2 القانون الثاني The Second Law

دُرس في الوحدة الأول قانون حفظ الطاقة وتطبيقاته لأنظمة ثيرموديناميكية مختلفة، وأدخلت مفاهيم عدة كالحرارة، والشغل، ودرجة الحرارة، ولكن لم يُجب بطريقة علمية ودقيقة عن هذه المفاهيم.

ومثال ذلك: ما درجة الحرارة الحقيقية؟ وكيف تنتقل الحرارة من الجسم الساخن إلى البارد؟ ولماذا تحدث العمليات الثرموديناميكية في اتجاه واحد، ولا يمكن أن تعكس اتجاهها؟، وفي هذا الفصل سنحاول الإجابة عن هذه الأسئلة.

وباختصار، فإن الإجابة هي أن العمليات العكسية (irreversible) ليست عمليات حتمية، ولكنها العمليات التي غالبًا مسافة ما تحدث، وحيث إن تحرك الطاقة يكون عشوائيًّا، وهنا يتطلب وقتًا كافيًا لتتوزع الطاقة بانتظام ـين أجزاء النظام خلال ذلك التوزيع العشوائي. ولفهم ذلك، لا بد من دراسة كيف تختزن الطاقة في الجسم، وما لطرق التي تتوزع بها بين أجزاء النظام.

1.2 الأنظمة ثنائية الحالة Two – State Systems

ـدراسة هذه الأنظمة، دعنا نبدأ بتجربة بسيطة، وذلك بأخذ ثلاث قطع معدنية وقذفها بطريقة عشوائية، ثم نسجل على أي وجه تستقر كل قطعة، وليكن الوجه الأول «صورة» والوجه الثاني «كتابة»، ولنرمز إلى الصورة بحرف H وللكتابة بحرف T. وبعد قذف القطع ثماني مرات، كانت النتيجة على نحو ما هي عليه في الجدول 1.2 التي تمثل احتمالات

أن تستقر، إن احتمالية أن تكون أي قطعة معدنية على أحد الوجهين بعد قذفها على الصورة H أو الكتابة T، احتمالية متساوية قطع النقدية جميعها.

يتبين من الجدول 1.2 أن احتمالية الحصول على حالة على أن تكون القطع الثلاث في الحالة نفسها H أو T هي 1/8 ، وهناك 3 احتمالات للحالة 2H و1T؛ لذا فإن احتمالية الحصول على 2H و1T هي 3/8، وهي الاحتمالية نفسها للحصول على 2T و1H.

القطعة 1	القطعة 2	القطعة 3
H	H	H
H	H	T
H	T	H
T	H	H
H	T	T
T	H	T
T	T	H
T	T	T

الجدول 1.2: قائمة بالحالات المجهرية جميعها للقطع النقدية الثلاث، (H ترمز إلى الصورة، T إلى الكتابة).

تدعى التشكيلة الواحدة من هذه التشكيلات الثماني في الجدول 1.2 الحالة المجهرية (microstate)، وبوجه عام إذا أردنا معرفة الحالة المجهرية لنظام، فعلينا معرفة الحالة لكل جسيم (حالة كل قطعة نقدية في المثال). أما إذا حُددت الحالة بتعميم أكثر، كأن نقول: كم صورة وكتابة في جميع الحالات، فيدعى ذلك الحالة الجاهرية (macrostate). وإذا عرفت الحالة المجهرية (مثلًا H H T) فإننا نعرف أيضًا الحالة الجاهرية. وتخبرنا الحالة المجهرية (H H T) بأن هناك صورتين للقطع النقدية الثلاث في هذه التشكيلة، وكتابة واحدة، ولكن ذلك لا يخبرنا بحالة كل قطعة نقدية من القطع الثلاث. أي إن هناك ثلاث حالات مجهرية لحالة جاهرية واحدة. وهذا ما يدعى التعددية (multiplicity) ويرمز إليها بالرمز (Ω). ففي مثال القطع النقدية الثلاث، فإن التعددية (Ω) (لثلاث صور) = 1 و (Ω) (لصورتين) = 3 و (Ω) (لصورة واحدة) = 3، و (Ω) (صفر صورة) = 1. لاحظ أن التعددية للحالات الجاهرية الأربع هي: 1+3+3+1=8، وهي مجموع الحالات المجهرية، وتمثل Ω (لجميع الحالات المجهرية الاحتمالية لأي حالة جاهرية، وتكتب على الصورة:

$$\text{احتمالية عدد الصور } n = \frac{\Omega(n)}{\Omega(all)} \qquad (1.2)$$

فعلى سبيل المثال، إن احتمالية الحصول على صورتين هو $\frac{3}{8} = \frac{\Omega(2)}{\Omega(all)}$

ويجب أن نفترض أن القطع النقدية جميعها متماثلة، ولكل منها الاحتمالية نفسها. وإذا أُعيد المثال بمئة قطعة نقدية بدلاً من ثلاث قطع، فسيكون عدد الحالات المجهرية هو 2^{100} وهو عدد كبير جدًّا. وحيث إن كل قطعة لها حالتان محتملتان (H أو T)؛ لذا فإن عدد الحالات الجاهرية هو 101:0 صورة، 1 صورة، .... إلى 100 صورة. ولكن ماذا بشأن التعدديات لهذه الحالات الجاهرية؟

لنبدأ بالحالة الأولى صفر – حالة جاهرية للصورة، فإذا كان هناك صفر صورة، أي إن القطع جميعها تكون على الوجه الممثل للكتابة إلى أعلى، وفي هذه الحالة يمكن تحديد الحالة المجهرية بدقة، وهي: $\Omega(0) = 1$.

ولكن إذا كان هناك صورة واحدة، فإن القطعة المحتملة التي وجهها إلى الأعلى قد تكون القطعة الأولى أو الثانية ... أو المئة. أيْ إن هناك 100 حالة مجهرية: $\Omega(1) = 100$.

إذا تخيلت أن القطع المعدنية جميعها بدأت، بحيث كانت صور هذه القطع جميعها إلى أسفل، فإن Ω (1) تعني عدد الطرق التي يمكن أن تختار بها قطعة لتجعل صورتها إلى أعلى.

ولإيجاد Ω (2) ، تُمثل عدد الطرق التي يمكن بها اختيار قطعتين لتجعل الصورة لكل منهما إلى أعلى. أمامك 100 اختيار للقطعة الأولى و99 اختيارًا للقطعة الثانية، ولكن يمكن أيضًا أن يكون هناك اختيار بين القطعة الأولى والثانية؛ لذا فإن عدد الأزواج المميزة distinct pairs هو:

$$\Omega(2) = \frac{100 \times 99}{2} \tag{2.2}$$

وإذا أردت أن تحصل على 3 قطع، بحيث تكون الصورة إلى أعلى، فأمامك 100 اختيار للقطعة الأولى، 99 للقطعة الثانية، 98 للقطعة الثالثة، ولهذه القطع الثلاث هناك 3 اختيارات للقطعة الأولى، واختياران للثانية؛ لذا فإن:

$$\Omega(3) = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2} \tag{3.2}$$

لإيجاد Ω (n) ، نكتب عوامل n بدءًا من 100 إلى $(100 - n+1)$ في المقام، ونقسم على عوامل n بدءًا من n إلى 1، أيْ:

$$\Omega\left(n\right) = \frac{100 \times 99...(100-n+1)}{n...2 \times 1} \tag{4.2}$$

ويمثل البسط في المعادلة 4.2 مضروب n (n!)، ويمكن كتابة المضروب على النحو الآتي:

$$\Omega\left(n\right) = \frac{100!}{n!(100-n)!} \equiv \binom{100}{n} \tag{5.2}$$

ويمثل الحد الأخير كتابة مختصرة لـ Ω (n) ، ويقال: (100 اختيار لـ n)، أيْ عدد الطرق المختلفة لاختيار n من 100. وإذا كان هناك N قطعة معدنية، فإن التعددية للحالة الجاهرية لـ n صورة هي:

$$\Omega(N,n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n} \tag{6.2}$$

أيْ عدد الطرق لاختيار n من العدد الكلي N.

السؤال 1.2: افترض أن عدد القطع النقدية أربع:

(أ) اكتب قائمة للاحتمالات جميعها كالجدول 1.2.
(ب) اكتب قائمة بالحالات الجاهرية المختلفة جميعها واحتماليات حدوثها.
(ج) ما احتمالية الحصول على التشكيلة:
H T H H T T H T H H H T H H H H T H T ?
(د) ما احتمالية الحصول على 12 كتابة و8 صور؟

السؤال 3.2: افترض أن عدد القطع النقدية50 قطعة:

(أ) ما العدد المتوقع للحالات المجهرية؟
(ب) ما عدد الطرق للحصول على 25 كتابة و25 صورة؟
(ج) ما الاحتمالية للحصول على 25 كتابة و25 صورة؟
(د) ما الاحتمالية للحصول على 30 كتابة و20 صورة؟
(هـ) ما الاحتمالية للحصول على 40 كتابة و10 صور؟
(و) ما الاحتمالية للحصول على 50 كتابة وصفر صورة؟
(ز) ارسم شكلًا يبين احتمالية الحصول على n صورة بوصفها دالة في n.

السؤال 4.2: احسب العدد المحتمل لحدوث التسلسل الملكي royal flush في لعبة الورق، وجود خمس أوراق لعب متسلسلة من بين 52 ورقة (التسلسل هو أس، ملك، ملكة، ولد، 10)، ما احتمال حدوث ذلك بدءًا من المرة الأولى؟

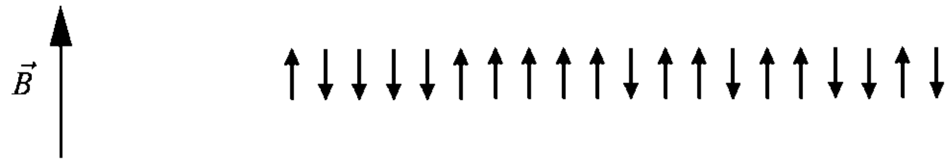
الباراماجنت ثنائي الحالة The Two – State Paramagnet

هنـاك أنظمة فيزيائية مختلفة لها تشـكيلات مشـابهة لتشـكيلات القطـع النقدية، ومن أهـم هذه الأنظمة «البارامغنت ثنائي الحالة» للخاصية الكهربائية الطبيعية للإلكترونات والنوى. تستجيب المواد جميعها بطريقة ما مع المجال المغناطيسـي. ويمكن تمثيل المواد البارامغناطيسية بأنها تتكون من جسيمات مشابهة لبوصلة صغيرة جدًا، تتجه في اتجاه المجال المغناطيسي الخارجي. وأما المواد الفرومغناطيسية (ferromagnet) فهي المواد التي تمتلك خواص مغناطيسية دون وجود مجال مغناطيسي خارجي.

وستُسمّى خواص الجسيمات المغناطيسية ثنائيات الأقطاب (Dipoles)، حيث يمتلك كل جسيم متجه عزم ثنائي القطب. ويمكن أن يكون ثنائي القطب إلكترونًا، أو مجموعة إلكترونات، أو نواة ذرة. ولأي ثنائي قطب مجهري، فإن ميكانيكا الكم تسمح لمركبة متجه عزم ثنائي القطب حول أي محور بأن تكون له قيمة محدد. وفي أبسط الحالات هناك قيمتان مسموح بهما: الأولى سالبة والثانية موجبة، وهذا سبب تسمية البارامجنت ثنائي الحالة. حيث إن الجسيم الذي مُثّل ببوصلة صغيرة جدًا يمكن أن يتجه موازيًا للمجال المغناطيسي الخارجي أو معاكسًا له.

ويمثل ذلك بسهم يشير إلى أعلى أو إلى أسفل على نحو ما هو موضح في الشكل1.2 [16].

(16) يتناسب متجه عزم ثنائي القطب مع متجه الزخم الزاوي له، وتتم ثنائية الحالة البسيطة للجسيمات عندما يكون $spin = ½$ لمزيد من الشرح التفصيلي ارجع إلى ميكانيكا الكم (انظر الملحق A).



الشكل 1.2: تمثيل للباراماجنت ثنائي الحالة، حيث إن كل ثنائي قطب، يمكن أن يكون اتجاهه موازيًا أو معاكسًا لاتجاه المجال المغناطيسي الخارجي.

لنرمز لثنائي القطب المتجه إلى أعلى $N_\uparrow$ وإلى الأسفل $N_\downarrow$، فيكون العدد الكلي لثنائيات القطب في مادة ما هو $N_\uparrow + N_\downarrow$، حيث إن العدد الكلي N يمثل رقمًا ثابتًا لنظام محدد. ولهذا النظام حالة جاهرية واحدة لكل قيمة ممكنة لـ $N_\uparrow$ من صفر إلى N؛ لذا فإن التعددية لأي حالة جاهرية يُعبّر عنها بالصيغة نفسها في مثال القطع النقدية:

$$\Omega(N_\uparrow) = \binom{N}{N_\uparrow} = \left(\frac{N!}{N_\uparrow!\,N_\downarrow!}\right) \qquad (7.2)$$

وتتجه ثنائيات القطب في اتجاه المجال المغناطيسي الخارجي نتيجة لعزم الدوران (Torque) الناتج عن المجال المغناطيسي على ثنائيات القطب. فإذا كان اتجاه المجال المغناطيسي إلى الأعلى، فإن الطاقة التي تمتلكها ثنائيات القطب المتجه إلى الأعلى تكون أقل من تلك التي تكون متجهة إلى الأسفل.

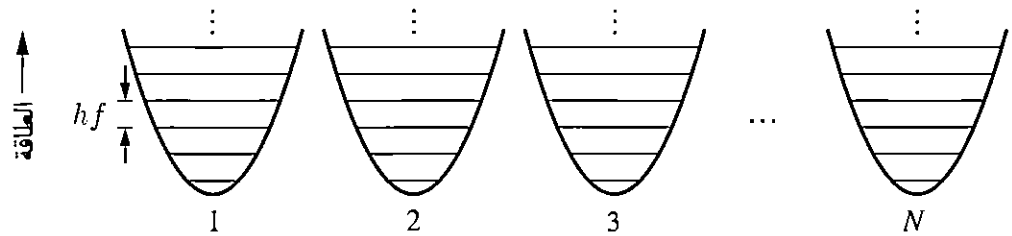
ويمكن حساب الطاقة الكلية للنظام (بإهمال أي تفاعلات بين ثنائيات القطب) بمعرفة العدد الكلي لثنائيات القطب المتجهة إلى أعلى والمتجهة إلى الأسفل التي تحدد حالة جاهرية واحدة للنظام.

