_{\alpha}\right)\ \det\ \left(S_{\alpha}\right)$$

فإن

$$\det\ \left(X_{\alpha}S_{\alpha}\right)=\prod_{i}\lambda_{i}\left(X_{\alpha}\right)\ \prod_{i}\lambda_{i}\left(S_{\alpha}\right)$$

إن الطرف الأيسر دائماً موجب في الفترة $[0,\bar{\alpha}]$، وهذا يعني أن القيم الذاتية لـ X_{α} و S_{α} تبقى موجبة في الفترة $[0,\bar{\alpha}]$. أي أن $X_{\bar{\alpha}}\succ 0$ وكذلك $S_{\bar{\alpha}}\succ 0$. □

سوف نثبت النتيجتين التاليتين وهما مشابهتان للنتيجتين في البرمجة الخطية.

نتيجة 3.9

لتكن $(X,S)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ و $\mu>0$. إذا كانت $\delta(X,S,\mu)<1$ ، فإن خطوة NT الكاملة هي حل مسموح به فعلياً.

البرهان:

سوف نوضح أن محددة determinant $X_\alpha S_\alpha$ تبقى موجبة لكل $\alpha\le 1$. وبالتالي فإن $X(1),S(1)\succ 0$ من نتيجة 2.9، لاحظ أن

$$
\begin{aligned}
X_\alpha S_\alpha &\sim \left(V+\alpha D_X\right)\left(V+\alpha D_S\right)\\
&= V^2+\alpha D_X V+\alpha V D_S+\alpha^2 D_X D_S\\
&= V^2+\alpha\left(\mu I-V^2\right)+\frac{1}{2}\alpha^2\left(D_X D_S+D_S D_X\right)\\
&+\left[\frac{1}{2}\alpha^2\left(D_X D_S-D_S D_X\right)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\alpha\left(D_X V+V D_S-V D_X-D_S V\right)\right]
\end{aligned}
$$

وذلك باستخدام معادلة (6.9). إن المصفوفة داخل الأقواس المربعة هي مصفوفة متماثلة تخالفياً، وهذا يقتضي أن محددة $[X_\alpha S_\alpha]$ موجبة إذا كانت المصفوفة

$$M(\alpha):=V^2+\alpha(\mu I-V^2)+\frac{1}{2}\alpha^2\left(D_X D_S+D_S D_X\right)$$

موجبة معرفة. ولأننا نستطيع اعادة صياغة $M(\alpha)$ على الشكل:

$$M(\alpha)=(1-\alpha)V^2+\alpha\mu\left[I+\frac{\alpha}{2\mu}\left(D_X D_S+D_S D_X\right)\right]\text{،}$$

يكون لدينا $M(\alpha) > 0$ إذا كانت $\alpha \le 1$ و

$$\left\| \frac{\left(D_X D_S + D_S D_X\right)}{2\mu} \right\|_2 < 1 .$$

إن الشرط الأخير متحقق لأن $\delta < 1$ ولأن

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D_X D_S + D_S D_X}{2\mu} \right\|_2 &= \frac{1}{\mu} \left\| \frac{1}{2}\left(D_X D_S + D_S D_X\right) \right\|_2 \\ &\le \frac{1}{4\mu} \left\| D_V \right\|^2 = \delta^2 < 1 \end{aligned} .$$

$\square$

النتيجة التالية توضح أن الفجوة الثنائية المطلوبة نحصل عليها بعد خطوة كاملة لـNT.

نتيجة 4.9

إذا كانت $(X,S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$ و $\mu > 0$ بحيث $\delta(X,S,\mu) < 1$ فإن

$$\operatorname{tr}\left(X^+ S^+\right) = n\mu$$

أي أن الفجوة الثنائية المطلوبة نحصل عليها بعد خطوة كاملة لـNT.

البرهان:

من إثبات نتيجة 3.9 تحصل على

$$\begin{aligned} X^+ S^+ \sim \mu I &+ \frac{1}{2}\left(D_X D_S + D_S D_X\right) \\ &+ \left[\frac{1}{2}\left(D_X D_S - D_S D_X\right) + \frac{1}{2}\left(D_X V - V D_S - V D_X - D_S V\right) \right] \end{aligned} \tag{9.9}$$

لأن $A \sim B$ يقتضي

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B), \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

نستنتج

$$\operatorname{tr}\left(X^+ S^+\right) = \operatorname{tr}\left(\mu I\right) = n\mu ،$$

وذلك باستخدام $\text{tr}\left(D_X D_S\right) = 0$ والتماثل التخالفي للمصفوفة في الأقواس المربعة. □

4.9 التقارب التربيعي للمسار الأوسط
Quadratic Convergence to the Central Path

سوف نرمز للمصفوفة المتماثلة تخالفياً (9.9) بالرمز M. كذلك نستطيع تبسيط الترميز بتعريف

$$D_{XS} = \frac{1}{2}\left(D_X D_S + D_S D_X\right)$$

لإثبات التقارب التربيعي للخطوة الكاملة لـNT نحتاج إلى النتائج التالية:

نتيجة 5.9

لدينا

$$\lambda_{\min}\left((V^+)^2\right) \geq \mu\left(1-\delta^2\right)$$

حيث $\lambda_{\min}$ ترمز لأصغر قيمة ذاتية.

