الباب التاسع

مقدمة في الهندسة التحليلية

An introduction to Analytic Geometry

في هذا الباب سوف ندرس بعض أساسيات الهندسة التحليلية مثل أنواع الإحداثيات والمحاور وغير ذلك من الأساسيات.

1- الإحداثيات الكارتيزية Cartesian Coordinate

إذا افترضنا الخط L فإننا نستطيع أن نتحرك على هذا الخط في كلا الاتجاهين، وعندما نثبت اتجاه الحركة فإن هذا الخط يسمى متجه (الخط الموجه)

تعريف 1: الخط الموجه يسمى محور axis واتجاه هذا المحور يوضح بسهم كما بالشكل

Fig 1.1

سنثبت على المحور L نقطة 0 وقطعة مستقيمة a طولها الوحدة، وتسمى وحدة المسافة كما بالشكل.

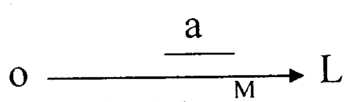


Fig 1.2

لنفرض النقطة M على المحور L فسنرمز بالمسافة بين النقطة M والنقطة 0 بالرمز x إذا كان اتجاه الحركة من 0 إلى M فإن x تكون موجبة، وإذا كان الاتجاه من M إلى النقطة 0 تصبح x سالبة.

تعريف 2: المحور L المثبت عليه النقطة 0 والمعرف عليه وحدة المسافات a يسمى محور الإحداثيات والعدد x يسمى

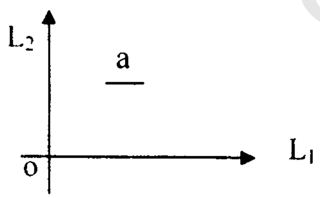
إحداثيات النقطة M .

الإحداثيات الكارتيزية في المستوى

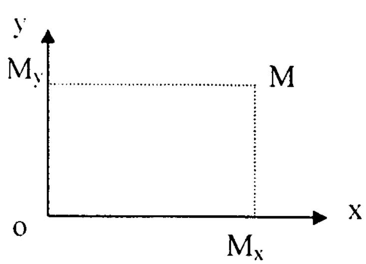
Cartesian coordinates in the plane

لنفرض النقطة 0 في المستوى، ونرسم من هذه النقطة خطان متعامدان L_1 , L_2 ولنأخذ اتجاه لكل من الخطين وأيضا وحدة المسافات a والتي لابد أن تكون مشتركة للخطين إذن الخطين أصبحا محورين الإحداثيات ومشتركين في النقطة 0 كما بالشكل:

سنسمى أحد المحورين L_1 بالمحور السيني (x) والمحور الثاني L_2 بالمحور الصادي (y) والنقطة تسمى بنقطة الأصل.

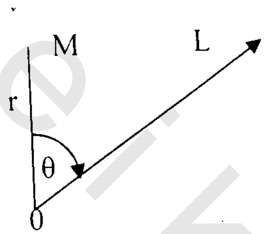


لنفرض أن النقطة M في المستوى، سنسقط من النقطة M عمودين على المحور السيني والمحور الصادي فإن الزوج المرتب (x,y) يمثلان النقطة M ، ويسمى العددين x,y الإحداثيات الكارتيزية للنقطة M كما بالشكل:



الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

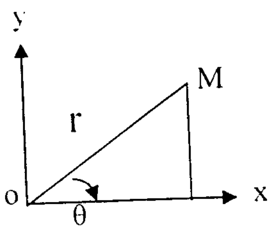
نفرض المحور L في المستوى والنقطة 0 تقع عليـــه، ونفـــرض أن M تبتعد عن النقطة 0 بالمقدار r كما بالشكل:



العدد r في الشكل هو المسافة بين النقطة M والنقطة 0 والزاوية θ

هي الزاوية بين الاتجاه الموجب للمستقيم L والمستقيم $0M$ مقاسه فـــي اتجاه عكس عقارب الساعة ومن السهل أن تعرف أن النقطـــة M فـــي المستوى يمكن تحديدها بدقة بواسطة الكميات (r , θ).