2.2 نموذج أينشتاين للجامد The Einstein Model for a Solid

سيُدرس في هذا الجزء نظام فيزيائي حقيقي يمثل صعوبة أكثر من الأنظمة التي درست سابقًا. ولنفترض أن هناك مجموعة من الأنظمة المجهرية يختزن كل منها عددًا من وحدات الطاقة لها الحجم نفسه. وتوجد وحدات الطاقة المتساوية في متذبذبات توافقية (Harmonic oscillators) (ميكانيكا الكم) لها طاقة وضع تساوي $\frac{1}{2}k_s x^2$، حيث إن k_s ثابت الزنبرك، وحجم وحدة الطاقة = hf [17].

حيث إن h هو ثابت بلانك = (6.63×10^{-34} J.s)، f التردد الطبيعي للمتذبذب التوافقي $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_s}{m}}$
يمثل الشكل 2.2 تمثيلًا للمتذبذبات التوافقية.

(17) انظر الملحق A: إن أقل طاقة ممكنة للمتذبذب التوافقي الكمي هي $1/2\ hf$ ، وليست صفرًا، ولكن «نقطة الصفر» للطاقة لا يكون لها أثر في التفاعلات الحرارية. والحالات المثارة للطاقة تأخذ قيمًا $3/2\ hf,\ 5/2\ hf,$ .... وهكذا. إضافة إلى وحدة طاقة إضافية مقدارها hf. ولتحقيق الهدف في هذا الجزء، فإن الطاقة تقاس بالنسبة على الحالة الدنيا ground state، لذلك فإن الطاقات المسموح بها هي $0,\ hf,\ 2hf, \ldots\ etc$ ، ويمكن أن تكتب وحدة الطاقة للمتذبذب التوافقي، $\hbar\omega$ ، حيث إن $\omega = 2\pi f$ و $\hbar = h/2\pi$، والفرق بين $\hbar\omega$ و hf هو أين تضع المعامل 2π.



الشــكل 2.2: لأي نظام في ميكانيكا الكم له طاقة وضع تربيعية تكون المســافة بين مستويات الطاقة متساوية، وتساوي hf، حيث إن f هو التردد الطبيعي للمتذبذب التوافقي.

ومن أمثلة التذبذبات الكمية التوافقية، الحركة الاهتزازية للجزيئات ثنائية الذرة ومتعددة الذرات. والمثال الأشــمل هو المتعلق باهتزازات الذرات في الجوامد (الشــكل 6.1). حيث إن كل ذرة من ذرات الجامد يكون ترددهــا فــي الأبعاد الثلاثة (x, y, z)، فإذا كان عدد المتذبذبــات التوافقية N، يعني ذلك أن عدد ذرات الجامد $N/3$. اقترح أينشــتاين عام 1907 نموذجًا للمتذبذبات التوافقية المتماثلة في الأجسام الجامدة، عرف بنموذج **أينشتاين للجامد**.

ولنبدأ بنموذج يتكون من ثلاثة متذبذبات توافقية $N = 3$، حيث عدد الحالات المجهرية المحتملة لهذا النظام مبينة في الجدول 2.2.

ويمثل كل سطر أفقي حالة جاهرية لحالات مجهرية مختلفة. وهناك حالة واحدة تكون فيها قيمة الطاقة الداخليــة تســاوي صفرًا، وثلاث حالات مجهريــة تكون قيمة الطاقة «وحدة واحدة من الطاقة» وســت حالات لوحدتين من الطاقة، وعشر حالات لثلاث وحدات من الطاقة، وهكذا....

$$\Omega(0) = 1, \quad \Omega(1) = 3, \quad \Omega(2) = 6, \quad \Omega(3) = 10 \tag{8.2}$$

المتذبذب:	#1	#2	#3	المتذبذب:	#1	#2	#3
الطاقة:	0	0	0	الطاقة:	3	0	0
	1	0	0		0	3	0
	0	1	0		0	0	3
	0	0	1		2	1	0
					2	0	1
	2	0	0		1	2	0
	0	2	0		0	2	1
	0	0	2		1	0	2
	1	1	0		0	1	2
	1	0	1		1	1	1
	0	1	1				

الجدول 2.2: الحالات الجاهرية لنموذج أينشتاين للجوامد المكون من ثلاثة متذبذبات توافقية، 0، 1، 2 وثلاث وحدات طاقة.

والصيغة العامة للتعددية لجامد أينشتاين الذي يحتوي على N متذبذب توافقي و2 وحدة طاقة هي:

$$\Omega(N,q)=\binom{q+N-1}{q}=\frac{(q+N-1)!}{q!(N-1)!} \tag{9.2}$$

تحقق من المعادلة (9.2) بالمثال السابق $N = 3$.

ولإثبات هذه الصيغة، يمكن تمثيل الحالة المجهرية لجامد أينشتاين هندسيًّا، حيث تمثل الدائرة المغلقة وحدة طاقة، والخط العمودي حاجزًا بين المتذبذب التوافقي والمتذبذب التوافقي المجاور له، ولجامدٍ مكونٍ من أربعة متذبذبات توافقية، فإن الترتيب هو:

● | ● ● ● | | ● ● ● ●

يمتلك في هذا التمثيل، المتذبذب الأول وحدة طاقة واحدة، والثاني 3 وحدات طاقة، في حين لا يمتلك المتذبذب الثالث أي وحدة طاقة، وأما المتذبذب الرابع، فيمتلك 4 وحدات طاقة. والشكل الهندسي المكون من الدوائر والخطوط العمودية يمثل حالة جاهرية واحدة، ويكون عدد الدوائر مساويًا لـ q، وعدد الخطوط العمودية مساويًا $N-1$، ويكون عدد الترتيبات الممكنة هي عدد الطرق التي تختارها لـ 2 لتمثلها بدوال، وهي $\binom{q+N-1}{q}$.

السؤال 5.2: لجامد أينشتاين المكون من قيم q. N المبينة لاحقًا، جدول الحالات المجهرية المحتملة، أوجد عددها، وتحقق من ذلك بتطبيق المعادلة 9.2.

(أ) $N = 3$ ، $q = 4$
(ب) $N = 3$ ، $q = 5$
(ج) $N = 3$ ، $q = 6$
(د) $N = 4$ ، $q = 2$
(هـ) $N = 4$ ، $q = 3$
(و) $N = 1$ ، $q =$ أي رقم
(ز) $N =$ أي رقم، $q = 1$

السؤال 6.2: احسب التعددية لجامد أينشتاين إذا كانت $N = 30$، و$q = 30$ (لا تحاول جدولة الحالات المجهرية).

السؤال 7.2: إذا كان جامد أينشتاين مكونًا من أربعة متذبذبات توافقية، ووحدة طاقة $q = 2$ ، $N = 4$، فمثل كل حالة مجهرية ممكنة على صورة سلسلة من الخطوط العمودية والدوائر.

هل تعلم، أن أكثر شيء حدث معي، وأدهشني هذه الليلة عندما أتيت الى هنا في طريقي إلى محاضرتي، حيث كان هناك عدد من السيارات في موقف السيارات، ولن تصدق ما حدث معي، حيث شاهدت سيارة تحمل الرقم *ARW 357*! فهل يمكن تخيل ذلك؟ من ملايين اللوحات في الولايات المتحدة الأمريكية، لقد شاهدت هذه اللوحة، عجبًا؟

Richard Feynman، quoted by David Goldstein Physics Today 42، 73 (February 1989)

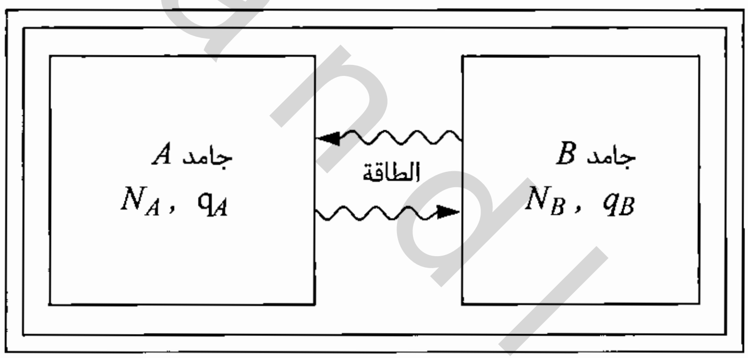
3.2 الأنظمة المتفاعلة Interacting Systems

لفهم الانتقال الحراري والعملية غير العكسية، سنفترض أن هناك نظامين يتبادلان الطاقة بينهما هما: الجامد A والجامد B (الشكل 3.2) [18] ويرتبط الجسمان ببعضهما ارتباطًا ضعيفًا، أيْ إن تبادل الطاقة بينهما أقل كثيرًا من انتقال الطاقة بين ذرات كلٍّ منهما، حيث يتم تبادل الطاقة U_A وU_B بين الجسمين بصورة ضعيفة، ويحتاج تغيير قيم الطاقة U_A، وU_B إلى فترة زمنية طويلة. والحالة الجاهرية هنا تمثل حالة الجسمين، ولذا سنجد التعددية لكل القيم المسموح بها لـ U_A وU_B، بحساب جميع الحالات المجهرية المحتملة عند ثبوت الطاقة الكلية $U_{Total}= U_A + U_B$. ويحتوي كل جسم على ثلاثة متذبذبات توافقية، ومجموع طاقة الجسمين تساوي 6 وحدات طاقة.

$$N_A = N_B = 3 \; ; \qquad q_{total} = q_A + q_B = 6 \qquad (10.2)$$

(q ترمز إلى عدد وحدات الطاقة، والقيمة الحقيقية للطاقة U هي $U = qhf$).

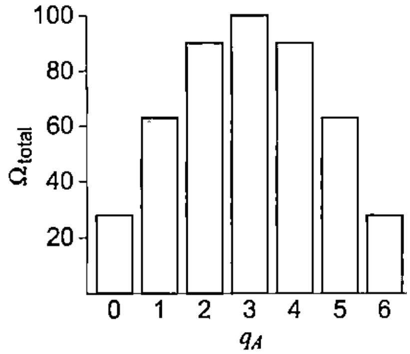
ولما كان النظامان غير معتمدين ببعضهما، فإن التعددية الكلية لأي حالة جاهرية هي ناتج التعدديات جميعها. فللجامد A هناك Ω_{total} حالة مجهرية، Ω_B حالة للجامد B. وعند تمثيل مجموع التعدديات بمخطط أعمدة (الشكل 4.2) وعلى مدى فترة زمنية طويلة، فإن عدد الحالات المجهرية للنظام يساوي 462 (مجموع الأعداد في العمود الأخير من الجدول في الشكل 4.2).



الشكل 3.2: جامدا أينشتاين معزولان عن المحيط، ويتبادلان الطاقة فيما بينهما.

(18) اعتمد هذا الجزء والأجزاء 3.1 و 3.3 على بحث منشور الـ T.A Moore and D.V. Schroeder , American Journal of Physics , 65 , 26- 36 (1997).

q_A	Ω_A	q_B	Ω_B	$\Omega_{\text{total}} = \Omega_A \Omega_B$
0	1	6	28	28
1	3	5	21	63
2	6	4	15	90
3	10	3	10	100
4	15	2	6	90
5	21	1	3	63
6	28	0	1	28
				$462 = \binom{6+6-1}{6}$



الشكل 4.2: الحالات الجاهرية والتعددية لنظام يتكون من جامدي أينشتاين يحتوي كل منهما على ثلاثة متذبذبات، ويشتركان في وحدات طاقة.

والفرضية المهمة في الميكانيكا الإحصائية التي تدعى الفرضية الأساسية للميكانيكا الإحصائية تنص على ما يأتي:

«تنتقل الطاقة بين أجزاء النظام بشكل عشوائي في مدى زمني طويل[19]، بحيث تكون احتمالية الحالات الجاهرية جميعها متساوية. وإذا نظر إلى النظام في أي لحظة، فإن النظام يمكن أن يكون في أي حالة من 462 حالة جاهرية. وفي هذه الحالة، فليس للنظام حالة مجهرية مفضلة ومحددة[20]».

وإنه ليس من الواضح أيضًا أن جميع الحالات المحتملة للحالات المجهرية يمكن الوصول إليها في زمن معقول. والنظام المكون من جامدين «جامد أينشتاين»، لكن أن نستنتج على الرغم من أن جميع الحالات الجاهرية 462 تكون احتمالية وجود أي منها متساوية، إن بعض الحالات لها احتمالية أكبر من الحالات الأخرى.

إن احتمالية وجود النظام في الحالة الجاهرية الرابعة (ثلاث وحدات طاقة في كل جامد) هي 100/462. في حين أن احتمالية وجوده في الحالة الجاهرية الأولى التي تكون فيها جميع وحدات الطاقة في الجسم B تساوي 28/462، وبعد مرور وقت كافٍ، فهناك احتمالية بإعادة توزيع الطاقة بين الجسمين.

يجب التنويه هنا بأن عملية حساب التعددية لأنظمة تحتوي على عدد كبير من المتذبذبات التوافقية ووحدات الطاقة ليست ممكنة دون استخدام برامج الحاسب الآلي. والشكل 5.2 يبين النتائج التي حُسبت للتعددية لنظام يتبع نموذج أينشتاين للجامد، ويتكون من جسمين A وB، حيث إن:

$$N_A = 300, \quad N_B = 200, \quad q_{total} = 100 \qquad (11.2)$$

نلاحظ من الجدول في الشكل 5.2 أن هناك 101 حالة جاهرية، وتكون التعددية 3×10^{81} في حالة الجامد B

(19) يحتاج تبادل الطاقة إلى أن يكون هناك نوع ما من التفاعل بين الجزيئات. وهذا التفاعل بين المتذبذبات يمكن أن يؤثر في مستويات الطاقة لأي متذبذب. يمكن أن يهدم هذا فرضية أن مستويات الطاقة تفصلها مسافات متساوية. لذا يفترض أن التفاعلات تؤثر تأثيرًا قويًا في تبادل الطاقة، ويكون تأثيرها ضعيفًا في مستويات الطاقة نفسها. ولا يعني ذلك فرضية أساسية في الميكانيكا الإحصائية، ولكن يجعل من الحسابات عملية أسهل.