البرهان:

من (9.9) نستنتج

$$\lambda_{\min}\left((V^+)^2\right) = \lambda_{\min}\left(\mu I + D_{XS} + M\right)$$

المصفوفة المتماثلة تخالفياً M تقتضي:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}\left((V^+)^2\right) &\geq \lambda_{\min}\left(\mu I + D_{XS}\right)\\ &\geq \mu - \left\|D_{XS}\right\|_2\end{aligned}$$

وبالتعويض في $\left\|D_{XS}\right\|_2$ نحصل على

$$\lambda_{\min}\left((V^{+})^2\right) \geq \mu - \frac{1}{4}\|D_V\|^2 = \mu\left(1-\delta^2\right) \qquad \square$$

نتيجة 6.9

لدينا

$$\|D_{XS}\|^2 \leq \frac{1}{8}\|D_V\|^4$$

البرهان:

من السهل إثبات

$$D_X D_S + D_S D_X = \frac{1}{2}\left[\left(D_X + D_S\right)^2 - \left(D_X - D_S\right)^2\right]$$

ولأن $\operatorname{tr}\left(D_X D_S\right) = 0$ المصفوفات $D_V = D_X + D_S$ وكذلك $Q_V = D_X - D_S$ لهما نفس المعيار. ينتج من ذلك

$$\begin{aligned}
\|D_{XS}\|^2 &= \left\|\frac{1}{4}\left(D_V^2 - Q_V^2\right)\right\|^2 \\
&= \frac{1}{16}\operatorname{tr}\left(D_V^4 + Q_V^4 - D_V^2 Q_V^2\right) \\
&\leq \frac{1}{16}\left(\left\|D_V^2\right\|^2 + \left\|Q_V^2\right\|^2\right) \\
&\leq \frac{1}{16}\left(\|D_V\|^4 + \|Q_V\|^4\right) = \frac{1}{8}\|D_V\|^4 \qquad \square
\end{aligned}$$

نظرية 7.9

إن الدالة الأوسطية بعد NT خطوة مسموح بها تحقق

$$\delta^{+} = \delta\left(X^{+}, S^{+}, \mu\right) \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2\left(1-\delta^2\right)}}$$

البرهان:

الدالة الأوسطية بعد خطوة كاملة لـNT معطاة على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}\left(\delta^{+}\right)^{2} &= \frac{1}{4\mu}\left\|\mu(V^{+})^{-1}-V^{+}\right\|^{2}\\ &= \frac{1}{4\mu}\left\|(V^{+})^{-1}\left(\mu I-(V^{+})^{2}\right)\right\|^{2}\\ &\leq \frac{1}{4\mu}\lambda_{\max}^{2}\left((V^{+})^{-1}\right)\left\|\mu I-(V^{+})^{2}\right\|^{2}\end{aligned}$$

نعوض في الحد الأخير من نتيجة 5.9 فنحصل على

$$.\left(\delta^{+}\right)^{2} \leq \frac{1}{4\mu^{2}\left(1-\delta^{2}\right)}\left\|\mu I-(V^{+})^{2}\right\|^{2}$$

الآن نوضح

$$.\left\|\mu I-(V^{+})^{2}\right\|^{2} \leq \left\|D_{XS}\right\|^{2}$$

ولإثبات ذلك لاحظ أن

$$\begin{aligned}\left\|\mu I-(V^{+})^{2}\right\|^{2} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{i}\left(\mu I+D_{XS}+M\right)-\lambda_{i}\left(\mu I\right)\right]^{2}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{i}\left(D_{XS}+M\right)\right]^{2} = \operatorname{tr}\left(\left(D_{XS}+M\right)^{2}\right).\end{aligned}$$

وباستخدام المصفوفة M نحصل على

$$\begin{aligned}\left\|\mu I-(V^{+})^{2}\right\|^{2} &= \operatorname{tr}\left((D_{XS})^{2}-MM^{T}\right)\\ &\leq \operatorname{tr}\left(D_{XS}\right)^{2}\\ &= \left\|D_{XS}\right\|^{2}\end{aligned}$$

الآن نحصل على المطلوب من نتيجة 6.9 . □

إن النتيجة النهائية لها الشكل التالي:

نتيجة 8.9

إذا كانت $\delta\left(X,S,\mu\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن $\delta\left(X^{+},S^{+},\mu\right)<\delta^{2}\left(X,S,\mu\right)$ ، أي أننا حصلنا على تقارب تربيعي لـ μ-الأوسط. والشرط الأضعف $\delta\left(X,S,\mu\right)<\sqrt{\frac{2}{3}}$ يقتضي أن $\delta\left(X^{+},S^{+},\mu\right)<\delta\left(X,S,\mu\right)$، وهذا يعني حصولنا على تقارب كافٍ.

البرهان: انظر نتيجة 6.9 ونظرية 7.9.