الزوج المرتب (r , θ) يعني الإحداثيات القطبية للنقطة M يـــسمى r بالبعد القطبي وتسمى θ بالزاوية الإحداثية لها



العلاقة بين الإحداثيات القطبية والكارتيزية

يقال: إن النظام الكارتيزي مترافق مع النظام القطبـــي إذا كـــان 0

نقطة الأصل هي القطب، وأن محور x هو المحور القطبى ومحـــور y والذي يصنع زاوية 90^0 مع المحور x وبالتالي فالعلاقة بين الإحداثيات القطبية والكارتيزية كما يلي:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

معادلة الخط المستقيم في المستوى

لإيجاد معادلة الخط المستقيم، وأي علاقـــة بـــين (x,y) يجـــب أن يكون لدينا معلومات عن هذا المستقيم مثل نقطتين على هذا المـــستقيم أو نقطة عليه والزاوية التي يصنعها مع محور x تسمى بزاوية الميل.

أولا : معادلة الخط المستقيم بدلالة

(1) نقطة عليه وزاوية ميله على محور x .

(2) أو بدلالة نقطتين عليه.

معادلة الخط المستقيم هي:

$$(y - y_1) = (x - x_1)\tan\theta$$

في حالة معرفة نقطتين عليـــة همـــا: $M_1(x_1 , y_1) ,M_2 (x_2, y_2)$ تكون المعادلة:

$$\frac{(y - y_1)}{(x - x_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

ثانيا : معادلة الخط المستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه

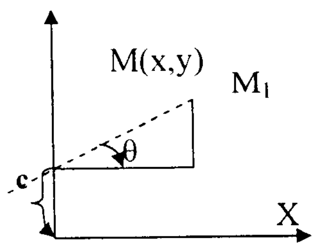
إذا كان لدينا معلومة $M_1(x_1 , y_1)$ تقع على الخط المستقيم ومعلوم ميل هذا الخط m تكون معادلة الخط المستقيم بدلالة نقطة عليه وميله هي:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

ثالثا : معادلة الخط المستقيم بدلالة ميله والجزء المقطوع من محور الصادات

إذا كان لدينا نقطة $M\ (x, y)$ حيث x,y مجاهيل، وكان المعطى هو ميل الخط المستقيم m، وأن الجزء المقطوع من محور y هو c فإن معادلة الخط المستقيم بدلالة ميل الخط والجزء المقطوع من محور الصادات y هي :

$$y = mx + c$$



رابعا : معادلة المستقيم بمعلومية الجزئين المقطوعين من المحورين

إذا كان المستقيم يقطع المحورين x,y وكانت الأجزاء المقطوعة هي a,b على الترتيب فإن معادلة الخط المستقيم هي:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

أمثلة محلولة Solved Proplems

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (2- , 3) ، (4 , 1) .

الحل معادلة المستقيم هي:

$$(y - y_1)/(y_2 - y_1) = (x - x_1)/(x_2 - x_1) \Rightarrow$$
$$(y - 4)/(x - 3) = (-2 - 4)/(3 - 1) = -6/2 = -3$$

أي إن:

$$y + 3x - 7 = 0$$

مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (5- , 3) ويتعامد مع المستقيم:

$$x - 5y + 1 = 0$$

الحل: ميل المستقيم المعطى هو (- معاملx / معامل y).

أي إن:

$$m = 1/5$$

وبالتالي فإن ميل المستقيم المطلوب m_1 يمكن إيجاده من معلومة أنه متعامد على المستقيم .

شرط التعامد هو:

$$m.m_1 = -1 \Rightarrow m_1 = -5$$

إذن معادلة المستقيم هي:

$$(y + 5)/(x - 3) = -5 \Rightarrow$$
$$5x + y - 10 = 0$$

مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم: $2x + 3y + 4 = 0$ ويمر بالنقطة (5- , 3).

الحل: ميل المستقيم المعطى هو(3 / 2-)، وبالتالي فـإن ميـل المـستقيم المطلوب هو نفس الميل.

إذن معادلة المستقيم هي: $(y + 5)/(x - 3) = -2/3$

* * *

تمارين

1- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (6- , 1) ،(4 , 2) .

2- أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور X جزءا طوله 4 ويميل علـى محور X بزاوية مقدارها 150.

3- أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي محور Y ويمر (3-,4).

4- مستقيم يمر بالنقطة (1 , 5) ويقطع من المحور X طولاً قدره يساوي ضعف الطول الذي يقطعه من المحور Y أوجد معادلة المستقيم.

5- ABCD مستطيل فيه A(0,0) , B(5,0) , D(0,3) ، أوجد معادلة أضـلاع هذا المستطيل ومعادلة القطرين.

6- ABCD مستطيل فيه A(-6,0) ومعادلة الضلع BC هي: $4X + 3Y - 12 = 0$ أوجد معادلة الأضـلاع AB , CD علمًـا بأنهما يقطعان من المحور Y جزئيين متساويين في المقدار ومختلفين في الإشارة.

* * *