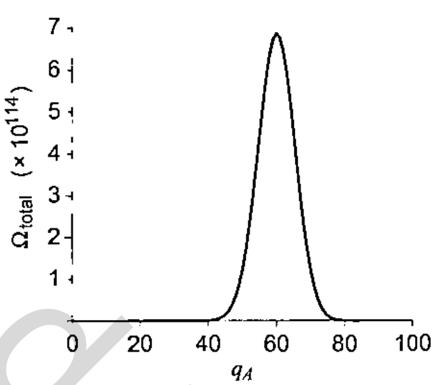
(20) من المحتمل وجود عدد كبير من حالات الطاقة ربما لها طاقة كلية غير صحيحة، وهناك أيضًا مجموعة من حالات الطاقة متاحة، ولكنها تحتاج إلى وقت طويل. إن المفهوم "متاحة" يعتمد على التدريج الزمني الذي يؤخذ في الحسبان، وفي حالة جامد أينشتاين يفترض أن جميع الحالات المجهرية المعطاة متاحة.

الذي يحتوي على جميعها وحدات الطاقة. وإن الحالة الجاهرية المرجحة، عندما تكون $q_A=60$ حيث تكون التعددية عندها تساوي 7×10^{114} . والمهم هنا ليس هذه الأعداد الكبيرة جدًا، ولكن النسبة بين الحالة الجاهرية المرجحة والحالة الجاهرية الأخيرة هي 10^{33}.

وسننظر الآن إلى هذا المثال بشيء من التفصيل. عدد الحالات المجهرية الحالات الجاهرية جميعها لهذا النظام هو $10^{15} \times 9$. واحتمالية وجود النظام في الحالة الجاهرية المرجحة لا يمثل سوى 7%. وهناك حالات جاهرية لوحدات طاقة q_A تكون أكبر أو أصغر من الحالة الجاهرية المرجحة، ولها احتمالية أكبر. وكلما ابتعدت q_A عن (60) بأي اتجاه أكثر أو أقل انخفضت الاحتمالية انخفاضًا بشكل حادّ.

واحتمالية وجود q_A أقل من 30 أو أكثر من 90، تكون أقل من 1 في المليون. واحتمالية وجود $q_A < 10$ أقل من 10^{-20}. وإذا علمنا أن عمر الكون أقل من 10^{18} ثانية، فإننا نحتاج لاختبار هذا النظام إلى مئة مرة في الثانية على مدى عمر الكون، قبل أن نصل الفرصة التي نجد بها الحالة الجاهرية $q_A < 10$. ولا يكفي هذا الزمن لإيجاد الحالة الجاهرية عند حالة $q_A = 0$.

q_A	Ω_A	q_B	Ω_B	Ω_{total}
0	1	100	2.8×10^{81}	2.8×10^{81}
1	300	99	9.3×10^{80}	2.8×10^{83}
2	45150	98	3.1×10^{80}	1.4×10^{85}
3	4545100	97	1.0×10^{80}	4.6×10^{86}
4	3.4×10^{8}	96	3.3×10^{79}	1.1×10^{88}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
59	2.2×10^{68}	41	3.1×10^{46}	6.8×10^{114}
60	1.3×10^{69}	40	5.3×10^{45}	6.9×10^{114}
61	7.7×10^{69}	39	8.8×10^{44}	6.8×10^{114}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	1.7×10^{96}	0	1	1.7×10^{96}
				9.3×10^{115}



الشكل 5.2: الحالات الجاهرية والتعددية لنظام يتكون من جامدي أينشتاين، يحتوي الجامد الأول على 300 متذبذب توافقي، ويحتوي الجامد الثاني على 200 متذبذب توافقي، ويشتركان في 100 وحدة طاقة.

لنفترض أن النظام في البداية كان في حالة q_A أقل كثيرًا من 60، أي إن الطاقة كلها تخرج من الجامد B. وإذا ما أعطي النظام الوقت الكافي، فإن الطاقة ستعيد ترتيب نفسها، وتنتقل انتقالًا طبيعيًّا بعملية غير عكسية من الجسم B إلى الجسم A ولكنها لا يمكن أن تنتقل طبيعيًّا من الجسم A إلى الجسم B (باستثناء بعض التغيرات البسيطة حول 60). لذا يمكن القول: إن الحرارة هي ظاهرة احتمالية، وليست يقينًا تامًّا.

يتوقف الانتقال الطبيعي للحرارة عندما تقترب اقترابًا كبيرًا من الحالة الجاهرية المرجحة التي تمتلك أكبر تعددية. ويمكن أن تمثل زيادة التعددية إحدى صيغ القانون الثاني في الثرموديناميكا، ويجب أن تلاحظ هنا أن القانون الثاني ليس قانونًا أساسيًّا، بل صيغة قوية للاحتمالية. ولكي تكون هذه الصيغة أقوى ولها واقعية أكثر يجب أن تكون الأنظمة قيد الدراسة لا تحتوي فقط كمثالنا على 100 متذبذب توافقي، بل على 10^{23}

متذبذب توافقي، و10^{23} وحدة طاقة. لذا سنستخدم طرقًا تقريبية باستخدام التحليل الرياضي، في الجزء الآتي من هذا الفصل.

السؤال 8.2: نظام يتكون من جامدين A، B يرتبطان ببعضهما ارتباطًا ضعيفًا، يحتوي كل منهما على 10 متذبذبات توافقية، ويشتركان في 20 وحدة طاقة.

(أ) ما عدد الحالات الجاهرية الموجودة في هذا النظام؟

(ب) ما عدد الحالات المجهرية المختلفة الموجودة في هذا النظام؟

(ج) افترض أن النظام في حالة اتزان حراري، فما احتمالية وجود وحدات الطاقة كلها في الجامد A؟

(د) ما الاحتمالية لوجود نصف وحدات الطاقة في الجامد A؟

(هـ) تحت أي ظروف يمتلك هذا النظام الخاصية غير العكسية؟

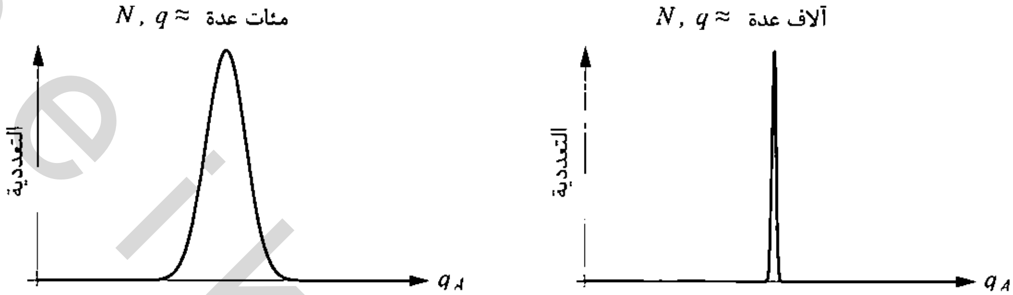
السؤال 9.2: استخدم الحاسب الآلي لإيجاد جدول مشابه للجدول في الشكل 4.2 لجامدين يحتوي كل منهما على ثلاثة متذبذبات توافقية، ومجموع وحدات طاقة تساوي ست وحدات، ثم احصل على جدول آخر إذا كان هناك جامدان يحتوي الأول على ستة متذبذبات توافقية والجامد الآخر على أربعة متذبذبات توافقية، ومجموع وحدات الطاقة ست وحدات، مع افتراض أن جميع الحالات المجهرية لها الاحتمالية نفسها، وما الحالة الجاهرية المرجحة؟ وما احتماليتها؟ وما الحالة الجاهرية الأقل احتمالاً؟

السؤال 10.2: استخدم الحاسب الآلي لرسم منحنى، وإيجاد جدول مشابه للشكل 5.2 إذا احتوى الجامد الأول 200 متذبذب توافقي، والثاني 100 متذبذب توافقي، ما الحالة الجاهرية المرجحة، وما احتماليتها؟ وما الحالة الجاهرية الأقل احتمالاً؟ وما احتماليتها؟

السؤال 11.2: استخدم الحاسب الآلي لرسم منحنى وإيجاد جدول مشابه لما ورد في هذا الدرس للحالتين البارامغناطيسيتين، كل واحدة منها تحتوي 100 قطب مغناطيسي أساسي، مفترضًا أن وحدة طاقة تلزم لتدوير المغناطيس من أن يكون رأسيًا إلى أعلى "موازٍ للمجال الخارجي" إلى وضعية رأسيًا إلى الأسفل (معاكسًا للاتجاه)، افترض أيضًا أن عدد وحدات الطاقة التي ترتبط بالحالة للأقطاب المغناطيسية التي تشير إلى أعلى = 80، وهذه الطاقة يمكن أن تكون مشتركة بين المادتين البارامغناطيسيتين. فما الحالة الجاهرية المرجحة، وما احتماليتها؟ وما الحالة الجاهرية الأقل احتمالاً؟ وما احتماليتها؟

4.2 الأنظمة الكبيرة Large Systems

وجدنا في الجزء السابق لنظام يتكون من جامدي أينشتاين يحتوي كل منهما على مئة متذبذب توافقي، أن هناك حالات جاهرية محددة لها احتمالية حدوث أكبر من غيرها، وأن هناك 20% تقريبًا من الحالات الجاهريه التي يمكن أن تحدث. وفي هذا الجزء سندرس أنظمة واقعية تحتوي على 10^{20} أو أكثر متذبذب توافقي. وفي نهاية الجزء سنجد أن من بين جميع الحالات الجاهرية، هناك عدد محدود له احتمالية ممكنة، بحيث يكون المنحنى الممثل للتعددية كدالة في وحدات الطاقة q_A حادًّا. (الشكل 6.2)



الشكل 6.2: اليسار: الشكل المتوقع لنظامين متفاعلين يحتويان على مئـات عدة مـن المتذبذبات التوافقية، (اليمين) آلاف عدة من المتذبذبات التوافقية. وكلما زاد عدد المتذبذبات ازدادت حدة المنحنى، ولنظام يحتوي على $N \approx 10^{20} \approx q = 10^{20}$ يكون حادًّا بصورة كبيرة جدًّا، حيث يصعب رسمه.

الأعداد الكبيرة جدًّا Very Large Numbers

تستخدم في الميكانيكا الإحصائية ثلاثة أنواع من الأعداد، هي الأعداد الصغيرة: مثل 6، 23، 42، ...... ويكون التعامل مع هذه الأعداد سهلًا.

الأعداد الكبيرة: وهي أعداد أكبر كثيرًا كبير من الأعداد الصغيرة، وأهم الأعداد الكبيرة هو عدد أفوجادرو 10^{23}، وأهم خواصها أنها لا تتأثر قيمتها بإضافة أعداد صغيرة إليها، مثلًا:

$$10^{23} + 23 = 10^{23} \tag{12.2}$$

الأعداد الكبيرة جدًّا: وهي أعداد أكبر من الأعداد الكبيرة، ولها خاصية أنها يمكن أن تضرب في أعداد كبيرة دون تغير في قيمها (ومثال ذلك $10^{10^{23}}$) [21]

$$10^{10^{23}} \times 10^{23} = 10^{\left(10^{23}+23\right)} = 10^{10^{23}} \tag{13.2}$$

(21) لاحظ أن x^{y^z} تعني $x^{(y^z)}$ وليس $(x^y)^z$.

وعادة ما يستخدم اللوغاريتم للتعامل مع الأعداد الكبيرة جدًا، حيث تحول هذه العملية الأعداد الكبيرة حدًا إلى أعداد يمكن التعامل معها بطريقة حسابية مباشرة.

السؤال 12.2: تعرف دالة اللوغاريتم الطبيعي بأنها: $x = e^{\ln x}$ لأي عدد موجب من x

(أ) ارسم منحنى دالة اللوغاريتم الطبيعي.

(ب) أثبت أن:

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

و $$\ln a^b = b \ln a$$

(ج) أثبت أن: $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

(د) اشتق التقريب: $\ln(1+x) \approx x$

يكون التقريب صحيحًا إذا كانت $|x| << 1$ ، استخدم الحاسبة للتحقق من صحة هذا التقريب إذا كانت $x = 0.1$ و $x = 0.01$

السؤال 13.2:

(أ) بسّط التعبير $e^{a \ln b}$ (اكتبه بطريقة لا يحتوي على لوغاريتم)

(ب) افترض أن $b << a$ ، وأثبت أن:

$$\ln(a+b) \approx (\ln a) + (b/a)$$

(يمكن استخدام التقريب في فرع د للسؤال السابق).

السؤال 14.2: اكتب $e^{10^{23}}$، على صورة 10^x، لبعض قيم x

تقريب سترلنج Stirling's Approximation

يستخدم هذا التقريب لإيجاد قيم المضروبات للأعداد الكبيرة، ويكتب على الصورة الآتية:

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N} \tag{14.2}$$

وهذا التقريب صحيح إذا كانت $N >> 1$.

لمضروب $N!$ هو حاصل ضرب العوامل من N إلى 1. وبصورة تقريبية، فإن $N! \approx N^N$،
وفي المعدل، فإن كل عامل يكون أصغر عمليًا بمقدار واحد، أيْ إن:

$$N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N = N^N e^{-N} \tag{15.2}$$

يضاف إلى ذلك عامل تصحيح يساوي تقريبًا $\sqrt{2\pi N}$. ولكن إذا كانت N عددًا كبيرًا، فإن $N!$ عدد كبير جدًّا، وعندئذٍ يمكن حذف عامل التصحيح من المعادلة 15.2.
ويمكنٍ استخدام اللوغاريتمات في كتابة $N!$، حيث تصبح المعادلة 15.2.

$$\ln N! \approx N \ln N - N \tag{16.2}$$

N	$N!$	$N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$	الخطأ	$\ln N!$	$N \ln N - N$	الخطأ
1	1	.992	7.7%	0	-1	∞
10	3628800	3598696	.83%	15.1	13.0	13.8%
100	9×10^{157}	9×10^{157}	.083%	364	360	.89%

الجدول 3.2: مقارنة بين تقريب سترلنج (المعادلات 14.2 و 16.2) للقيم N= 1، 10، 100

السؤال 15.2: استخدم الحاسبة للتحقق في صحة تقريب سترلنج إذا كانت $N = 50$، ثم تحقق من دقة المعادلة 16.2 لـ $N!$.