5.9 تحديث وسيط دالة الحاجز μ Updating the Barrier Parameter

إذا كانت الدورات الحالية $\left(X,S\right)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ قريبة بشكل كافٍ إلى نقطة الهدف $\left(X\left(\mu\right),S\left(\mu\right)\right)$ ولنقل أن

$$\delta\left(X,S,\mu\right)\leq\frac{1}{2}$$

فإن تحديث الوسيط μ يكون على النحو التالي:

$$\mu^{+}=\left(1-\theta\right)\mu$$

حيث $0<\theta<1$ وسيط معطى.

سوف نوضح الآن أن القيمة الافتراضية $\theta=\frac{1}{2\sqrt{n}}$ تضمن لنا أن $\delta\left(X,S,\mu\right)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$. الخطوة الكاملة التالية لـ NT سوف تعطينا الزوج المسموح به $\left(X^{+},S^{+}\right)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ حيث $\delta\left(X^{+},S^{+},\mu\right)\leq\frac{1}{2}$ ، وذلك بسبب خاصية التقارب التربيعي.

سوف نثبت الآن نظرية تربط بين الدالة الأوسطية لـ μ بعد التحديث وبين الدالة الأوسطية لـ μ قبل التحديث.

نظرية 9.9

لتكن $(X,S)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ و $\mu=\dfrac{\operatorname{tr}(XS)}{n}$ و $\delta=\delta(X,S,\mu)$. إذا كانت $\mu^{+}=(1-\theta)\mu$ حيث $0<\theta<1$ فإن

$$\left(\delta\left(X,S,\mu^{+}\right)\right)^{2}=\frac{n\theta^{2}}{4(1-\theta)}+(1-\theta)\delta^{2}.$$

البرهان :

لتبسيط الترميز سوف نستخدم $U=\frac{1}{\sqrt{\mu}}V$ ، وباستخدام هذا الترميز نحصل على

$$4\left(\delta\left(X,S,\mu^{+}\right)\right)^{2}=\left\|\sqrt{1-\theta}\,U^{-1}-\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}U\right\|^{2}$$

.

$$=\left\|\frac{\theta U}{\sqrt{1-\theta}}-\sqrt{1-\theta}\left(U^{-1}-U\right)\right\|^{2}$$

لاحظ أن

$$\|U\|^{2}=\operatorname{tr}\left(U^{2}\right)=\frac{1}{\mu}\operatorname{tr}\left(U^{2}\right)=n$$

وهو يقتضي أن U متعامدة مع $U^{-1}-U$:

$$\operatorname{tr}\left(U\left(U^{-1}-U\right)\right)=n-\|V\|^{2}=0$$

ونحصل من ذلك على

$$4\left(\delta\left(X,S,\mu^{+}\right)\right)^{2}=\frac{\theta^{2}\|U\|^{2}}{1-\theta}+(1-\theta)\left\|U^{-1}-U\right\|^{2}.$$

وهذا يعني حصولنا على المطلوب بملاحظة أن $\left\|U^{-1}-U\right\|=2\delta$ وأن $\|U\|^{2}=n$. □

وكنتيجة مباشرة لهذه النظرية يتبين لنا أنه إذا كان لدينا الزوج الأساسي الثنائي $(X,S)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ والوسيط μ بحيث أن $\delta\left(X,S,\mu\right)\le\frac{1}{2}$ وكان تحديث μ عن طريق $\mu^{+}=(1-\frac{1}{2\sqrt{n}})\mu$ ، فإن $\delta\left(X,S,\mu^{+}\right)\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، وكما أوضحنا أعلاه فإن الخطوة التالية لـ NT تعطينا الزوج $\left(X^{+},S^{+}\right)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ الذي يحقق $\delta\left(X^{+},S^{+},\mu^{+}\right)\le\frac{1}{2}$. لذلك فإن الخوارزمية سوف تولد متتالية من الدورات والتي تحقق لنا دائماً $\delta\le\frac{1}{2}$ ، إضافة إلى ذلك فإن الفجوة الثنائية سوف تتقلص بمضاعف $1-\frac{1}{2\sqrt{n}}$ عند كل دورة، لأن الفجوة الثنائية بعد خطوة NT كاملة تساوي الفجوة الثنائية المطلوبة.

إن هذه الملاحظات تقتضي النظرية التالية التي تؤكد أن الخوارزمية تتقارب بسرعة.

نظرية 10.9

إذا كانت $\tau=\frac{1}{\sqrt{2}}$ وكانت $\theta=\frac{1}{2\sqrt{n}}$ فإن الخوارزمية 1.9 مع خطوة NT كاملة تتوقف على الأكثر عند

$$\left\lceil 2\sqrt{n}\ \log\frac{n\mu^{\circ}}{\varepsilon}\right\rceil$$

دورة، ويكون الزوج الناتج $\left(X,S\right)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ يحقق $\operatorname{tr}\left(XS\right)\le\varepsilon$.

البرهان: انظر [Dk].

6.9 خطوة طويلة لطريقة تابع المسار

Long Step Path Following Method

إن هذه الخوارزمية تعمل على تضئيل خطوات NT بالنسبة للوسيط المعطى μ حتى يتحقق $\delta(X,S,\mu)\le \frac{1}{2}$. وتسمى هذه الخطوات بالدورات الداخلية. بعد ذلك نقوم بتحديث الوسيط μ عن طريق $\mu^{+}=(1-\theta)\mu$ وهذه هي الدورات الخارجية. إن طول الخطوة يحدد بواسطة خط البحث line search لدالة الحاجز

$$f_{\mu}(X,S,\mu)=\frac{1}{\mu}\operatorname{tr}(XS)-\log\ \det(XS)-n$$

ويكون لدينا الخوارزمية التالية:

خوارزمية 11.9 (الخطوة الطويلة)

مدخلات زوج $(X^{\circ},S^{\circ})\in(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$

الوسائط وسيط أوسطي $\tau>0$

وسيط $\mu_{\circ}>0$ بحيث $\delta(X^{\circ},S^{\circ},\mu_{\circ})\le\tau$

وسيط دقة $\varepsilon>0$

وسيط التحديث $\theta<1$

ابدأ $S=S^{\circ}\ ,\ y=y^{\circ}\ ,\ \mu=\mu_{\circ}$

بينما $\operatorname{tr}(XS)>\varepsilon$

إذاً $\delta(X,S,\mu)\le\tau$

$\mu=(1-\theta)\mu$

وإلا $\delta_d(S,\mu)>\tau$

احسب $\Delta X,\Delta S$ من المعادلتين

(7.9) و(7.9)

أوجد α

$S=S+\alpha\Delta S$

$y=y+\alpha\Delta y$

نهاية

نهاية

حيث $\alpha = \arg \ \ \text{minimize} \ \ f_{\mu}\left(X+\alpha\Delta X, S+\alpha\Delta S\right)$.

النظرية التالية تعطينا حد التعقيد لأسوأ دورة.

نظرية 12.9

الخوارزمية 11.9 تتطلب على الأكثر

$$O\left(\log\left(\frac{n\mu_{\circ}}{\varepsilon}\right)\right)$$

دورة لحساب الزوج المسموح به فعلياً $\left(X^{*}, S^{*}\right) \in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ والذي يحقق $\text{tr}\left(X^{*}S^{*}\right) \le \varepsilon$.

البرهان: انظر [Ji].

7.9 طرق التنبؤ والتصحيح Predictor Corrector Methods

إن طرق التنبؤ والتصحيح من الطرق الأساسية الثنائية الأكثر شعبية في الوقت الحاضر. ويعود ذلك إلى تطبيقها الناجح في كثير من برامج الحاسب الآلي لحل مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة، مثل برنامج SeDuMi وبرنامج SDPT3. في البرنامج SeDuMi يستخدم فقط الاتجاه NT، بينما في البرنامج SDPT3 يحدد الاتجاه من قبل المستخدم. الخوارزمية التالية تسمى خوارزمية التنبؤ والتصحيح، وتعود إلى [MTY]. إن خطوة التنبؤ هي خطوة متضائلة على طول اتجاه الموازنة للمسألة الأساسية الثنائية التآلفية. يتبع ذلك خطوة التصحيح والمعرف بخطوة NT كاملة بالنسبة لـ $\mu = \text{tr}\ (XS)/n$ حيث $(X, S) \in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ عند الدورة الحالية.

في الخوارزمية 13.9 التالية لاحظ أن الوسيط θ استُخدم كطول خطوة في مرحلة التنبؤ وكذلك لتحديث μ ، حيث $\mu^{+}=(1-\theta)\mu$. النتيجة التالية تعطينا طريقة ديناميكية لاختيار θ، بحيث تبقى دائماً $\delta(X,S,\mu)\le\tau$.

خوارزمية 13.9

مدخلات زوج $(X^{\circ},S^{\circ})\in(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$

الوسائط وسيط أوسطي $\tau>0$

وسيط $\mu_{\circ}>0$

بحيث أن $\delta(X^{\circ},S^{\circ},\mu_{\circ})\le\tau$ و $\mu_{\circ}=\operatorname{tr}\left(\frac{X^{\circ}S^{\circ}}{n}\right)$

وسيط الدقة $\varepsilon>0$

وسيط $0<\theta<1$

ابدأ $S=S^{\circ}\ ,y=y^{\circ}\ ,\mu=\mu_{\circ}$

بينما $tr(XS)>\varepsilon$

خطوات التصحيح

احسب $\Delta X,\Delta S$ من المعادلتين (7.9) و(7.9)

$X=X+\Delta X,\quad S=S+\Delta S$ خطوة NT كاملة

خطوات التنبؤ

احسب $\Delta X=-(X+D\ \Delta S\ D)$

احسب $\Delta S=-\sum_{i=1}^{m}\Delta y_i A_i$

$X=X+\theta\Delta X,\quad S=S+\theta\Delta S$

$\mu=(1-\theta)\mu$

نهاية

نهاية

نتيجة 14.9

إذا كانت $\tau = \frac{1}{3}$ فإن $\delta\left(X,S,\mu\right) \le \tau$ متحققة لكل دورة $\left(X,S\right) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{D})$ من الخوارزمية 13.9 شريطة استخدام

$$\theta = \frac{2}{1+\sqrt{1+13\left\|\frac{1}{2}\left(D_X^a D_S^a + D_X^a D_S^a / \mu\right)\right\|}} \tag{10.9}$$

حيث D_X^a و D_S^a ترمز للاتجاه الأساسي الثنائي التآلفي الموزون حيث $D_X^a + D_S^a = -V$.