السؤال 16.2: افترض أنك قذفت عشوائيًا 1000 قطعة نقود معدنية.

(أ) ما الاحتمالية للحصول على500 كتابة و500 صورة؟

اكتب أولًا صيغة تمثل إمكانية أن تكون القطع قد استقرت على وجه «الصورة أو الكتابة»، ثم أوجد التعددية للحالات الجاهرية لـ 500 – 500 باستخدام تقريب سترلنج، واستخدم الحاسبة لضرب الأرقام في هذا السؤال في 10، ثم 100، ثم 1000 حتى تصل إلى نتيجة لا تستطيع بها استخدام الحاسبة، وتحتاج إلى استخدام تقريب سترلنج.

(ب) ما احتمالية الحصول على 600 كتابة و400 صورة؟

التعددية لجامد أينشتاين الكبير Multiplicity of a Large Einstein Solid

سنستخدم تقريب سترلنج لتقدير التعددية لجامد يحتوي على عدد كبير من المتذبذبات التوافقية ووحدات الطاقة، بافتراض أن عدد وحدات الطاقة أكبر بكثير من عدد المتذبذبات التوافقية $q >> N$ (حد درجة الحرارة المرتفعة).
سنبدأ بالصيغة:

$$\Omega(N,q) = \binom{q+N-1}{q} = \frac{(q+N-1)!}{q!\,(N-1)!} \approx \frac{(q+N)!}{q!\,N!} \tag{17.2}$$

لقد تم تقريب الحد الأخير من المعادلة 17.2؛ لأن النسبة بين $N!$ إلى $(N-1)!$ هو فقط العامل الكبير (N)، وهو عدد كبير جدًّا مثل التعددية (Ω). وبأخذ اللوغاريتم وتطبيق تقريب سترلنج من المعادلة 16.2 نجد ما يأتي:

$$\begin{aligned} \ln \Omega &= \ln \left(\frac{(q+N)!}{q!\,N!} \right) \\ &= \ln(q+N)! - \ln q! - \ln N! \\ &\approx (q+N)\ln(q+N) - (q+N) - q \ln q + q - N \ln N + N \\ &= (q+N) \ln (q+N) - q \ln q - N \ln N \end{aligned} \tag{18.2}$$

افترض أن $N << q$ (فقط q ، N أعداد كبيرة). ويمكن إجراء العمليات الجبرية على الحد $\ln (q+N)$ على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} \ln (q+N) &= \ln [q\,(1+\frac{N}{q})] \\ &= \ln q + \ln \left(1+\frac{N}{q}\right) \\ &\approx \ln q + \frac{N}{q} \end{aligned} \tag{19.2}$$

الخطوة الأخيرة جاءت من مد تايلور $\ln(1 \approx x) \approx x$ كانت $|x| << 1$.

عوّض نتيجة المعادلة 19.2 في المعادلة 18.2 مع حذف الحدود $q \ln q$ نحصل على:

$$\ln \Omega \approx N \ln \frac{q}{N} + N + \frac{N^2}{N} \tag{20.2}$$

حيث تكون قيمة الحد الأخير مهملة بالنسبة إلى الحدود الأخرى؛ لأن $N << q$ ، وبأخذ الأس للحد الأول والثاني نحصل على:

$$\Omega(N,q) \approx e^{N \ln(q/N)} e^{N} = \left(\frac{eq}{N}\right)^{N} \quad \text{عندما تكون } N >> q \tag{21.2}$$

ولما كان الأس يمثل عددًا كبيرًا؛ لذا فإن Ω هي عدد كبير أيضًا، وإذا زيدت N أو q بصورة بسيطة، فإن Ω تزداد بصورة كبيرة.

السؤال 17.2: استخدم الطرق التي اتبعت في هذا الجزء لاشتقاق معادلة مشابهة 21.2، للتعددية عند درجات الحرارة المنخفضة، حيث $q << N$ (افترض أن النظام هو جامد أينشتاين).

السؤال 18.2: استخدم تقريب سترلنج لإيجاد $\Omega(N, q)$ لجامد أينشتاين لأي أعداد كبيرة من N وq تكون النتيجة:

$$\Omega(N,q) \approx \frac{\left(\frac{q+N}{q}\right)^{q}\left(\frac{q+N}{N}\right)^{N}}{\sqrt{2\pi q(q+N)/N}}$$

قيمة الجذر التربيعي في المقام عادة ما تكون كبيرة؛ لذا يمكن إهمالها، ولكن سنحتاج إليها في السؤال 22.2 أولًا أثبت أن $\Omega = \frac{N}{q+N}\frac{(q+N)!}{q!\,N!}$ ، لا تهمل العامل $\sqrt{2\pi N}$ في تقريب سترلنج.

السؤال 19.2: استخدم تقريب سترلنج لإيجاد صيغة تقريبية للتعددية للباراماجنت ثنائي الحالة، وبسّط هذه الصيغة في حدود $N >> N_\downarrow$ لتحصل على $\Omega=(Ne/N_\downarrow)^{N_\downarrow}$، ثم اشرح سبب تشابه هذه النتيجة مع نتيجة السؤال 17.2.

الحدّيّة في التعددية Sharpness of the Multiplicity

لمعرفة الحدية في منحنى التعددية لنظامين كبيرين ممثلًا بجامد أينشتاين، سنفترض أن كل نظام يحتوي على N متذبذب توافقي، وسيرمز الى وحدات الطاقة الكلية بالرمز q بدلًا من q_{total}، وعند الرجوع إلى المعادلة 21.2 فإن التعددية للنظامين لأي حالة جاهرية هي:

$$\Omega = \left(\frac{eq_A}{N}\right)^{N}\left(\frac{eq_B}{N}\right)^{N} = \left(\frac{e}{N}\right)^{2N}(q_A q_B)^{N} \tag{22.2}$$

وعند رسم Ω عدد وحدات الطاقة في الجامد q_B، أو Ω عدد وحدات الطاقة في الجامد q_A، سيكون المنحنى الناتج قمة حادة عندما تكون $q_A = q/2$ أي إن الطاقة قد توزعت بالتساوي بين الجسمين، وتكون التعددية عند قمة المنحنى عددًا Ω_{max} كبيرًا جدًّا، ويمثل القيمة العظمى.

$$\Omega_{\max} = \left(\frac{e}{N}\right)^{2N}\left(\frac{q}{2}\right)^{2N} \tag{23.2}$$

ولمعرفة شكل المنحنى قريبًا من قمته نفترض أن:

$$q_A = \frac{q}{2} + x, \quad q_B = \frac{q}{2} - x \tag{24.2}$$

حيث x عددًا يقل كثيرًا عن q (ولكنه عدد كبير) ، عند تعويض المعادلة 24.2 في المعادلة 22.2 ينتج

$$\Omega = \left(\frac{e}{N}\right)^{2N}\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 - x^2\right]^N \quad (25.2)$$

لتبسيط الحد الثاني، نأخذ اللوغاريتم، ونتبع الخطوات الجبرية مشابهًا لما تم في معادلة 19.2.

$$\begin{aligned}
\ln\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 - x^2\right]^N &= N \ln\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 - x^2\right] \\
&= N \ln\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2\left(1-\left(\frac{2x}{q}\right)^2\right)\right] \\
&= N\left[\ln\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \ln\left(1-\left(\frac{2x}{q}\right)^2\right)\right] \\
&\approx N\left[\ln\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{2x}{q}\right)^2\right]
\end{aligned} \quad (26.2)$$

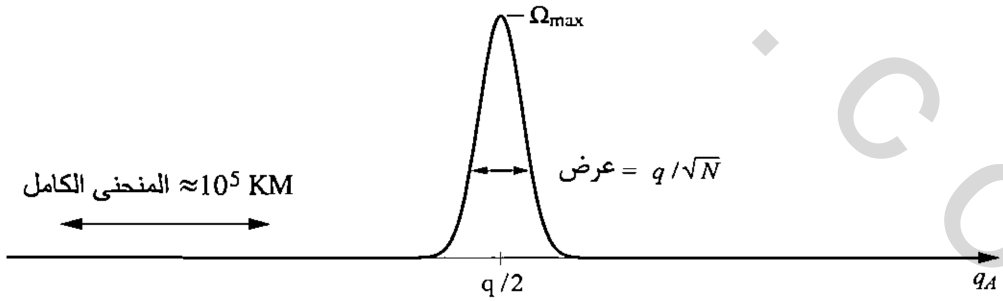
يمكن مد التعبير الأخير في هذه المعادلة، وتعويضه في المعادلة 25.2، لنحصل على:

$$\Omega = \left(\frac{e}{N}\right)^{2N} e^{N\ln(q/2)^2} e^{-N(2x/q)^2} = \Omega_{\max} e^{-N(2x/q)^2} \quad (27.2)$$

تُسمّى هذه الصيغة تمثيل **جاوس** (Gaussian) وتكون أعلى قيمة لها عند $x = 0$ وانخفاض حاد على جانبي قمة المنحنى على نحو ما هو موضح في الشكل 7.2. وتنخفض التعددية إلى $1/e$ من قيمتها الأصلية (أعلى قيمة للتعددية) عندما تكون:

$$x = \frac{q}{2\sqrt{N}} \quad \text{أو} \quad N\left(\frac{2x}{q}\right)^2 = 1 \quad (28.2)$$

وهي أعداد كبيرة، وإذا كانت $N = 10^{20}$ فإن المنحنى المبين في الشكل 7.2 يمثل جزءًا من عشرة ملايين من المنحنى الممثل لهذا العدد من الجزيئات.



الشكل 7.2: التعددية بوصفها دالة في وحدات الطاقة q_A لنظامين كبيرين يمثلان جامد أينشتاين يحتويان على عدد كبير من المتذبذبات التوافقية (عند درجة حرارة عالية). ويظهر المنحنى جزءًا صغيرًا جدًا من المحور السيني.

إذا كان عرض المنحنى $q\sqrt{N}$ في الشكل 7.2 يساوي 1cm، فإن المنحنى الحقيقي يجب أن يمتد أفقيًّا ليصل طوله إلى نحو 10^{10} cm أو 100,000 km (ضعف محيط الكرة الأرضية). وإذا رُسم المنحنى بين طرفي صفحة الكتاب، فإن x تكون أكبر 10 مرات تقريبًا من $q/2\sqrt{N}$، وتكون التعددية أقل من قيمتها العظمى بعامل يساوي $10^{-44} \approx e^{\ 100}$، وتدل هذه النتيجة على أنه إذا كان هناك جسمان جامدان في حالة اتزان حراري، وحدث تغير بسيط بعيدًا عن الحالة الجاهرية المرجحة (تقابل Ω_{max}) فلا يمكن قياسه، حيث يتطلب ذلك قياس الطاقة للرقم الدالي العاشر. وعند وصول النظام إلى حالة الاتزان الحراري، فإن الحالات المجهرية جميعها لها الاحتمالية نفسها، ويمكن اعتبار ذلك وجود النظام في الحالة الجاهرية المرجحة. فإن قياس التغير في الحالة الجاهرية المرجحة وللأنظمة الكبيرة جدًّا لا يمكن قياسه، ويدعى ذلك حد الثرموديناميكا (Thermodynamical limit).

السؤال 20.2: قدّر عرض المنحنى (الشكل 7.2) إذا افترض أنه رسم بصورة كاملة على صفحة الكتاب.

السؤال 21.2: استخدم الحاسوب لتمثيل المعادلة بيانيًّا (بالرسم) وبصورة مباشرة من المعطيات الآتية:

$z = q_A/q$ ، أي إن $q_B/q = (1\text{-}z)$. افترض أن التعددية يعبر عنها بالدالة $\left[4z(1-z)\right]^N$، حيث تتغير z بين 0 و 1، ويعني العامل 4 أن عرض المنحنى يساوي 1cm لأي عدد من الجزيئات (N). ثم ارسم هذه الدالة لعدد الجزيئات $N = 1, 10, 100, 1000, 10{,}000$، لاحظ أن عرض المنحنى يقل مع زيادة عدد الجزيئات.

السؤال 22.2: لتقدير عرض منحنى دالة التعددية لنظام جامد أينشتاين المكون من جسمين، هناك منهجية أخرى سيوضحها هذا السؤال.

(أ) افترض أن جسمين جامدين يحتوي كل منهما على N متذبذب توافقي، يتصلان حراريًّا ببعضهما، وعدد وحدات الطاقة الكلية لهما يساوي $2N$. فما مقدار عدد الحالات الجاهرية المختلفة لهذا النظام المركب؟

(ب) استخدم المعادلة 18.2 لإيجاد صيغة رياضية تقريبية للعدد الكلي للحالات المجهرية، مفترضًا أن الجسمين يكوّنان نظامًا واحدًا، استخدم المعادلة 18.2 لإيجاد صيغة رياضية تقريبية للعدد الكلي للحالات المجهرية (إذا عاملت الجسمين على أنهما نظام واحد، ولم تهمل عوامل الأعداد الكبيرة، فستكون إجابتك ($2^{4N} / \sqrt{8\pi N}$).

(ج) الحالة الجاهرية المرجحة «الحالة التي تكون فيها طاقة الجسمين متساوية» استخدم نتيجة السؤال 18.2 لتجد صيغة تقديرية للتعددية لهذه الحالة الجاهرية (الجواب $2^{4N} / (4\pi N)$).

(د) يمكـــن أخذ فكرة عن الحدية لمنحنى التعددية، وذلـــك بمقارنة الأجوبة في الفروع ب، و ج، حيث يعطي الفرع ج فكرة عن ارتفاع المنحنى، والفرع ب فكرة عن المساحة الكلية تحت المنحنى. وإذا افترضنا افتراضًا تقريبيًّا أن شكل المنحنى كان مستطيلًا، فما عرضه في هذا الافتراض؟ ما الجزء الذي يعطي قيمة معقولة للاحتمالات الكبيرة؟ من الحالات الجاهرية جميعها، قدّر هذا الجزيء عدديًّا إذا كانت $N = 10^{23}$

السؤال 23.2: يحتوي نظام باراماجنت ثنائي الحالة على 10^{23} ثنائي قطب، وثبتت الطاقة الكلية عند

الصفر، أي إن نصف ثنائيات القطب تتجه الى الأعلى والنصف الآخر إلى الأسفل.