البرهان:

انظر [RTV] حيث أن إثبات حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة هو امتداد مباشر لإثبات حالة البرمجة الخطية. □

إن خوارزمية 13.9 لها نفس حد تعقيد خوارزمية 1.9 ، أي أنه لدينا النظرية التالية:

نظرية 15.9

إذا كانت $\tau = \frac{1}{3}$ و θ معطاة في (10.9) فإن الخوارزمية 13.9 تتوقف على الأكثر عند

$$\left\lceil \left(1+\sqrt{1+\frac{13}{2}n}\right)\log\frac{\operatorname{tr}\left(X^{\circ}S^{\circ}\right)}{\varepsilon} \right\rceil$$

دورة، إن الزوج الناتج $\left(X,S\right) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$ يحقق $\operatorname{tr}\left(XS\right) \le \varepsilon$.

البرهان: انظر [MTY].

مثال 16.9 **(انظر** [KSS] **).**

اعتبر المسألة الأساسية والثنائية على الصورة القياسية حيث

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

المسألة لها الحل المتمم الفعلي التالي

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

اعتبر متتالية الحلول المسموح بها $\left(X_k, S_k, y_k\right) \to \left(X^*, S^*, y^*\right)$ والمعرفة بالشكل التالي

$$X_k := \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & \varepsilon_k \end{pmatrix},\ S_k := \begin{pmatrix} (1+c)\varepsilon_k & -\sqrt{c\varepsilon_k} \\ -\sqrt{c\varepsilon_k} & 1+2\sqrt{c\varepsilon_k} \end{pmatrix},\ y_k := \begin{pmatrix} (1+c)\varepsilon_k/2 \\ \sqrt{c\varepsilon_k} \end{pmatrix}$$

حيث $\varepsilon_k \to 0$ و $c > 0$. وقيمة $c = \frac{1}{32}$ وقيمة $\varepsilon_k = 10^{-k/10}$ وقيمة $k = 30, \ldots\ldots, 80$. من الواضح أن $\delta\left(X, S, \mu\right) \le 0.13$ للمتتالية، أي أن لدينا تقارباً تربيعياً.

تمارين الباب التاسع

1.9 لدينا البرنامج التالي

$$\text{maximize} \quad y_1 + y_2 \ , \qquad y \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{subject to} \ \ y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد حلاً للبرنامج باستخدام خوارزمية 1.9. ثم أوجد X_α وأيضاً أوجد $S_{\bar{\alpha}}$ ؟

2.9 لتكن $n = m = 3$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ وأن:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن الدالة الأوسطية تحقق $\delta^+ = \delta\left(X^+, S^+, \mu\right) \le \dfrac{\delta^2}{\sqrt{2\left(1-\delta^2\right)}}$

3.9 حل البرنامج التالي:

$$n = 2 \ ، \ m = 3 \ ،$$
$$b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \ ، \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ ،$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

باستخدام خوارزمية 11.9 وخوارزمية 13.9 ثم قارن بين الخوارزميتين؟

الرموز
Symbols

A^T	:	مصفوفة متماثلة
A^{-T}	:	$(A^T)^{-1}$
a_{ij}	:	المدخل ij للمصفوفة A
$A \sim B$	:	$A = T^{-1}BT$ لمصفوفة غير شاذة T
$A \sim B$	:	المصفوفة A و B متشابهتين similar
$A \succeq B$	:	$A - B$ مصفوفة متماثلة موجبة شبه معرفة
$A \succ B$	:	$A - B$ مصفوفة متماثلة موجبة معرفة
$A \preceq B$	:	$A - B$ مصفوفة متماثلة سالبة شبه معرفة
$A \prec B$	:	$A - B$ مصفوفة متماثلة سالبة معرفة
$\mathcal{R}(A)$	:	مدى (فضاء العمود) للمصفوفة $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
I_r	:	مصفوفة الوحدة $r \times r$
I	:	مصفوفة الوحدة ذات حجم يعتمد على السياق
$O_{m\times n}$	:	مصفوفة صفرية $m \times n$
O	:	المصفوفة الصفرية ذات حجم يعتمد على السياق
e_n	:	متجه له جميع المركبات تساوي واحد في $\mathbb{R}^n$
e	:	متجه جميع مركباته واحد والحجم يعتمد على السياق
$\mathbb{R}^n$	:	فضاء متجهات حقيقي اقليدي حجمه n
$\mathbb{R}^n_+$	:	الثمن الموجب في $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{Z}^n$	:	متجه جميع مركباته أعداد صحيحة وحجمه n
$\mathbb{Z}^n_+$	:	متجه جميع مركباته أعداد صحيحة موجبة وحجمه n
$\mathbb{R}^{n\times n}$	:	فضاء المصفوفات الحقيقية $n \times n$

$\mathcal{S}_n$	=	$\{X \mid X \in \mathbb{R}^{n\times n},\ X = X^T\}$
$\mathcal{S}_n^+$	=	$\{X \mid X \in \mathcal{S}_n,\ X \succeq 0\}$
$\mathcal{S}_n^{++}$	=	$\{X \mid X \in \mathcal{S}_n,\ X \succ 0\}$
$\mathcal{C}_n$	=	$\{A \mid A \in \mathcal{S}_n^+, \forall x \in \mathbb{R}_+^n\}$ (مصفوفات مزدوجة الإيجاب)
$\mathcal{N}_n$	=	$\{A \in \mathcal{S}_n \mid a_{ij} \geq 0,\ \forall i, j = 1, \ldots\ldots, n\}$ (مصفوفات غير سالبة)
svec $(\mathcal{S}_n^+)$	=	$\{x \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \mid \mathrm{smat}(x) \in \mathcal{S}_n^+\ \}$
$\{-1,1\}^n$	=	$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \{-1,1\},\ i = 1, \ldots\ldots, n\ \}$
$\lambda_i(A)$	:	ith أكبر قيمة ذاتية لـ A إذا كانت $\forall j$ $\lambda_j(A) \in \mathbb{R}$
$\lambda_{\max}(A)$	:	أكبر قيمة ذاتية لـ A إذا كانت $\forall j$ $\lambda_j(A) \in \mathbb{R}$
$\lambda_{\min}(A)$	:	أصغر قيمة ذاتية لـ A إذا كانت $\forall j$ $\lambda_j(A) \in \mathbb{R}$
tr (A)	=	$\sum_i a_{ii} = \sum_i \lambda_i(A)$ (الأثر لـ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)
$\langle A, B\rangle$	=	tr (AB^T)
$\det(A)$	=	$\prod_i \lambda_i(A)$ ، المحدد لـ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\|A\|^2$	=	tr $(AA^T) = \sum_{ij} a_{ij}^2$ (معيار فروبينس)
$\|A\|^2$	=	$\sum_i \lambda_i^2(A)$ إذا كانت $A \in \mathcal{S}_n$
$\|A\|_2$	=	$(\lambda_{\max}(A^T A))^{\frac{1}{2}}$ (المعيار الطيفي)
$\|A\|_2$	=	$\lambda_{\max}(A)$ إذا كانت $A \succeq 0$
$\rho(A)$	=	$\max_i \lvert\lambda_i(A)\rvert$ (الشعاع الطيفي لـ A)
$\kappa(A)$	=	$\dfrac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$ إذا كان $\forall_i$ $\lambda_i(A) > 0$
$\kappa(A)$	:	العدد الشرطي condition number لـ A إذا كانت $A \succ 0$
$A^{\frac{1}{2}}$	:	الجذر الوحيد المتماثل لـ $A \succeq 0$
Diag(x)	:	المصفوفة القطرية $n \times n$ حيث مركبات $x \in \mathbb{R}^n$ تقع على القطر
diag(X)	:	متجه بعده n مركباته عناصر قطر المصفوفة $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$
vec(A)	=	$[a_{11}, a_{21}, \ldots., a_{n1}, a_{12}, a_{22}, \ldots.., a_{nn}]^T$ حيث $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
svec(A)	=	$[a_{11}, \sqrt{2}a_{12}, \ldots.\sqrt{2}a_{1n}, a_{22}, \sqrt{2}a_{23}, \ldots., a_{nn}]^T$ حيث $A \in \mathcal{S}_n$

smat(.) : المؤثر العكسي للعملية svec(.)

$ri(\mathcal{C})$: الداخل النسبي للمجموعة $\mathcal{C}$

$\dim(\mathcal{L})$: بعد الفضاء الجزئي $\mathcal{L}$

$\mathcal{C}^*$: المخروط الثنائي للمخروط $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$

$\mathcal{C}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y \geq 0, \ \forall y \in \mathcal{C}\}$

$\mathcal{P}$: مجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الأساسية

$\mathcal{D}$: مجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الثنائية

$\mathcal{P}^*$: مجموعة الحلول المثلى للمسألة الأساسية

$\mathcal{D}^*$: مجموعة الحلول المثلى للمسألة الثنائية

$\mathcal{L} = \operatorname{span}\{A_1, \ldots, A_m\}$

$\log(t)$: اللوغاريتم الطبيعي لـ $0 < t$

$\psi(t) = t - \log(1+t)$ حيث $t > -1$

$p_\mu(X) = \frac{1}{\mu}\operatorname{tr}(CX) - \log \det X$

$d_\mu(S, y) = \frac{1}{\mu} b^T y + \log \det(S)$

$f_\mu(X, S) = \operatorname{tr}\left(\frac{XS}{\mu}\right) - \log \det\left(\frac{XS}{\mu}\right) - n$