(أ) ما عدد الحالات المجهرية المتاحة لهذا النظام؟

(ب) افترض أن الحالة المجهرية لهذا النظام تتغير 10 بلايين مرة في الثانية.

فكم عدد الحالات المجهرية التي يمكن إيجادها في 10 بلايين عام (مساويًا لعمر الكون تقريبًا)؟

(ج) هل يمكن القول: إنه إذا أعطي النظام الوقت الكافي، فإنه يمكن أن يُوجد في كل حالة ممكنة من الحالات المجهرية المحتملة؟ اشرح ذلك.

السؤال 24.2: افترض نظامًا كبيرًا من الباراماجنت ثنائي الحالة، حيث تكون ذروة منحنى دالة التعددية عند $N_\uparrow = N/2$.

(أ) قدّر ارتفاع دالة التعددية لهذا النظام باستخدام تقريب سترلنج.

(ب) اشتق صيغة رياضية لدالة التعددية بدلالة $x \equiv N_\uparrow - (N/2)$، ثم قارن نتيجتك عند $x = 0$ بالفرع أ.

(ج) ما عرض منحنى دالة التعددية؟

(د) هل تُفاجأ إذا قذفت مليون قطعة نقود، وكانت النتيجة وجود 501,000 كتابة، و499000 صورة؟ اشرح ذلك.

السؤال 25.2: الرياضيات المستخدمة في إيجاد احتمالية عدد حالات الكتابة أو الصور في القذف العشوائي للقطع النقدية، يمكن استخدامه في مثال يستخدم في الميكانيكا الإحصائية يُسمّى السير العشوائي في اتجاه واحد "one dimensional random walk" افترض أن عدد الخطوات لها الطول نفسه، وعددها N، واحتمالية أن تكون أي خطوة إلى الأمام أو إلى الخلف متساوية.

(أ) إذا سار شخص عشوائيًّا، فأين يجد نفسه بعد رحلة طويلة؟

(ب) افترض أن عدد الخطوات 10,000 خطوة، وطول كل خطوة (ياردة واحدة)، فعلى بعد أي مسافة يمكن أن يُوجد هذا الشخص من نقطة البداية؟

(ج) أفضل مثال في الفيزياء الحرارية للسير العشوائي، هو انتشار الجزيئات، حيث تمثل طول الخطوة متوسط المسار الحر، استخدم النموذج الذي شُرح في الجزء 7.1، ثم قدر الإزاحة النهائية لجزيء من الهواء خلال ثانية واحدة (فمثلًا جزيء CO_2 ينتشر في الهواء)، ثم ناقش تأثير الزمن ودرجة الحرارة في عملية انتشار جزيئات الغاز. وقارن تقديراتك لما شرح في عملية الانتشار في الجزء 7.1.

أُنجز هذا العلم لأن عدد أفوجادرو قريب من اللانهاية لا من 10.

Ralph Baierlein, American Journal of Physics 46, 1045(1978). Copyright 1978 American Association of Physics Teachers.

5.2 الغاز المثالي The Ideal Gas

لقد بيّنا في الجزء السابق «أن للأنظمة الكبيرة المتفاعلة جزءًا صغيرًا من الحالات الجاهرية تكون احتمالية حدوثها كبيرة»، ويمكن تطبيق ذلك على أنظمة غير نظام جامد أينشتاين، على أن تكون الأنظمة متفاعلة وعدد الجسيمات ووحدات الطاقة كبيرة جدًّا. وخلال هذا الجزء سنطبق ذلك على الغاز المثالي.

ويمكن افتراض أن الغاز المثالي أكثر تعقيدًا من جامد أينشتاين، لاعتماد التعددية على الحجم وعدد الجسيمات ووحدات الطاقة. إضافة إلى ذلك يمكن أن يحدث تمدد أو انكماش في النظام وتبادل بين الجسيمات والطاقة نتيجة لتفاعل الجسيمات. وعلى الرغم من ذلك، فإن منحنى دالة التعددية يكون حادًّا جدًّا.

التعددية للغاز المثالي أحادي الذرة Multiplicity of a monatomic Ideal Gas

للسهولة لنفترض أن هناك جزيئًا أحادي الذرة مثل الهيليوم أو الأرجون، طاقته U موضوع في وعاء حجمه V، والسؤال ما التعددية لهذا النظام، أيْ عدد الحالات المجهرية التي يمكن أن يوجد فيها الجزيء إذا كانت كل من قيم U وV ثابتة؟

إذا تضاعف حجم الغاز، فإن ذلك يؤدي إلى تضاعف الحالات المتاحة للغاز، أي إن التعددية تتناسب مع V. إضافة إلى امتلاك الجزيء عددًا أكبر من متجهات الزخم؛ لذا فإن التعددية يجب أن تعتمد على الحجم المتوافر لفضاء الزخم (فضاء الزخم، هو فضاء تخيلي تكون إحداثياته P_x، P_y، P_z، وكل نقطة في فضاء الزخم، تقابل متجهة زخم للجسيم)؛ لذا فإن:

$$\Omega_1 \propto V \cdot V_p \tag{29.2}$$

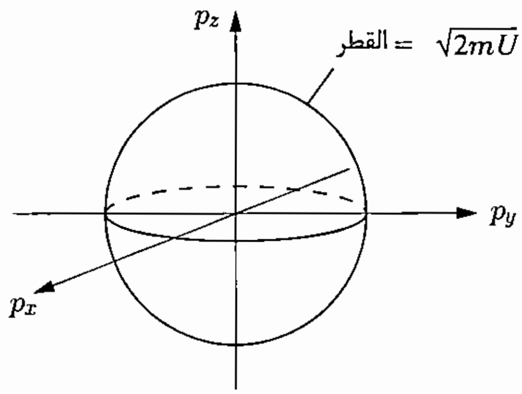
V حجم الفضاء العادي (**فضاء المكان**)، وV_p حجم فضاء الزخم، الرقم 1 يشير الى جزيء واحد من الغاز. ويكتنف Ω (معادلة 29.2) شيء من الغموض، فالمشكلة الأولى هي تحديد الحجم المتاح لفضاء الزخم (V_p)، ولمّا كانت طاقة الحركة للجزيء تساوي U، فإن ذلك يُعدّ قيدًا، وتكتب U في هذه الحالة:

$$U = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \tag{30.2}$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة على النحو الآتي:

$$P_x^{\,2} + P_y^{\,2} + P_z^{\,2} = 2mU \tag{31.2}$$

وتعرف هذه المعادلة سطح كرة في فضاء الزخم نصف قطرها $\sqrt{2mU}$ (الشكل 8.2). وحجم فضاء الزخم هو مساحة السطح الكروي (مضروبًا في السمك الصغير للكرة إذا سمح لِـ U بالتغير البسيط).



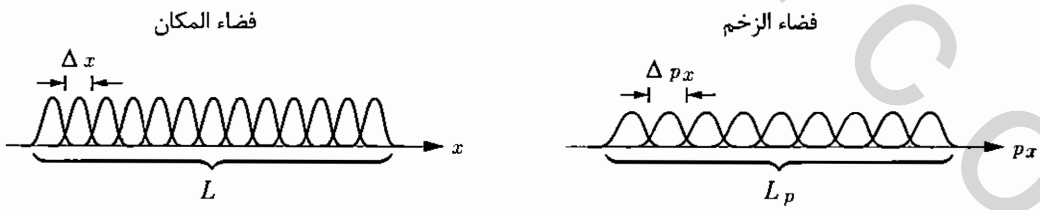
الشكل 8.2: كرة في فضاء الزخم نصف قطرها $\sqrt{2mU}$. إذا كانت طاقة الجزيء U، فإن متجه الزخم يجب أن يقع في مكانٍ ما على سطح الكرة.

والمشكلة الثانية في Ω، هي تحديد ثابت التناسب. ومن الواضح أن Ω يجب أن تتناسب مع حجوم فضاء المكان وفضاء الزخم، والسؤال: كيف يمكن أن نعدّ الحالات المختلفة من الحالات المجهرية لحساب قيمة محددة للتعددية؟

فالحالات المسموح بها للحالات المجهرية حتى للنظام المكون من جزيء واحد تكون لا نهائية. ولإحصاء عدد الحالات المجهرية، لا بد لنا من الرجوع إلى ميكانيكا الكم، حيث توصف حالة النظام بدالّة موجية تنتشر في فضاء المكان وفضاء الزخم. وكلما كان انتشارها في فضاء المكان أقل زاد ذلك من انتشارها في فضاء الزخم، ويُعرف ذلك بمبدأ عدم التحديد لهايزنبرج "**Heisenberg Uncertainty principle**".

$$(\Delta x)\,(\Delta p_x) \approx h \tag{32.2}$$

Δx هو انتشار الموجة في اتجاه x هو انتشار الزخم في اتجاه Δp_x، h ثابت بلانك. (حاصل ضرب Δx و Δp_x يمكن أن يكون أكبر من h، ويتركز الاهتمام على دوال الأمواج التي تحدد الموقع والزخم بأكبر دقة ممكنة.



الشكل 9.2: عدد متوقع للحالات غير المعتمدة، وحالات الزخم لجسيم ميكانيكي كمي يتحرك في اتجاه واحد، إذا قل عرض دالة الموجة في فضاء المكان، أصبحت أعرض في فضاء الزخم.

وما ينطبق على x ، P_x ينطبق أيضًا على كلٍّ من y و P_y و z و P_Z. وحتى في ميكانيكا الكم، فإن العدد المسموح به لدوال الموجة يكون غير محدد (لا نهائيًا). ويكون عدد دوال الموجة غير المعتمدة independent (الملحق A) عددًا محددًا. وإذا كان المجموع المتاح لفضاء المكان وفضاء الزخم محددًا، فإنه يمكن تمثيله على نحو ما هو مبين في الشكل 9.2، الذي يمثل الحركة في اتجاه واحد. ويكون العدد لحالات المكان المميزة هو $L / \Delta x$ والعدد لحالات الزخم $L_p / \Delta p$، لذا فإن عدد الحالات المميزة هو حاصل الضرب لِـ:

$$\frac{L}{\Delta x}\frac{L_P}{\Delta P_x}=\frac{LL_P}{h} \qquad (33.2)$$

ووفقًا لمبدأ هايزنبرج في الأبعاد الثلاثة، فإن الأطوال تصبح حجومًا، وإن هناك ثلاثة معاملات لِـ h.

$$\Omega_1 = \frac{V \ V_P}{h^3} \qquad (34.2)$$

واشتقاق ثابت التناسب لِـ Ω_1 ليس دقيقًا جدًا، ولم نثبت أنه لا يوجد معامل مثل 2 أو π في المعادلة 34.2. لاحظ أن وحدات h^3 هي وحدات Vp[22] V نفسها ، حيث إن Ω ليس لها وحدات.

إذا أضيف جزيء آخر إلى النظام المكون من جزيء واحد، فإن ذلك يتطلب معاملًا آخر مشابهًا لما ورد في المعادلة 34.2، وهنا يجب ضرب العاملين ببعضهما؛ لأن لكل حالة للجزيء 1، هناك Ω_1 لحالات الجزيء 2. وعامل Vp أكثر تعقيدًا، حيث إن الطاقة الكلية للجزيئين هي المقيدة؛ لذا تصبح المعادلة 31.2:

$$p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2 + p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2 = 2mU \qquad (35.2)$$

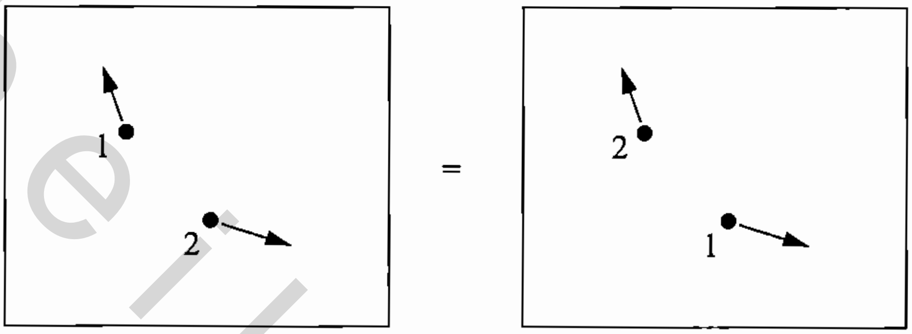
إذا كانت كتل الجزيئين متساوية، فالمعادلة تعرف سطحًا في فضاء زخم بستة أبعاد قطع كروي زائد "hypersphere" حيث لا يمكن تصور ذلك، ومع ذلك يمكن حساب مساحة هذا السطح، وافتراض أنه الحجم المسموح به لفضاء الزخم للجزيئين. لذا فإن التعددية لغاز مثالي مكون من جزيئين هي:

$$\Omega_2 = \frac{V^2}{h^6} \times \text{(مساحة قطع كروي زائد)} \qquad (36.2)$$

(22) إن افتراض أن Vp هي مساحة السطح، لا الحجم، لا تؤدي إلى مشكلة. ويمكن لنا أن نفترض أن هناك سمكًا صغيرًا للكرة لفضاء الزخم. ونضرب مساحة السطح في سمك الكرة لنحصل على الوحدات الصحيحة. وإن التعددية لغاز عدد جزيئاته N، فإن التعددية تكون قيمتها عددًا كبيرًا جدًا ولا تتأثر بتغير الوحدات تغيرًا بسيطًا.

تكون المعادلة صحيحة إذا كان الجزيئان غير مميزين، حيث نضرب عدد الحالات المجهرية في 2؛ لأن تفاعل الجزيئات مع بعضها لا يعطي حالة مميزة (الشكل 10.2)[23]؛ لذا فإن التعددية لجزيئين غير مميزين هي:

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}\frac{V^2}{h^6} \times \text{(مساحة قطع كروي زائد)} \qquad (37.2)$$



الشكل 10.2: تبادل موقع الجزيئين لغاز يتكون من جزيئين متماثلين، يترك النظام في حالته الأصلية نفسها.

إذا كان الغاز مثاليًا يتكون من N جزيء غير مميز، فإن الدالة التعددية تحتوي على N معامل لـِ V، مقسومًا على $3N$ معامل لـِ h. والمعامل $1/N!$ يضاف إذا كانت الجزيئات غير مميزة.