$D = [X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}} S X^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}]$ حيث $(X, S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$

D : مصفوفة موازنة NT

$V = D^{-\frac{1}{2}} X D^{-\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}} S D^{\frac{1}{2}}$

$\delta(X, S, \mu) = \frac{1}{2} \| \sqrt{\mu} V^{-1} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} V \|$

$D_X = D^{-\frac{1}{2}} \Delta X D^{-\frac{1}{2}}$ حيث $\Delta X \in \mathcal{L}^\perp$

$D_S = D^{\frac{1}{2}} \Delta S D^{\frac{1}{2}}$ حيث $\Delta S \in \mathcal{L}$

$G = (V, E)$ = رسم بسيط غير موجه حيث مجموعة الرؤوس V ومجموعة الأحرف E

المراجع
References

المراجع العربية

1) عبدالرحمن أبوعمة ومحمد العش، البرمجة الخطية، جامعة الملك سعود 1990م.
2) زيد البلخي ، مقدمة في بحوث العمليات، جامعة الملك سعود 1998م.
3) سليمان الحميدان، عمر حامد وحسن حميدة، الأسس الرياضية للبرمجة الخطية، جامعة الملك سعود 2002م.
4) أحمد رضوان وعبدالرحمن أبوعمة، تقنيات الأمثلية في البرمجة الخطية، جامعة الملك سعود 2001م.
5) محمد الصفدي، البرمجة الخطية وبحوث العمليات، وكالة المطبوعات 1980م.

المراجع الأجنبية

[AW] S. Al-Homidan and H. Wolkowicz, Approximate and Exact Completion Problems for Euclidean Distance Matrices using Semidefinite Programming, *Linear Algebra and its Applications*, Vol.406 (2005) pp. 109-141.

[AF] S. Al-Homidan and R. Fletcher, Rationalizing Foot and Ankle Measurements to Conform to a Rigid Body Model, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical,* Vol. 9, No. 2, 2006. pp. 103-111.

[Alh] S. Al-Homidan, Approximate Toeplitz problem using semidefinite programming, *Journal of Optimization Theory and Ap*plications, Vol. 135, pp. 583-598, 2007.

[Ali1] F. Alizadeh. *Combinatorial optimization with interior point methods and semidefinite matrices.* PhD thesis, University of Minnesota, Minneapolis, USA, 1991.

[Ali2] F. Alizadeh. Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 5:13-51, 1995.

[AHO] F. Alizadeh, J.-P.A. Haeberley, and M.L. Overton. Primal-dual methods for semidefinite programming: convergence rates, stability and numerical results. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3):746-768, 1998.

[AA] E.D. Andersen and K.D. Andersen. The MOSEK interior point optimzer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm. In H.

Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, *High performance optimization*, pages 197-232. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[AF] K.M. Anstreicher and M. Fampa. A long-step path following algorithm for semidefinite programming problems. In P.M. Pardalos and H. Wolkowicz, editors, *Topics in Semidefinite and Interior-Point Methods*, volume 18 of *Fields Institute Communications Series*, pages 181-196. American Mathematical Society, 1998.

[BW] V. Balakrishnan and F. Wang. Sdp in systems and control theory. In H. Woklowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of semidefinite programming*, pages 421-442. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2000.

[BGN] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A.S. Nemirovski. Robustness. In H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of semidefinite programming*, pages 139-162. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA 2000.

[BN] A. Ben-Tal and A.S. Nemirovski. Stuctural design. In H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of semidefinite programming*, pages 443-467. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA 2000.

[BGFB] S.E. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 15, SIAM,Philadelphia, USA, 1994.

[DK] E. de Klerk. Aspects of semidefinite programming, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[DPRT] E. de Klerk, J. Peng, C. Roos, and T. Terlaky. A scaled Gauss-Newton primal-dual search direction for semidefinite optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 11:870-888, 2001.

[DRT] E. de Klerk, C. Roos, and T. Terlaky. Initialization in semidefinite programming via a self-dual, skew-symmetric embedding. *OR Letters*, 20:213-221, 1997.

[Di] J. Dieudonne′. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960.

[Fa] L. Faybusovich. Semi-definite programming: a path-following algorithm for a linear-quadratic functional. *SIAM Journal on Optimization*, 6(4):1007-1024, 1996.

[Go] M.X. Goemans. Semidefinite programming in combinatorial optimization. *Math Programming*, 79(1-3, Ser. B):143-161, 1997. Lectures on mathematical programming (ismp97).

[GW] M.X. Goemans and D.P. Williamson. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of the ACM*, 42(6):1115-1145, 1995.

[GT] A. Goldman and A.W. Tucker. Theory of linear programming. In H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors, *Linear inequalities and related systems, Annals of Mathematical Studies*, No. 38, pages 53-97. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.

[Go] C.C. Gonzaga. Path following methods for linear programming. *SIAM Review*, 34:167-227, 1992.

[HDRT] B. He, E. der Klerk, C. Roos, and T. Terlaky. Method of approximate centers for semi-definite programming. *Optimization Methods and Software*, 7:291-309, 1997.

[HRVW] C. Helmberg, F. Rendl, R.J. Vanderbei, and H. Wolkowicz. An interior-point method for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 6:342-361, 1996.

[HJ] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.

[JRT] B. Jansen, C. Roos, and T. Terlaky. Interior point method: a decade after Karmarkar. A survey, with application to the smallest eigenvalue problem. *Statistica Neerlandica*, 50, 1995.

[Ji] J. Jiang. A long step primal-dual path following method for semidefinite programming. *OR Letters*, 23(1,2):53-62, 1998.

[Ka] N.K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373-395, 1984.

[Kh] L. Khachiyan. A polynomial-time algorithm for linear programming. *Soviet Mathematics Doklady*, 20:191-194, 1979.

[KSS] M. Kojima, M. Shida, and S. Shindoh. Local Convergence of Predictor-Corrector Infeasible-Interior-Point Algorithms for SDP's and SDLCP's. *Mathematical Programming*, 80:129-160, 1998.

[KSH] M. Kojima, S. Shindoh, and S. Hara. Interior point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices. *SIAM Journal on Optimization*, 7(1):88-125, 1997.

[KMRVW] S. Kruk, M. Muramatsu, F. Rendl, R.J. Vanderbei, and H. Wolkowicz. The Gauss-Newton direction in linear semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 15(1):1-27, 2001.

[LO] A.S. Lewis, and M.L. Overton. Eigenvalue optimization. *Acta Numerica*, 5:149-190, 1996.

[LSZ] Z.-Q. Luo, J.F. Sturm, and S. Zhang. Conic convex programming and self-dual embedding. *Optimization Methods and Software*, 14(3):196-218, 2000.

[LMS] I.J. Lustig, R.E. Marsten, and D.F. Shanno. Interior point methods: Computational state of the art. *ORSA Journal on Computing*, 6:1-15, 1994.

[MTY] S. Mizuno, M.J. Todd, and Y. Ye. On adaptive step primal-dual interior-point algorithms for linear programming. *Mathematics of Operations Research*, 18:964-981, 1993.

[Mo] R.D.C. Monteiro. Primal-dual path-following algorithms for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 7(3):663-678, 1997.

[NN] Yu. Nesterov and A.S. Nemirovski. *Interior point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 13, SIAM, Philadelphia, USA, 1994.

[NT] Yu. Nesterov and M.J. Todd. Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 22(1):1-42, 1997.

[Ol] J.A. Olkin. Using semi-definite programming for controller design in active noise control. *SIAG/OPT Views and News*, 8:1-5, Fall 1996.

[Pa] P.A. Parillo. *Structured Semidefinite Programs and Semi-algebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, 2000. Available at http://www.cds.caltech.edu/ ~ pablo/.

[Po] G. Po′lya. Überpositive Darstelung von Polynomen. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges.*Zürich, 73:141-145, 1928. (also Collected Papers, Vol. 2, 309-313, MIT Press, Cambridge, Mass., London 1974).

[PS] F.A. Potra and R. Sheng. A superlinearly convergent primal-dual infeasible-interior-point algorithm or semidefinite programming, *SIAM Journal on Optimization*, 8(4):1007-1028, 1998.

[RP] M.V. Ramana and P.M. Pardalos. Semidefinite programming. In T. Terlaky, editor, *Interior point methods of mathematical programming*, pages 369-398. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1996.

[RTV] C. Roos, T. Terlaky, and J.-Ph. Vial. *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An interior point approach*. John Wiley & Sons, New York, 1997.

[SSK] M. Shida, S. Shindoh, and M. Kojima. Existence of search directions in interior-point algorithms for the SDP and the monotone SDLCP. *SIAM Journal on Optimization*, 8(2):387-396, 1998.

[St] J.F. Sturm. Using seDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625-653, 1999.

[TTT] K.C. Toh, M.J. Todd, and R.H.Tütüncü. SDPT3 -- a Matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 11:545-581, 1999.

[Va] R.J. Vanderbei. Linear Programming, Kluwer's International Series, 2001.

[VB] L. Vandenberghe and S. Boyd. Semidefinite programming. *SIAM Review*, 38:49-95, 1996.

[WSV] H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of semidefinite programming*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2000.

[Wr] S. Wright. Primal-Dual Interior Point Methods, SIAM, Philadelphia, USA, 1996.

[XHY] X. Xu, P.-F. Hung, and Y. Ye. A simplified homogeneous and self-dual linear programming algorithm and its implementation. *Annals of OR*, 62:151-171, 1996.

[Ye] Y. Ye. *Interior point algorithm*. Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 1997.

[YTM] Y. Ye, M.J. Toddl and S. Mizuno. An $O(\sqrt{n}L)$ -iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm. *Mathematics of Operations Research*, 19:53-67, 1994.

[Zh] Y. Zhang. On extending some primal-dual interior point algorithms from linear programming to semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 8(2):365-386, 1998.