ومعامل فضاء الزخم هو مساحة السطح لـ $3N$ – لقطع كروي نصف قطره $\sqrt{2mU}$:

$$\Omega_N = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}} \times \text{(مساحة قطع كروي زائد)} \qquad (38.2)$$

ولجعل هذه المعادلة أكثر وضوحًا، فإننا نحتاج إلى مساحة سطح "d- dimensional hypersphere" نصف قطره r.

إذا كانت $d=2$، لنفترض أن (المساحة) هي عبارة عن محيط الدائرة $2\pi r$ و $d=3$ فالجواب هو $4\pi r^2$، وإذا كانت d تأخذ أي قيمة، فإن الجواب يجب أن يتناسب مع r^{d-1}، ولكن من الصعب توقع المعامل، والصيغة الكاملة هي:

$$\text{المساحة} = \frac{2\pi^{d/2}}{\left(\frac{d}{2}-1\right)!} r^{d-1} \qquad (39.2)$$

اشتُقت المعادلة 39.2 في الملحق B.

(23) يشترط هنا أن تكون الحالات لكل جزيء مختلفة، ويمكن أن تكون الجزيئيات في حالة، حيث يكون لهما المكان والزخم نفسه. وهذه الحالة لا تحسب مرتين في المعادلة 36.2، إلا إذا كان الغاز كثيفًا جدًا، حيث إنه لا يمكن حدوث هذه الحالة.

يمكن لك أن تنظر إلى العوامل في هذه المعادلة إذا كانت $d=2$ و$d=3$ حيث تحتاج إلى معرفة أن $\left(\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}/2$ بتعوض المعادلة 2.39 ($d=3N$ و $r=\sqrt{2mU}$) ص 81 في المعادلة 38.2 نحصل على:

$$\Omega_N = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}\frac{2\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}-1\right)!}\left(\sqrt{2mU}\right)^{3N-1} \approx \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}\frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!}\left(\sqrt{2mU}\right)^{3N} \qquad (40.2)$$

لقد تم حذف بعض المعاملات الكبيرة، حيث إن Ω_N عدد كبير جدًّا.

وهذه الصيغة لتعددية الغاز المثال أحادي الذرة تبين اعتماد التعددية على كل من U وV كما يأتي:

$$\Omega(U,V,N) = f(N)V^N U^{3N/2} \qquad (41.2)$$

حيث إن $f(N)$ دالة معقدة لـ N 20. لاحظ أن أس الطاقة U في المعادلة 41.2 يساوي $\frac{1}{2}$ مضروبًا في عدد درجات الحرية لجزيء أحادي الذرة ($3N$)(24).

ويكون ذلك صحيحًا لجامد أينشتاين عند حدود درجات الحرارة المرتفعة (معادلة 21.2) ويمثل ذلك حالة خاصة لنظرية عامة تنص على أنه في أي نظام يحتوي على درجات حرية تربيعية يمتلك عددًا كبيرًا من وحدات الطاقة، فإن التعددية تتناسب مع $U^{Nf/2}$ (أثبتت هذه النظرية من قبل Stowe 1984).

السؤال 26.2: افترض غازًا مثاليًا أحادي الذرة موجود في فضاء، ذو بعدين (أرض مستوية) في مساحة مقدارها A بدلًا من V. اتبع الخطوات السابقة نفسها لتجد صيغة رياضية للتعددية مشابهة للمعادلة 40.2.

الغازات المثالية المتفاعلة Interacting Ideal Gases

إذا وضع غازان مثاليان في وعاءين يفصلهما حاجز يسمح بتبادل الطاقة بينهما (الشكل 11.2) واحتوى كل غاز على عدد N من نوع الجزيئات نفسه، فإن التعددية الكلية لهذا النظام هي:

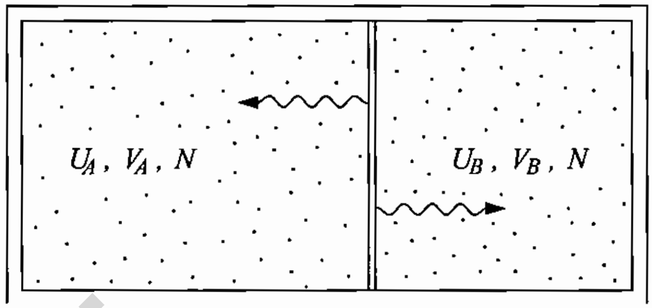
$$\Omega_{total} = [f(N)]^2 (V_A V_B)^N (U_A U_B)^{3N/2} \qquad (42.2)$$

وهذه صيغة مشابهة لجسمين لجامد أينشتاين كما تبين المعادلة 22.2. حيث إن الطاقتين مرفوعتان إلى أس كبير، وإذا اتبع الأسلوب نفسه الذي اتبع في الجزء 4.2، يمكن أن نستنتج أنه إذا رسمت دالة التعددية كدالة في U_A فإن المنحنى الناتج يكون له ذروة حادة جدًّا، وعرض المنحنى يعطى بالعلاقة:

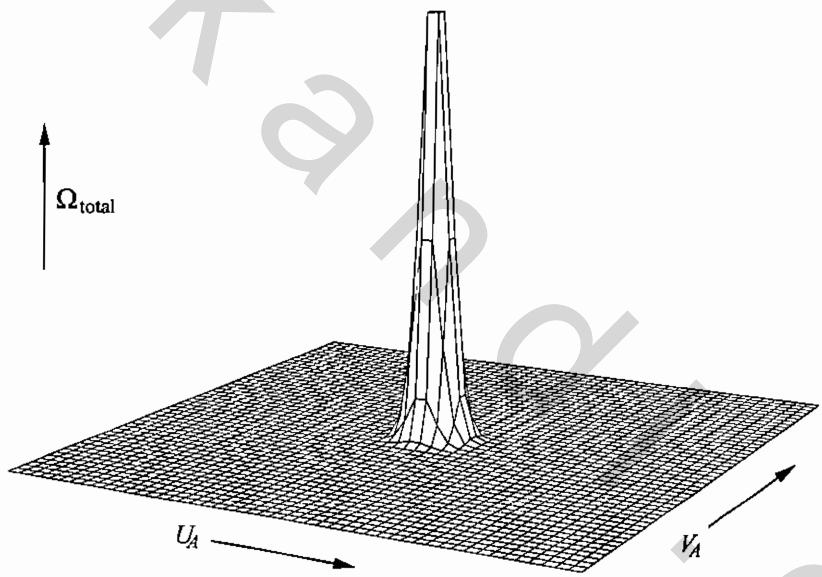
$$\text{عرض المنحنى} = \frac{U_{total}}{\sqrt{3N/2}} \qquad (43.2)$$

(24) يشترط هنا أن تكون الحالات لكل جزيء مختلفة، ويمكن أن يكونا الجزيئين في حالة، حيث إن لهما المكان نفسه والزخم نفسه، وهذه الحالة لا تحسب مرتين في المعادلة 36.2 إلا إذا كان الغاز كثيفًا جدًّا، حيث إنه لا يمكن حدوث هذه الحالة.

إذا كانت N عددًا كبيرًا، فهناك جزء صغير محتمل من الحالات الجاهرية يمكن أن يوجد إذا كان النظام في حالة اتزان. وبسبب إمكانية تحرك الحاجز من اليمين إلى اليسار أو من اليسار إلى اليمين، فإن تمدد الغاز في أحد جوانب الحاجز يتسبب في انكماش الغاز في الجانب الآخر.



الشكل 11.2: غازان مثاليان، يحتل كل منهما جزءًا من الوعاء بحجم ثابت مفصولان بحاجز يسمح لتبادل الطاقة بينهما، مع ثبوت الطاقة الكلية للغازين.



الشكل 12.2: التعددية لنظام يتكون من غازين مثاليين، كدالة في الطاقة والحجم للغاز A (مع ثبوت مجموع الطاقة الكلية للغازين) فإذا كان عدد الجزيئات في كل غاز كبيرًا، فإن التدريج الأفقي يكون بعيدًا جدًّا عن طرفي صفحة الكتاب.

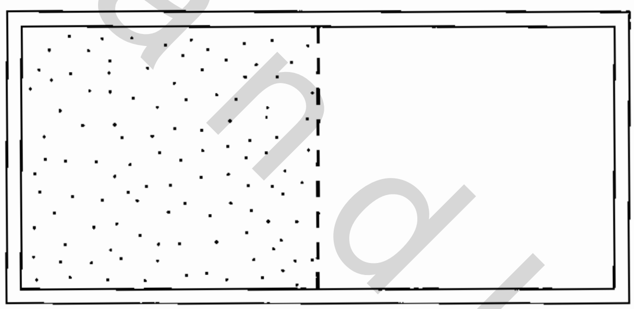
وإذا اتبع الأسلوب نفسه في تبادل الطاقة، وطبق على تبادل الحجم، فإن رسم دالة التعددية كدالة في V_A يظهر ذروة حادة، ويكون عرض المنحنى هو:

$$\text{عرض المنحنى} = \frac{V_{total}}{\sqrt{N}} \tag{44.2}$$

يبين الشكل 12.2 Ω_{total} كدالة في كل من U_A وV_A. (إذا تم رسم المنحنى بشكل كامل على صفحة الكتاب، فإن عرض المنحنى سيكون أقل من قطر ذرة). لنفترض الآن، بدلًا من السماح للحاجز بالحركة يمينًا أو يسارًا، أننا أحدثنا ثقبًا صغيرًا يسمح بانتقال الجزيئات بين جانبي الحاجز. ولإيجاد الحالة الجاهرية المتزنة لا بد من دراسة التعددية الكلية كدالة في N_A وU_A حيث سيكون ذلك أكثر صعوبة من اشتقاق المعادلة 40.2. وسنجد عند رسم منحنى التعددية أن هناك منحنى حادًّا يمثل اتزان التعددية (اتزن التعددية يكون عند تساوي كثافة الغاز على جانبي الحاجز).

يمكن في حالات كثيرة حساب احتماليات الترتيبات المختلفة للجزيئات بالنظر إلى اعتماد الحجم على دالة التعددية (41.2). افترض أننا نريد معرفة الاحتمالية للترتيب المبين في الشكل 13.2 حيث إن كل الجزيئات توجد في الجانب الأيسر.

يمثل هذا الترتيب حالة جاهرية لعدد الجزيئات نفسه والطاقة، ولكن لنصف الحجم الأصلي. وعليه يمكن استبدال V في المعادلة 41.2 بنصف الحجم $V/2$ ما يخفض قيمة التعددية بعامل مقداره 2^N. ويعني ذلك أن من جميع الحالات المجهرية المسموح بها هناك حالة واحدة من 2^N حالة يمكن أن تكون جميع الجزيئات في الجانب الأيسر. لذلك، فإن احتمالية حدوث ذلك هو 2^{-N}. وحتى إذا كانت N=100 فإن الاحتمالية أقل من 10^{-30}. لذلك، فإنك تحتاج إلى فحص الحالات ترليون مرة في الثانية ولفترة تساوي عمر الكون قبل أن تجد حدوث هذه الحالة مرة واحدة. وأما إذا كانت $N = 10^{23}$ فالرقم سيكون صغيرًا جدًّا.



الشكل 13.2: الترتيب غير المفضل لجزيئات الغاز.

السؤال 27.2: إذا افترض أن 99% من جزيئات الغاز في الطرف الأيسر من الوعاء المبين في الشكل 13.2، و1%، مما تبقى منه فراغ تام، ما احتمالية وجود هذه الحالة، إذا كان عدد الجزيئات في الوعاء 100 جزيء؟ وما الاحتمالية إذا كان عدد الجزيئات 10,000؟ وما الاحتمالية إذا كان عدد الجزيئات 10^{23}؟

6.2 الإنتروبي Entropy

كما بينا في الأجزاء السابقة لأنظمة مختلفة، تعيد الجسيمات والطاقة ترتيب نفسها لتصل إلى التعددية (أو تكون قريبة) من القيمة العظمى لها. وتبدو هذه النتيجة صحيحة لأي نظام [25] شريطة أن تكون عدد جسيمات النظام كبيرة، ويحتوي على عدد كبير من وحدات الطاقة ليمكن استخدام إحصاء الأعداد الكبيرة جدًّا على النظام.

ويمكن القول: «إن أي نظام كبير يوجد في الحالة الجاهرية التي تقابل التعددية العظمى، ويكون في وضع اتزان» وعليه يمكن وضع نص أشمل **للقانون الثاني في الثرموديناميكا**، «**تميل التعددية إلى الزيادة**».

وإن لم يكن القانون الثاني، قانونًا أساسيًا لأن اشتقاقه تم بالاعتماد على مفهوم الاحتمالية، فسيتم اعتباره قانونًا أساسيًّا، إذا تذكرنا أن ننظر إلى الحالة الجاهرية عند القيمة العظمى للتعددية دون الحاجة إلى معرفة الاحتمالية الحقيقية.

وكون قيم التعددية أعدادًا كبيرة جدًّا، لذلك استخدم اللوغاريتم الطبيعي للتعبير عن التعددية، وإذا ما ضرب لوغاريتم التعددية بثابت بولتزمان، فإن القيمة الناتجة يطلق عليها «الإنتروبي» ويرمز إليها بالرمز S

$$S \equiv k \ln \Omega \tag{45.2}$$

ومــن هذه المعادلة يمكــن تعريف الإنتروبي بأنها عــدد الطرق التي ترتب بها الأشــياء مضروبًا في ثابت بولتزمان. ويمكن إهمال الثابت k والتفكير في الإنتروبي بأنها قيمة فيزيائية لا وحدات لها، أما إذا ضربت بثابت بولتزمان فتكون وحداتها J/K في نظام الوحدات SI.

ومثال أولي دعنا نَعُدْ إلى حالة جامد أينشتاين الذي يحتوي على N متذبذب توافقي، وq من وحدات الطاقة، وأن $q >> N$. حيث إن $\Omega = (eq/N)^N$ لذلك فإن الإنتروبي لهذا النظام هي:

$$S = k \ln(eq/N)^N = Nk[\ln(q/N)+1] \tag{46.2}$$

إذا كانت $N = 10^{22}$ و $q = 10^{24}$ فإن:

$$S = Nk.(5.6) = (5.6\times10^{22})k = 0.77 \text{ J/K} \tag{47.2}$$

لاحظ أن أي زيادة في N أو q تحدث زيادة في إنتروبي النظام. وبشكل عام كلما زاد عدد جسيمات النظام، وزادت كمية الطاقة الداخلة إليه، ازدادت التعددية والإنتروبي. وبدلًا من زيادة الطاقة أو عدد الجسيمات يمكن زيادة إنتروبي النظام بالسماح له بالتمدد، أو تفكك الجزيئات الكبيرة إلى جزيئات أصغر، أو خلط مادتين، وفي جميع هذه العمليات، فإن عدد الطرق المحتملة للترتيب يزداد.

يطلق على الإنتروبي مصطلح الفوضى disorder، وسواء كان المصطلح دقيقًا أم لا، فيعتمد ذلك ماذا نعني

(25) لم يستطع أحد إثبات صحة ذلك، ما عدا في بعض الحالات، حيث بينت التجارب أن هذه الحالات نادرة نوعًا ما.

بكلمة الفوضى. فمثلًا إعادة توزيع أوراق اللعب ينتج فوضى ما يزيد الإنتروبي لزيادة عدد الترتيبات المحتملة [26].

وإن كوبًا مملوءًا بالجليد المجروش تكون جزيئاته في حالة فوضى أكثر مما لو كان الكوب مملوءًا بالما . لأن هناك عددًا أكبر من التركيبات متاحة للجزيئات في الجليد المجروش وعددًا أكبر من طرق توزيع الطاقة بين الجزيئات. وإذا كان النظام يتكون من أكثر من جزء، فإن الإنتروبي الكلية تساوي المجموع الجبري لإنتروبي جميع الأجزاء. فمثلًا لنظام يتكون من جزأين A وB فإن الإنتروبي الكلية للنظام هي:

$$S_{total} = k \ln \Omega_{\text{total}} = k \ln(\Omega_A \Omega_B) = k \ln \Omega_A + k \ln \Omega_B = S_A + S_B \quad (48.2)$$

افترض هنا أن الحالات الجاهرية لكل من A وB قد تم تحديد كل منها بشكل منفصل. أما إذا كان النظامان يتفاعلان مع بعضهما، فإن الحالات الجاهرية تتغير مع مرور الوقت. وفي هذه الحالة، فإن Ω_{total} يمكن إيجادها بأخذ مجموع الإنتروبي لجميع الحالات الجاهرية بطريقة مشابهة للتعددية، حيث تكون دالة لجميع الحالات المجهرية، معتمدًا ذلك على الفترة الزمنية المأخوذة في الحسبان. وإذا كان النظام في الحالة الجاهرية المرجحة، فتكون الإنتروبي الكلية مساوية لجميع الحالات الجاهرية للنظام (السؤال 29.2). ولأن النظام الذي تكون تعدديته عالية، فإن إنتروبي النظام كبيرة.

يمكن لنا أن نعيد صياغة القانون الثاني في الثرموديناميكا: «**إذا كان النظام في حالة اتزان، فإنه يكون في حالة تكون بها الحالة الجاهرية تمتلك أعلى إنتروبي**». وباختصار يمكن القول: إن «الإنتروبي تميل إلى الزيادة» وتحدث العمليات الطبيعية لأن المحصلة النهائية للإنتروبي تكون موجبة، فعلى سبيل المثال يكون التغير في الإنتروبي كبيرًا جدًّا نتيجة لهضم الطعام في أجسامنا (حيث إن الطاقة الناتجة عن تفكك الروابط الكيميائية في المواد المهضومة تنتقل إلى المحيط الخارجي) ويمكن القول: إن أجسامنا تخضع لقوانين الثرموديناميكا، ومهما حاولت إنقاص الإنتروبي في مكان ما، فإنك تنتج زيادة في الإنتروبي بشكل أكبر في مكان آخر. حتى لو لم تستطع إنقاص الإنتروبي في الكون. هل من المحتمل أن يقوم شخص ما أو شيء ما بإنقاصها؟ وقد أثار جيمس كلارك عام 1867 هذا السؤال، متسائلًا: «ألا يستطيع كائن قوي الملاحظة وذو أصابع مرهفة الحس» أن يحث انحرافًا في جزيئات تتحرك بسرعة في أحد الاتجاهات، ويبطئ الجزيئات المتحركة في اتجاه آخر، ما يتسبب في انتقال الحرارة من الجسم البارد إلى الجسم الحار[27].

وقد أطلق وليام ثومسون على هذا الكائن الخرافي شيطان ماكسويل Maxwell's Demon ومنذ ذلك الوقت حاول المصممون تصنيع شيطان ميكانيكي، ولكن جميع محاولاتهم فشلت. ومع غرابة الفكرة، فإنها علمتنا الكثير، إن هذه الفكرة يمكن أن تهدم القانون الثاني في الثرموديناميكا. «لو تحققت».

السؤال 28.2: ما عدد الترتيبات الممكنة في 52 ورقة لعب؟

---

(26) هذا مثال جدلي، حيث يرى بعض الفيزيائيين أن ذلك لا يحدث تغيرًا في الإنتروبي الثرموديناميكية؛ لأن اعادة الترتيب حدث بمساعدة خارجية، وفي رأيي الخاص أن ذلك لا يؤثر في التعريف الواسع للإنتروبي؛ لأن قيمة الإنتروبي تكون صغيرة ومهملة إذا ما قورنت بأشكال الإنتروبي الأخرى.

(27) dctouQ ni Leff and Rex (1990) .p.5

(للسهولة، اعتبر فقط ترتيب الأوراق لوجه واحد) وافترض أنك بدأت بمجموعة الأوراق، وغيرت ترتيبها مرارًا وتكرارًا، حيث إن جميع الترتيبات أصبحت ممكنة. ما مقدار الإنتروبي الذي استحدثته في هذه العملية؟ اكتب إجابتك رقمًا دون وحدات، ثم استخدم ثابت بولتزمان (وحدات SI). هل قيمة الإنتروبي كبيرة مقارنة بترتيب الطاقة الحرارية بين جزيئات أوراق اللعب؟

السؤال 29.2: افترض نظام جامد أينشتاين يتكون من جسمين A وB، حيث إن $N_A = 300$، $N_B = 200$ ومجموع وحدات الطاقة $q_{total} = 100$ احسب الإنتروبي للحالة الجاهرية المرجحة والحالة الجاهرية الأقل احتمالًا. (أهمل ثابت بولتزمان في معادلة الإنتروبي).

السؤال 30.2: افترض نظامًا يتكون من جسمين كبيرين مماثلين لجامد أينشتاين (السؤال 22.2).

(أ) احسب مقدار الإنتروبي إذا كانت $N = 10^{23}$ بدلالة ثابت بولتزمان، حيث إن جميع الحالات المجهرية مسموحة بها (حالة النظام خلال فترة زمنية طويلة).

(ب) احسب مقدار الإنتروبي إذا كان النظام في الحالة الجاهرية المرجحة (النظام خلال فترة زمنية قصيرة إلا إذا كان هناك تغير كبير وبعيد عن الحالة الجاهرية المرجحة).

(ج) هل الفترة الزمنية تمثل أهمية لإنتروبي النظام؟

(د) افترض أنه في لحظة اقترب بها النظام من الحالة الجاهرية المرجحة، ثم وضع حاجزًا بين الجسمين يمنع تبادل الطاقة بينهما. في هذه الحالة وحتى خلال فترة زمنية طويلة، فإن الإنتروبي هي نتيجة الفرع ب. والقيمة العددية أقل مما وجد في الفرع أ.

هل يعارض ذلك القانون الثاني في الثرموديناميكا، هل هذا الانتهاك له أهمية كبيرة؟ هل يسبب لنا أي قلق؟

إنتروبي الغاز المثالي Entropy of an Ideal Gas

تُعدّ معادلة الغاز المثالي من المعادلات المهمة، فإذا بدأت بالمعادلة 40.2 ثم طبقت تقريب سترلنج، وحذف بعض العوامل، وأخذت اللوغاريتم ستحصل على:

$$S = Nk\left[\ln\left(\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi mU}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right)+\frac{5}{2}\right] \quad (49.2)$$

تدعى هذه المعادلة معادلة – ساكور – تيترود **(Sakure – Tetrode)** فمثلًا لمول واحد من الهيليوم تحت الضغط الجوي العادي، موضوع في وعاء حجمه $0.025\ m^3$ وطاقته الداخلية $\frac{3}{2}nRT = 3700$ J فإن تعويض هذه الأرقام في معادلة ساكور – تيترود يعطي إنتروبيًّا للنظام، وتساوي

$$S = Nk \cdot (15.2) = (9.1 \times 10^{24})k = 126 \text{ J/K} \quad (50.2)$$

تعتمد إنتروبي الغاز المثالي على الحجم، والضغط، وعدد الجسيمات، ويؤدي زيادة أي منها إلى زيادة إنتروبي الغاز المثالي. فإذا ثبت عدد الجسيمات والضغط لنظام ما مع تغير حجمه من V_i إلى V_f، يعطى التغير في الإنتروبي بالمعادلة:

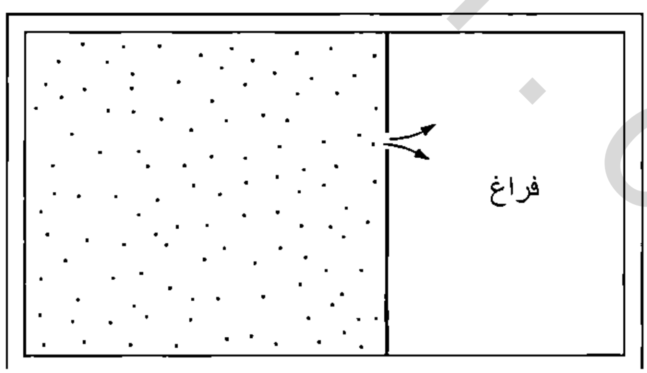
$$\Delta S = Nk \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (\text{ثبوت } U، N) \quad (51.2)$$

يمكن تطبيق هذه المعادلة على التمدد الأيزوثيرمي في عملية شبه ساكنة (الجزء 5.1). حيث يتحرك المكبس إلى أعلى نتيجة لإضافة كمية من الحرارة إلى الغاز الموجود في الأسطوانة، فينتج عنه شغل ينجز على المكبس تحت درجة حرارة ثابتة، حيث سيتم شرح العلاقة بين الحرارة والإنتروبي في هذا الجزء.

يبين الشكل 14.2 وعاء يحتوي في أحد أجزائه على غاز، يفصله عن الجانب الآخر المفرغ من الهواء حاجز يحتوي على ثقب يسمح للغاز بالتمدد إلى هذا الجانب. وتدعى عملية التمدد إلى الجانب المفرغ التمدد الحر free expansion. وهنا يمكن أن نتساءل، عن مقدار الشغل المنجز خلال هذه العملية؟ حيث إن الهواء ينتقل إلى الجانب الآخر تجاه لا شيء، إن الشغل في هذه الحالة يساوي صفرًا. وإذا كان النظام معزولاً، فإنه خلال هذه العملية لا توجد أي كمية حرارة تنتقل من النظام أو إليه. وطبقًا للقانون الأول في الثرموديناميكا،

$$\Delta U = Q + W = 0 + 0 = 0 \quad (52.2)$$

أي لا يوجد تغير في طاقة الغاز خلال هذه العملية. وزيادة الإنتروبي لم تكن نتيجة للحرارة، ولكن بفعل عامل آخر.



الشكل 14.2: التمدد الحر للغاز المثالي، تتغير إنتروبي الغاز مع عدم تغير طاقته الداخلية.

السؤال 31.2: اشتق معادلة ساكور – نيترود (49.2).

السؤال 32.2: أوجد صيغة رياضية لغاز مثالي بدلالة U، A، N إذا افترض أن الغاز موجود في بعدين فقط.

السؤال 33.2: احسب الإنتروبي لمول واحد من غاز الأرجون باستخدام معادلة ساكور – تيترود عند درجة حرارة الغرفة وضغط جوي واحد، وفسر لماذا تكون إنتروبي غاز الهيليوم تحت الظروف نفسها أكبر؟

السؤال 34.2: بين أن التغير في إنتروبي الغاز المثالي أحادي الذرة خلال عملية تمدد أيزوثيرمي شبه ساكنة تعطى بالعلاقة. سيتم إثبات صحة هذه العلاقة لأي عملية شبه ساكنة ما عدا عملية التمدد الحر.

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

السؤال 35.2: بناءً على معادلة سيكور – تيترود، فإن إنتروبي الغاز المثالي أحادي الذرة تصبح سالبة عند درجات الحرارة المنخفضة، وهذا غير منطقي، ما يدل على أن هذه المعادلة لا تستخدم عند درجات الحرارة المنخفضة. افترض أنك بدأت بعينة من الغاز المثالي عند درجة حرارة الغرفة والضغط الجوي المعياري (1 ضغط جوي) ثم خفضت درجة حرارة الغرفة مثبتًا كثافة الغاز. وإذا افترضت أن غاز الهيليوم لا يتحول إلى سائل. تحت أي درجة حرارة تتوقع معادلة ساكور – تيرتود أن تكون إنتروبي غاز الهيليوم سالبة؟ (خواص الغازات عند درجات الحرارة المنخفضة هو الموضوع الرئيس في الفصل السابع).

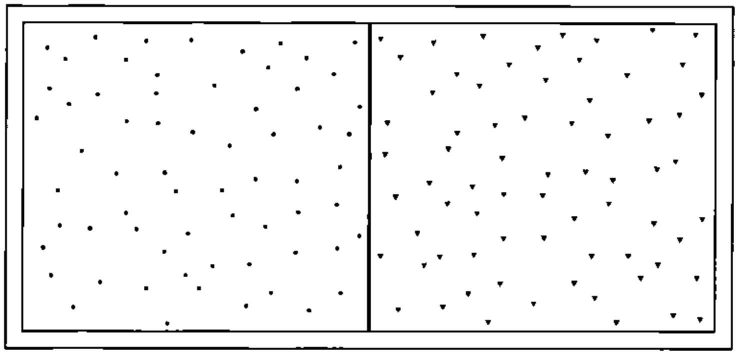
السؤال 36.2: تعطى الإنتروبي بالكمية Nk مضروبة في لوغاريتم، لأي من الغاز المثالي أحادي الذرة أو جامد أينشتاين. وحيث إن قيمة اللوغاريتم لا يمكن أن تكون عددًا كبيرًا، لذلك يمكن إهمالها. واعتبار أن الإنتروبي $S \approx Nk$. أي إن الإنتروبي بالوحدات الأساسية تساوي تقريبًا عدد الجسيمات في النظام (يصلح هذا التعريف لمعظم الأنظمة ما عدا بعض الاستثناءات عند درجات الحرارة المنخفضة) قدّر قيمة الإنتروبي بشكل تقريبي كما يأتي: كتاب كتلته 1 kg (مركبات الكربون) حيوان الأيل (400 kg من الماء)، الشمس 2×10^{30} kg (أيونات الهيدروجين).

إنتروبي الخلط Entropy of Mixing

يتسبب خلط مادتين مع بعضهما في زيادة الإنتروبي، ولنبدأ بغازين مثاليين A و B لهما عدد الجزيئات نفسه والحجم والطاقة. يحتل كل منهما نصف الوعاء المبين في الشكل 15.2 ويفصل بينهما حاجز. عند إزالة الحاجز يحتل كل منهما الحجم الكلي للوعاء ما يتسبب في زيادة الإنتروبي، الزيادة في إنتروبي الغاز A هي:

$$\Delta S_A = Nk \ln \frac{V_f}{V_i} = Nk \ln 2 \qquad (53.2)$$

وتزداد قيمة إنتروبي الغاز B بالمقدار بنفسه.



الشكل 15.2: غازان مختلفان يفصلهما حاجز، عند إزالة الحاجز، فإن كل غاز يتمدد ليحتل الحجم الكلي للوعاء، يتسبب الخلط بين الغازين في زيادة في الإنتروبي.

زيادة الإنتروبي الكلية هي:

$$\Delta S_{total} = \Delta S_A + \Delta S_B = 2Nk \ln 2 \tag{54.2}$$

وتدعى هذه الزيادة إنتروبي الخلط **entropy of mixing** ويجب التنويه هنا الى أن هذه النتيجة صحيحة لغازين مختلفين، كالهيليوم والأرجون، حيث لا تحصل زيادة في الإنتروبي إذا وضع الغاز نفسه في الجزأين (يحدث هنا زيادة في التعددية، ولكن تأثير ذلك على الإنتروبي يكون مهملًا). ولنعالج هاتين الحالتين بطريقة مختلفة، ولنفترض أننا بدأنا بمول واحد من غاز الهيليوم في الوعاء، فإن الإنتروبي الكلية هي

$$S = Nk\left[\ln\left(\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi mU}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{5}{2}\right] \tag{55.2}$$

إذا أضيف مول واحد من الأرجون له مقدار الطاقة الحرارية نفسه U، فإن الإنتروبي للخليط تتضاعف تقريبًا،

$$S_{\text{total}} = S_{\text{helium}} + S_{\text{argon}} \tag{56.2}$$

لاحظ أن المعادلة 55.2 تحتوي على حد يعتمد على الوزن الجزيئي للغاز لذلك، فإن إنتروبي غاز الأرجون أكبر من إنتروبي غاز الهيليوم. إذا تضاعف كل من N وU فإن النسبة داخل اللوغريتم لا تتغير. (انظر المعادلة 55.2)، ولكن هناك N أخرى في اللوغاريتم، لذلك تكون الإنتروبي أقل مما توقعت بمقدار $2Nk \ln 2$ ويمثل ذلك إنتروبي الخلط. والفرق بين إضافة الأرجون أو إضافة كمية أخرى من الهيليوم يأتي من N الموجودة في الحد $\left(\frac{V}{N}\right)$ في معادلة ساكور- تيترود. ولكن من أين جاءت N. إذا نظرت ثانية إلى اشتقاق المعادلة 5.2، سنجد أنها جاءت من الحد $1/N!$ الذي أضيف إلى المعادلة بافتراض أن الجزيئات غير مميزة. أما إذا اعتبرت الجزيئات

مميزة، فلا حاجة لإضافة هذا الحد، وتصبح معادلة الإنتروبي للغاز المثالي أحادي الذرة هي:

$$S = Nk\left[\ln\left(V\left(\frac{4\pi mU}{3Nh^2}\right)^{3/2}\right)+\frac{3}{2}\right] \quad \text{(جسيمات مميزة)} \tag{57.2}$$

إذا افترض صحة هذه المعادلة، فهناك بعض النتائج المقلقة. فمثلًا إذا أدخلت حاجزًا داخل الوعاء المحتوي على غاز الهيليوم، بحيث يكون هناك جزءان متساويان، فإن هذه المعادلة تتوقع انخفاض الإنتروبي لغاز الهيليوم في كل جزء إلى النصف، وهذا ينتهك صحة القانون الثاني في الثرموديناميكا. ولكن لا توجد طريقة لإثبات أن ذلك لا يمكن حدوثه. وقد أثير هذا الموضوع من قبل J. Willand Gibbs حيث عرف ذلك «مفارقة جبس **Gibbs Paradox** وأفضل حل لهذه المفارقة هو افتراض أن جميع جزيئات الغاز غير مميزة، حيث سيتم شرح ذلك في الفصل السابع.

السؤال 37.2: احسب إنتروبي الخلط لنظام يتكون من غازين مثاليين أحاديي الذرة A وB، وأن نسبة الخلط اختيارية لتكن x للغاز B، وأن N يمثل العدد الكلي للجزيئات.

الجواب:

$$\Delta S_{\text{mixing}} = -Nk[x \ln x + (1-x)\ln(1-x)]$$

قارن إجابتك مع التي أعطيت للإنتروبي إذا كانت $x = \frac{1}{2}$

السـؤال 38.2: العلاقة التي تمثل إجابة السـؤال السـابق يمكن تطبيقها لأي نوع مـن الغازات المثالية والغـازات الكثيفة، والمواد السـائلة والصلبة. وإذا مـا افترض أن الجزيئات لها الحجم نفسـه لأي من المواد المختلطة، وأن التفاعل بين جزيئين مختلفين يكون متشابهًا مع تفاعل الجزيئين المتماثلين (القوى نفسها) يدعى مثل هذا النظام **الخليط المثالي**، أثبت أنه للخليط المثالي، فإن:

$$\Delta S_{\text{mixing}} = k \ln \binom{N}{N_A}$$

حيث إن N العدد الكلي للجزيئات، وN_A عدد جزيئات الغاز A استخدم تقريب سترلنج لتثبت أن هذه الصيغة نفس نتيجة السؤال السابق، عندما يكون كل من N وN_A أعدادًا كبيرة.

السؤال 39.2: احسب الإنتروبي لمول واحد من غاز الهيليوم عند درجة حرارة الغرفة والضغط الجوي المعياري (1 ضغط جوي) بافتراض أن جميع ذرات الغاز مميزة، وقارن نتيجتك بقيمة الإنتروبي إذا كانت الذرات غير مميزة (القيمة الحقيقية للإنتروبي).

العمليات العكسية وغير العكسية Reversible and Irreversible Processes

تعرف العملية غير العكسية بأنها العملية التي تحدث زيادة في إنتروبي الكون، والعملية التي لا تحدث زيادة في إنتروبي الكون تدعى العملية العكسية. وعمليًّا لا توجد عملية جاهرية يمكن اعتبارها عملية عكسية تامة. مع وجود بعض العمليات التي تقترب من كونها عملية عكسية. ومن العمليات التي تحدث زيادة في الإنتروبي هو التمدد السريع لنظام، على سبيل المثال تمدد الغاز الحر، أما التمدد أو الانكماش ببطء شديد وتدريجي، فإنه لا يحدث تغيرًا في الإنتروبي، وسيتم في الفصل الثالث إثبات أن التغير في الحجم بعملية عكسية يجب أن تكون هذه العملية شبه ساكنة quisatatic لذلك، فإن $W = -P\,\Delta V$ يمكن أن تكون العملية شبه ساكنة، وتكون غير عكسية إذا كان هناك تبادل حراري بين النظام ومحيطه.

وسبب عدم تغير الإنتروبي في العملية العكسية يمكن أن تفهم بالاستعانة بميكانيكا الكم، حيث إن جزيئات الغاز تمتلك دالات موجية ميكانيكية كمية، وبأشكال مختلفة يملأ كل منها فراغ الصندوق، وتوجد في مستويات طاقة متقاربة. (انظر الملحق أ) وعندما ينضغط الغاز يتسبب في تقلص الدالة الموجية، وعليه تزدد طاقات المستويات، ما يؤدي إلى زيادة طاقة كل جزيء. أما إذا كان الانضغاط بطيئًا، فلن تندفع الجزيئات إلى مستويات لها طاقات أعلى، أي إن عدد الطرق التي تترتب بها الجزيئات في مستويات الطاقة لا تتغير، ونتيجة لذلك لا يحدث تغير في التعددية أو الإنتروبي للنظام.

ومن العمليات غير العكسية في الثرموديناميكا انتقال الحرارة من الجسم الساخن إلى الجسم البارد، وكما ذكر في الجزء 3.2 فإن هذه العملية تحدث لأن التعددية الكلية للنظام تزداد، ما يؤدي إلى زيادة في الإنتروبي. والانتقال الحراري العكسي بين جسمين يكون انتقالاً بطيئًا جدًّا لجسمين درجة حرارتهما متساوية تقريبًا. ويجب أن تلاحظ هنا أن أي زيادة في درجة حرارة الجسمين تؤدي إلى تدفق الحرارة في عملية غير عكسية. ويمكن تعريف العملية العكسية بأنها العملية التي يمكن أن تعكس إذا حدث تغير بسيط جدًّا في ظروف النظام.

إن معظم العمليات التي تحدث في الكون تؤدي إلى زيادة كبيرة في الإنتروبي، ولذلك فهي عمليات غير عكسية (تسخين الشمس للأرض، احتراق الخشب، عملية الهضم... إلخ).

الإنتروبي للكون في زيادة مستمرة، ولا يمكن أن تتناقص، ويرى الفلاسفة أن الكون سيتحول إلى مكان ممل للعيش فيه، ولكن هل هناك موت حراري للكون؟ لن يحدث ذلك في زمن منظور. فالشمس ستبقى فترة لا تقل عن خمسة مليارات سنة[28] .

---

(28) لتحليل حديث عن التوقعات المحتملة بعيدة المدى للكون، ارجع إلى

.Steven Frautschi , (Entropy in an Expanding Universe) Science 217 , 593-599 (1982)

وبدلًا من أن نسأل عن بداية الكون، علينا أن نسأل لماذا بدأ الكون في حالة إنتروبي قليلة؟ وبعد مرور أكثر من عشرة مليارات سنة، فالكون بعيد عن حالة الاتزان، هل سيكون أحدا في يوم ما قادرًا على إعطائنا تفسيرًا أكثر وضوحًا عن الكون؟

السؤال 40.2: اشرح سبب زيادة إنتروبي الكون لكل من العمليات غير العكسية الآتية:

(أ) إضافة الملح إلى وعاء من الحساء.

(ب) اصطدام موجة بجبل من الرمال.

(ج) قطع شجرة.

(د) احتراق الجازولين في محرك المركبة.

السؤال 41.2: اذكر خمس عمليات غير عكسية محببة لك، واشرح كيف تزداد إنتروبي الكون لكل عملية.

السؤال 42.2: الثقب الأسود عبارة عن منطقة في الفضاء لها جاذبية كبيرة جدًّا، حيث إن الضوء لا يستطيع أن يفلت منها. وإذا قذف جسم في الثقب الأسود، فإن ذلك يُعدّ عملية غير عكسية من مفهوم الثرموديناميكا. وإضافة كتلة إلى الثقب الأسود ينتج عنه زيادة في الإنتروبي، وليس هناك طريقة لتخبرنا ما هي المادة التي يتكون منها الثقب الأسود[29]. لذلك، فإن إنتروبي الثقب الأسود ستكون أكبر من إنتروبي المادة التي أوجدته، وبمعرفة ذلك يمكن تقدير إنتروبي الثقب الأسود.

(أ) باستخدام تحليل الأبعاد، بيّن أن كتلة الثقب الأسود M يجب أن يكون نصف قطرها GM/c^2، G ثابت نيوتن للجاذبية، c سرعة الضوء. ثم قدر نصف قطر جسم أسود إذا كانت كتلة تساوي 2×10^{30} kg.

(ب) من مفهوم السؤال 36.2، اشرح لماذا يُعدّ إنتروبي الثقب الأسود في الوحدات الأساسية، يجب أن تكون بمقدار الحد الأقصى من الجسيمات التي كونت الثقب الأسود.

(ج) حتى يتم استحداث ثقب أسود من أكبر عدد من الجسيمات، يجب استخدام جسيمات تمتلك أقل طاقة ممكنة (فوتونات بأمواج طويلة، أو جسيمات عديمة الكتلة) على ألا يزيد طول الموجة عن حجم الثقب الأسود. إذا كانت الطاقة الكلية للفوتونات Mc^2، قدر عدد الفوتونات اللازمة لعمل ثقب

(29) هناك مبالغة في هذه العبارة. فخلال تشكل الثقب الأسود تكون الشحنة الكهربائية وعزم الزخم محفوظين، وهذه القيم يمكن قياسها من خارج الثقب الأسود. للسهولة تم افتراض إن كلًا من الشحنة الكهربائية وعزم الزخم يساوي صفرًا.

أسود كتلته M، ومن دون الحد $8\pi^2$ يجب أن تتطابق نتيجتك مع الصيغة التي اشتقت لإنتروبي الثقب الأسود من خلال معالجات رياضية معقدة[30].

$$S_{b.h} = \frac{8\pi^2 GM^2}{hc}k$$

(د) احسب الإنتروبي لثقب أسود واحد، علق على النتيجة هناك"10^{11}" نجم في المجرة، وكان يعتقد أن ذلك رقم كبير. ولكنه مئة بليون فقط. إنه أقل من العجز الوطني، وكانت تصف هذه الأرقام بأنها أرقام فلكية. والآن يجب أن نسميها بالأرقام الاقتصادية.

(30) لفهم الثقوب السوداء ارجع إلى:

Stephen Hawking 1973, Stephen Hawking (The Quantum Mechanics of Black Holes) Scientific American 236, 4-40 ,January 1977: Jacob Beckenstein (Black Hole of Thermodynamic) Physics Today 33, 24-31 (January 980); and Leonard Susskind, (Black Holes and the Information Paradox) Scientific American American 276, 52-57 (April 1997 Richard Feyman, quoted by David Goodstein, Physics Today 42, 73 February (1989).